# ИСААК НЬЮТОН

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л.С. ПОЛАКА

МОСКВА "НАУКА"
1989

# ИСААК НЬЮТОН

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО И КОММЕНТАРИИ
А.Н. КРЫЛОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ
Л.С. ПОЛАКА



МОСКВА "НАУКА"
1989

СЕРИЯ "КЛАССИКИ НАУКИ"

Серия основана академиком *С.И. Вавиловым*




УДК 501

Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – ISBN 5-02-000747-1



"Начала" И. Ньютона – одно из величайших произведений в истории естествознания. Это сочинение заложило основы механики, физики и астрономии, в нем сформулирована программа развития этих областей науки, которая оставалась определяющей на протяжении более полутора веков.

Настоящее издание является факсимильным воспроизведением книги И. Ньютона в переводе с латинского и с комментариями академика А.Н. Крылова. В книгу включен также предметный указатель, составленный И. Ньютоном и публикуемый на русском языке впервые.

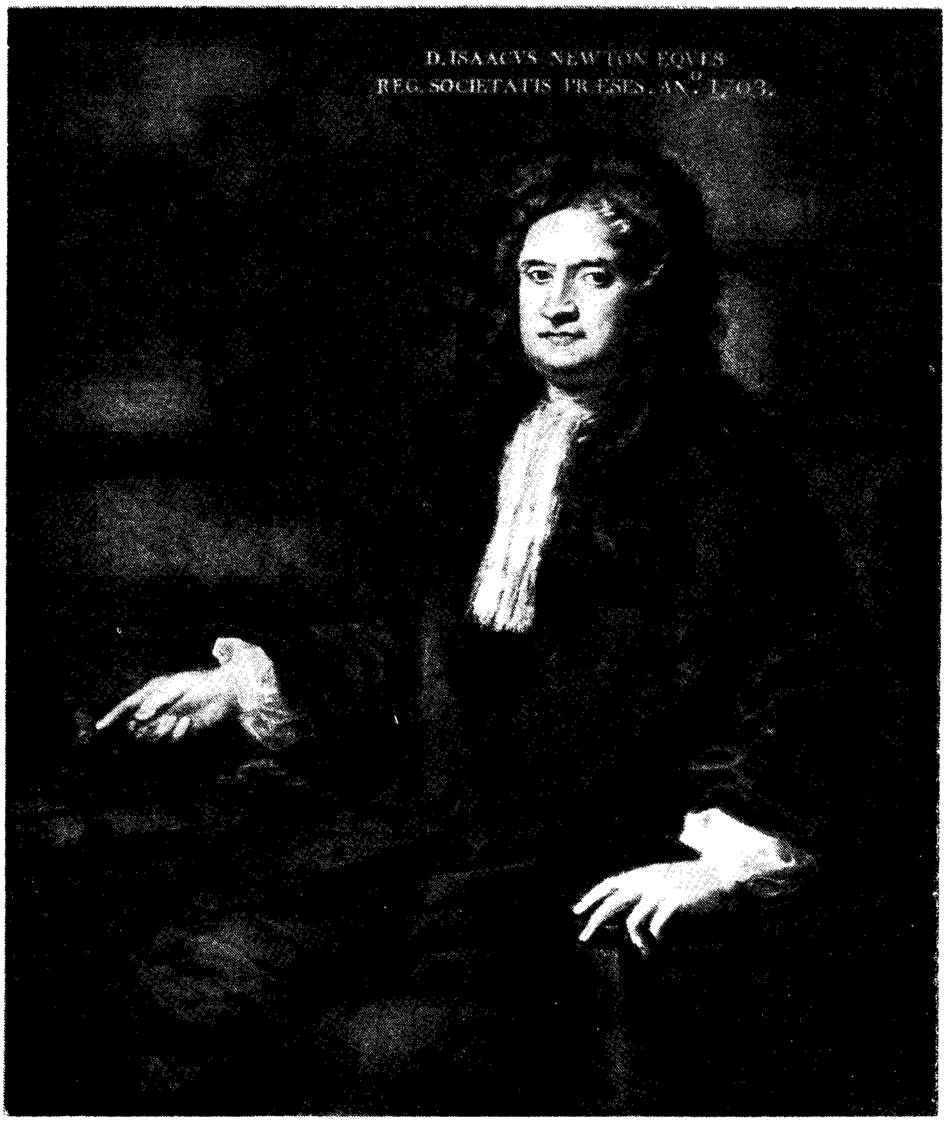
Книга рассчитана на широкий круг специалистов в области естественных наук, а также читателей, интересующихся историей науки.



$$\text{Н}\ \frac{1401020000-398}{042(02)-89}\ 81\text{–}89\ \text{доп.}$$

ISBN 5-02-000747-1


МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА
ИСААК НЬЮТОН


D. ISAACVS NEWTON EQVES
REG. SOCIETATIS PRÆSES. ANº. 1703.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

> Все, что подходит тебе, о мирозданье, подходит и мне. Ничто для меня ни слишком рано, ни слишком поздно, если оно своевременно для тебя. Все, что приносят твои часы, о природа, есть плод благой. Все – из тебя, все – в тебе, все – в тебя.
>
> *Марк Аврелий*

> Легко делать то, что оказывается трудным для других, есть талант; гений же делает то, что непосильно таланту.
>
> *Анри-Фредерик Амьель*

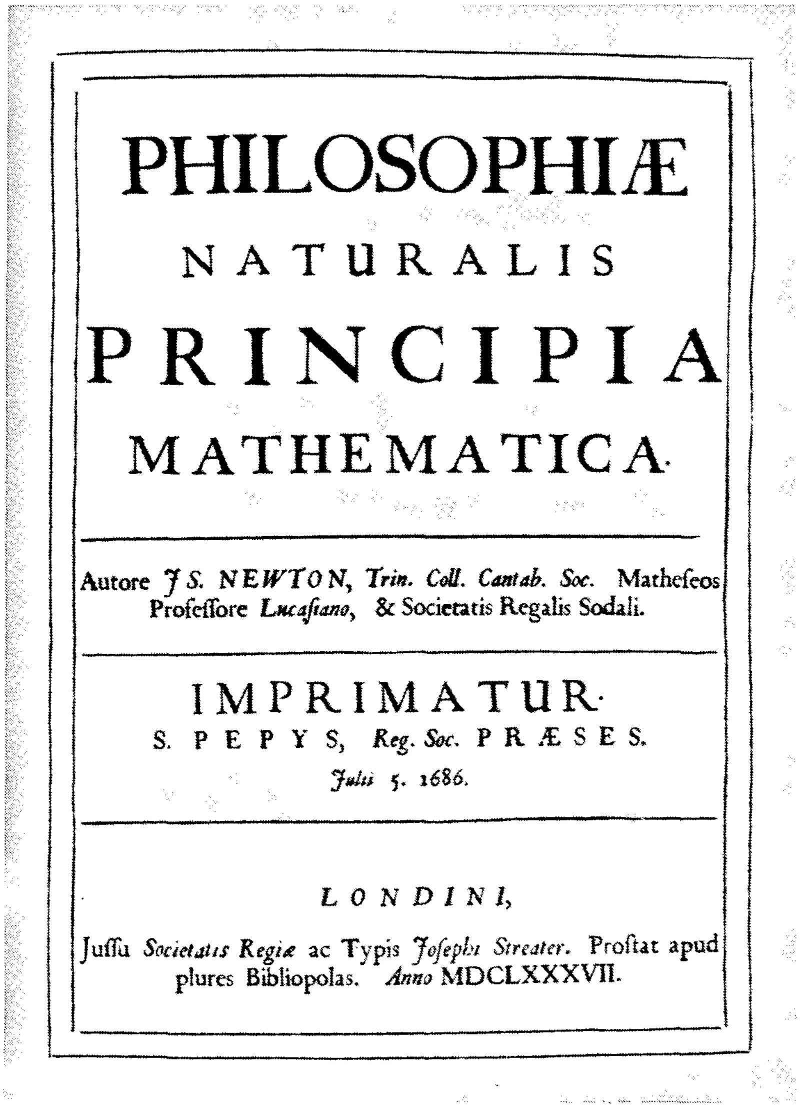
> Природы строй, ее закон в извечной тьме таился,
> И молвил Бог: "Явись, Ньютон!", – и сразу свет разлился.
>
> *Александр Поуп*

Школьные годы делают ньютонианцами всех людей на нашей планете. Чуть ли не с молоком матери мы впитываем в нашу духовную плоть три аксиомы Ньютона, его пространство и время, его закон всемирного тяготения и многое, многое другое. И только потом термодинамика, статистическая механика, теория элементарных частиц в той или иной степени изменяют привычный нам образ мира – ньютоновский образ, углубляя, расширяя, уточняя и все же сохраняя его как отправной пункт, как приближенную картину макрокосмоса человеческого бытия.

Недаром "Начала" Ньютона, предлагаемые нашему читателю, вызвали коренную реконструкцию науки земной и небесной, механики, физики, космологии, космогонии, явились началом грандиозного прогресса естествознания XVII–XX вв. Не случайно Лагранж назвал "Начала" "величайшим произведением человеческого ума"[1].

Открытию закона всемирного тяготения предшествует в Англии период волнующих исканий, в которых участвуют крупнейшие математики, астрономы, физики той эпохи: Гук, всегдашний противник и оппонент Ньютона, Галлей, восторженный поклонник его, Рен, великий архитектор и ученый. В 1684 г. они втроем встречаются в Лондоне и обсуждают вопрос о движении тел под действием силы притяжения; здесь Гук заявляет, что у него уже готово решение, но он откладывает сообщение о нем. Время идет, и Галлей замечает, что мистер Гук "не так

[1] Не случайно и то, что в глазах Англии XVIII в. Ньютон был "новым Моисеем", которому бог явил свои законы, начертанные на скрижалях, и которому была явлена истина мира.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano*, & Societatis Regalis Sodali.

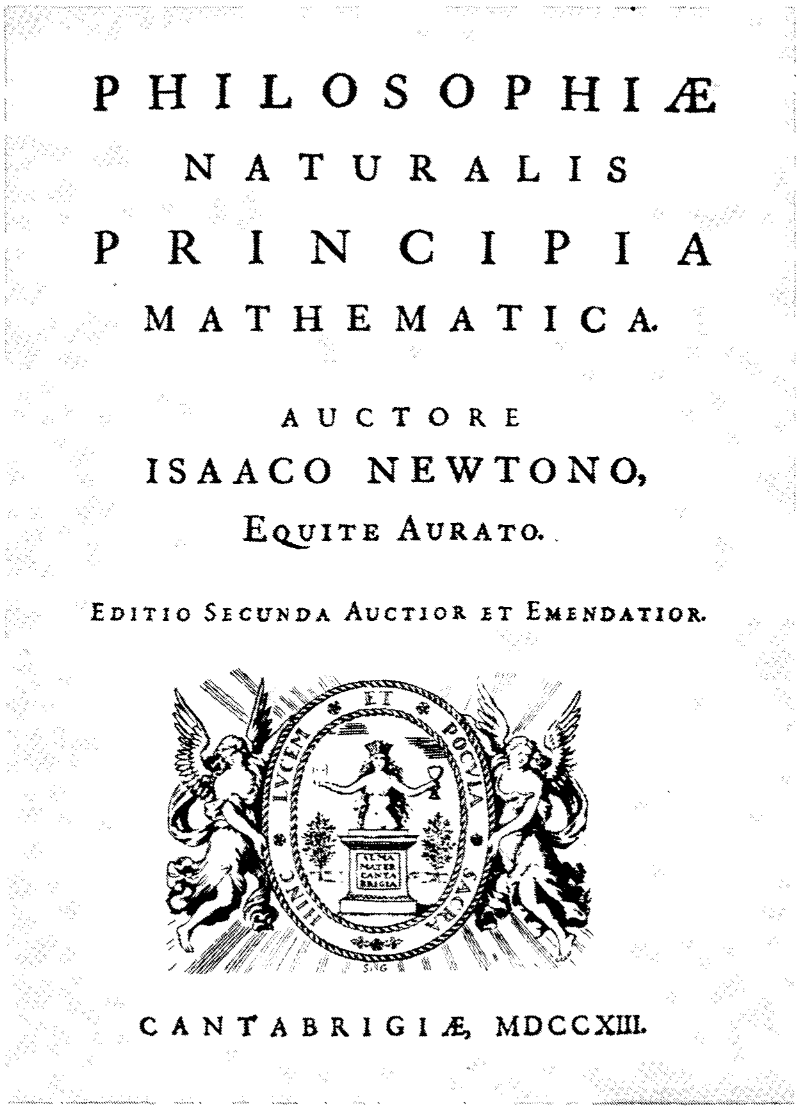
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
*Julii* 5. 1686.

*LONDINI,*

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater.* Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

**Титульный лист первого издания "Начал"**

хорош, как его слова", и обращается к Ньютону с вопросом: какова должна быть орбита тела, движущегося вокруг центра притяжения под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния? Ньютон немедленно отвечает, что это, конечно, эллипс и что он уже с 1679 г. владеет решением задачи. С этого момента и начинается напряженная работа Ньютона, приведшая к созданию "Начал".



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.

HINC LUCEM ET POCULA SACRA

ALMA MATER CANTABRIGIA

CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Титульный лист второго издания "Начал"

Из огромного количества опубликованных в настоящее время рукописей и писем Ньютона мы знаем, что он был человеком чрезвычайно добросовестным и переписывал один и тот же фрагмент по пять-шесть раз, пока написанное не удовлетворяло его полностью. Тем не менее "Начала" – книга трудная, для понимания ее требуется немалая работа читателя. Недаром существует что-то вроде исторического анекдота. Студенты Кембриджа, встречая Ньютона, говорили: "Вот идет человек, написавший книгу, в которой ни он сам, ни кто другой ничего не понимает".

Знание тогдашней науки и работ современников видно из анализа состава библиотеки Ньютона (он, по-видимому, не приобретал книг, которых не читал). В ней 2100 томов, в том числе по алхимии и химии 169, математике и физике 178, естественным наукам 538, теологии 477, классической древности 149. В этом отражается широкий круг научных и религиозных интересов Ньютона, его глубокая эрудиция в вопросах естествознания, математики, философии, теологии, древней истории. Кроме того, можно установить источники его методологии и далеко не общепринятых для того времени взглядов[2].

В годы создания великой книги для Ньютона воедино слились и творчески объединились новая физика и физическая картина мира, математическая познаваемость космоса в целом и разрешимость частных задач, алхимическое представление о единстве микро- и макрокосмоса, всемогущего творца движущейся материи, существующей и сохраняющейся в пространстве и времени. Все глубочайшее содержание "Начал" читатель увидит, освоившись с геометрическими методами, которыми пользуется Ньютон (не надо в то же время забывать, что Ньютон и Лейбниц независимо открыли математический анализ бесконечно малых). Здесь же заметим, что многое в "Началах" как бы замаскировано (например, Ньютон владел методом вариаций произвольных постоянных эллиптического движения, и те уравнения, которые впоследствии дал Лагранж, по-видимому, были предвосхищены Ньютоном и применены им к решению проблем теории движения Луны). Он объединил своей теорией тяготения то, что эмпирически развивалось в минувшие века. Сам Ньютон писал, что тем, чего он достиг, "...он обязан только усердию и упорной мысли"[3].

Универсальность открытой Ньютоном динамической системы была неожиданностью для его современников и потребовался не один десяток лет, пока она стала подлинной доминантой научного творчества в Европе.

Труд, озаглавленный автором "Математические начала натуральной философии", состоит из трех книг. Первая "О движении тел" была окон-

---

[2] По своим религиозным взглядам Ньютон был близок к крайнему радикальному крылу протестантской оппозиции. Так же как Локк и Уистон, он был унитаристом, а во многих вопросах придерживался, хотя и в сильно завуалированной форме (в этом проявилась как характерная для него неприязнь к полемике, так и боязнь – за упорствование в унитаризме полагалось тюремное заключение и даже смертная казнь), социнианских взглядов. Полная несовместимость взглядов Ньютона с идеологией ортодоксальной (англиканской) церкви проявилась в комментариях епископа Горслея, осуществившего в 1785 г. по поручению Лондонского Королевского общества издание "Opera Omnia" Ньютона.

[3] The Correspondance of I. Newton. Vol. III / Ed. H.W. Turnbull, I.F. Scott, A.R. Hall, Laura Tilling. Cambridge, 1953. P. 233.

чена 28 апреля 1686 г. и в этот же день представлена Лондонскому королевскому обществу. Затем была написана вторая книга, носящая такое же название, и, наконец, третья "О системе мира", при создании которой Ньютон очень опасался задержек со стороны "наглой и сутяжной леди философии" (в тогдашнем понимании этого слова). Однако все обошлось (впрочем, не без помощи, по словам Ньютона, "остроумнейшего и во всех областях ученейшего мужа Э. Галлея"). В середине лета 1687 г. "Начала" были опубликованы.

Ньютон не случайно назвал свой великий труд "Математическими началами". Математика для него была главным орудием в физических исследованиях. Изложение в "Началах" ведется геометрическим методом, перевод которого на язык математического анализа (открытого в то же время Ньютоном и Лейбницем) реализуется при сохранении идейной структуры "Начал" и при усилении их эвристической активности уже в XVIII в.

Но Ньютон никогда, как увидит читатель, не терял связи с экспериментом, и в этом его сила. Его изумительное искусство в постановке опытов заложило основы экспериментального исследования современного типа – пусть читатель бросит взгляд не только на "Начала", но и на "Оптику" Ньютона и даже на его огромные по объему алхимические работы.

Великий, создавший целую эпоху в развитии естествознания труд Ньютона[4] и переворот, произведенный им, не следует рассматривать как результат линейного развития более ранних идей. Если в разработке и применении двух первых аксиом движения у него были предшественники, то третий закон полностью принадлежит Ньютону; их до настоящего времени никому не удалось указать. Но без третьего закона динамики грандиозная картина мироздания, нарисованная в "Началах" и представляющая триумф ньютоновской новой универсальности, объединившей земную и небесную механику, не была бы полной.

Как известно, Ньютон сформулировал закон тяготения (закон обратных квадратов), определяющий движение небесных тел в классическом пространстве, до того, как написал "Начала", с успехом приложив его к анализу притяжения между Солнцем и планетами. Однако только согласно его третьему закону гравитация не могла далее рассматриваться как некое изолированное свойство, присущее центральному телу Солнечной системы. Она должна быть присуща Луне, каждой планете,

---

[4] "В этом сочинении все было ново..." (*Крылов А.Н.* Ньютон и его значение для мировой науки// Исаак Ньютон. 1643–1727. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943. С. 5). "Ньютон заставил физику мыслить по-своему, "классически", как мы выражаемся теперь... Можно утверждать, что на всей физике лежит индивидуальный отпечаток его мысли: без Ньютона наука развивалась бы иначе" (*Вавилов С.И.* Исаак Ньютон. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 194, 196).

комете и звезде во Вселенной – мысль, вероятно, одна из глубочайших, когда-либо приходивших человеческому уму.

Вольтер в "Философских письмах", работу над которыми он начал в конце 1727 – начале 1728 г., находясь в Англии, и завершил, вернувшись на родину в конце 1732 г., первым на континенте Европы превознес как самого Ньютона, так и ньютонианство. Судебная палата ("парламент") Франции незамедлительно осудила эту книгу на сожжение как книгу "соблазнительную, противную религии, добрым нравам и почтению к властям".

В ней, в частности, Вольтер пишет: "... самым великим был Исаак Ньютон; ... ибо если истинное величие состоит в том, чтобы, получив в дар от неба мощный талант, использовать его для самообразования и просвещения других, то человек, подобный г-ну Ньютону, едва ли встречающийся однажды на протяжении десяти веков, действительно велик, в то время как все... политики и завоеватели, без которых не обошлось ни одно столетие, обычно суть не что иное, как именитые злодеи. Мы чтим тех, кто владеет умами силою своей правды, но не тех, кто путем насилия создает рабов; тех, кто познал Вселенную, а не тех, кто ее обезобразил"[5].

Ньютоновская наука и поныне занимает особое место – многие из введенных в ней величин, понятий и сформулированных законов используются до наших дней, являются элементами современной научной картины мира и служат основой развития многочисленных технологий, выдержав преобразования и изменения, которые произошли в естествознании со времен Ньютона.

Разумеется, со времени создания "Начал" формулировка классической динамики после работ Эйлера, Лагранжа, Гамильтона, Пуанкаре и других ученых претерпела значительные изменения. Она прояснилась, обогатилась. Кроме того, подверглись критическому пересмотру и детальному анализу границы ее применимости (теория относительности, кванты, черные дыры и т.п.).

В заключение необходимо подчеркнуть воистину бесчисленные подтверждения положений, развитых Ньютоном в "Началах". В течение последних десятилетий они получили и решающее "космическое" доказательство: достаточно вспомнить о прецизионных экспериментах, поставленных с помощью искусственных спутников Земли и подтвердивших с высокой точностью уравнения Ньютона. Мир един: "Природа весьма согласна и подобна в себе самой"[6].

---

[5] *Вольтер Ф.М.* Философские письма // *Вольтер.* Философские сочинения. М.: Наука, 1988. С. 104.

[6] *Ньютон И.* Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. М.; Л.: Госиздат, 1927. С. 70.

Настоящее, третье издание перевода "Начал" на русский язык (первые два давно стали библиографической редкостью) предполагается состоящим из двух частей. Первая представляет собой факсимильное издание перевода, выполненного А.Н. Крыловым и снабженного его примечаниями. Перевод был издан в 1936 г. в виде т. VII его "Трудов". Здесь же помещен предметный указатель, приложенный к третьему (последнему прижизненному) изданию книги Ньютона; указатель ранее на русский язык не переводился. Кроме того, в издание включены заметка об истории перевода "Начал" на русский язык и именной указатель.

Вторая часть будет содержать переводы опубликованных за последние десятилетия подготовительных материалов Ньютона к "Началам", выдержки из его писем, относящихся к проблемам, затронутым в "Началах", и статьи, которые имеют своей целью пояснить место и значение "Начал" во всем творчестве Ньютона, в истории мировой науки; будет также дана картина времени и обстоятельств создания "Начал", их предыстория, освоение, развитие и критика научным сообществом в XVIII–XX вв., их проникновение в Россию и роль в развитии естествознания и техники в нашей стране. Во второй части помещается также библиография трудов Ньютона, список основной ньютоноведческой литературы и необходимый справочный аппарат.

*Л.С. Полак*

А К А Д Е М И Я  Н А У К  С С С Р

# СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

# А. Н. КРЫЛОВА

## VII

Ис. НЬЮТОН

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
С ПРИМЕЧАНИЯМИ И ПОЯСНЕНИЯМИ

А. Н. КРЫЛОВА.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1936

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1936 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов*

Редактор издания А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор З. Л. Сипнаков

Начато набором 22 июля 1935 г. — Подписано к печати 27 апреля 1936 г.

Формат бум. 72 × 110 см. — 44¼ печ. л. — 54.90 уч. авт. л. — 49765 тип. зн. — Тираж 3170
Ленгорлит № 11667. — АНИ № 965. — Заказ № 2266

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Стр.

Предисловие переводчика . . . . V
Предисловие автора к первому изданию . . . . 1
Предисловие автора ко второму изданию . . . . 4
Предисловие издателя ко второму изданию . . . . —
Предисловие автора к третьему изданию . . . . 21
Определения . . . . 23
Аксиомы или законы движения . . . . 39


## Книга I

### О движении тел


Отдел I. О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается . . . . 57
Отдел II. О нахождении центростремительных сил . . . . 73
Отдел III. О движении тел по эксцентричным коническим сечениям . . . . 91
Отдел IV. Об определении эллиптических, параболических и гиперболических орбит при заданном фокусе . . . . 106
Отдел V. О нахождении орбит, когда ни одного фокуса не задано . . . . 116
Отдел VI. Об определении движения по заданным орбитам . . . . 151
Отдел VII. О прямолинейном движении тел к центру или от центра . . . . 160
Отдел VIII. О нахождении орбит, по которым обращаются тела под действием каких угодно центростремительных сил . . . . 175
Отдел IX. О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид . . 184
Отдел X. О движении тел по заданным поверхностям и о колебательном движении подвешенных тел . . . . 199
Отдел XI. О движении тел, взаимно притягивающихся центростремительными силами . . . . 216
Отдел XII. О притягательных силах сферических тел . . . . 244
Отдел XIII. О притяжении тел не сферических . . . . 266
Отдел XIV. О движении весьма малых тел под действием центростремительных сил, направленных к отдельным частицам весьма большого тела . . . . 280
Примечание переводчика к предложению LXVI . . . . 288


## Книга II

### О движении тел


Отдел I. О движении тел при сопротивлении, пропорциональном скорости . . . . 312
Отдел II. О движении тел при сопротивлении, пропорциональном второй степени скорости . . . . 325
Отдел III. О движении тел при сопротивлении, частью пропорциональном первой степени скорости, частью — второй . . . . 356

Стр.

Отдел IV. О круговом обращении тел в сопротивляющейся среде . . . . . . . . . 369
Отдел V. О плотности и сжатии жидкостей и о гидростатике . . . . . . . . . . 377
Отдел VI. О движении маятников при сопротивлении . . . . . . . . . . . . . . 392
Отдел VII. О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел . . . . . . . 422
Отдел VIII. О движении, распространяющемся через жидкости . . . . . . . . . 467
Отдел IX. О круговом движении жидкостей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 486

## Книга III

## О системе мира

Правила умозаключений в физике . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 502
Явления . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 504
Предложения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 510
О движении узлов орбиты Луны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 572

## ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

*«Начала Натуральной Философии»* Ньютона составляют незыблемое основание Механики, Теоретической Астрономии и Физики. Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума», поэтому само собою ясна та польза, которую всякий может извлечь из изучения этого произведения.

Сочинение Ньютона при жизни автора было издано три раза: в 1686, 1713 и 1725 гг. Затем было еще пять или шесть изданий на латинском языке. Последнее из этих латинских изданий исполнено в Глазгоу в 1871 г. попечением В. Томсона (лорд Кельвин) и Г. Блакбурна.

Все эти латинские издания составляют теперь своего рода редкость, вместе с тем принятое в них старинное начертание формул и старинный математический язык вносят для теперешнего читателя лишнюю трудность в изучении сочинения Ньютона.

На английский язык «Начала» переведены, можно сказать, с подстрочною точностью Моттом и изданы в 1727 г.; кроме того, имеется их французский перевод, исполненный маркизою Дюшателе с примечаниями Клеро, изданный в 1759 г., и, наконец, немецкий перевод Вольферса, изданный в 1871 г.

Уже по времени издания видно, что английский и французский переводы также составляют редкость. Перевод Вольферса местами неточен, причем заметно, что переводчик не ясно понимал мысль автора, к тому же примечания, которыми он свой перевод снабдил, местами ошибочны.

Латинский язык недоступен большей части слушателей нашей Морской Академии, поэтому, чтобы облегчить им возможность ознакомления с первоисточником многих из сообщаемых им знаний и чтобы, при упоминании имени Ньютона, желающие могли найти подлинные его слова, доказательства и рассуждения, относящиеся к данному вопросу, я решил исполнить русский перевод ньютоновых «Начал Натуральной Философии». Я придерживался латинского текста издания 1871 г. и, переведя его сперва почти подстрочно, неоднократно перечитывал и исправлял этот перевод так, чтобы при точном сохранении не только смысла подлинника, но и самых слов автора, достигнуть правильности и гладкости русского языка и избегнуть употребления латинских слов вроде: импульс, эффект, факт и т. п., которые от написания их русскими буквами не становятся русскими. Затем, для еще более тщательной чистки я этот перевод вновь переписал сам для подготовки его к печати.

Ньютон почти все свои рассуждения и доказательства ведет геометрически, из слов его предисловия к первому изданию видно, какое значение он придавал точности чертежа. В издании Томсона и Блакбурна эта точность соблюдена, я постарался ее соблюсти и в русском переводе; для этого я перечертил все чертежи тушью в удвоенном масштабе, а некоторые пересоставил сам вновь, строго следя за полным их соответствием тексту. С этих мною самим исполненных чертежей изготовлены фотоцинкографией в два раза уменьшенные клише.

Отдельные места текста по сжатости изложения или особенностям бывших в то время математических приемов требовали некоторых пояснений и толкований, все эти толкования помещены при самом тексте в примечаниях, подобно тому, как в латинском трехтомном издании иезуитов Лесёра и Жакье 1760 г. Лишь примечание к предложению LXVI в виду его значительного объема отнесено к концу первой книги.

Те места подлинника, которые в силу особенностей латинского языка допускали разное толкование, приведены в примечаниях и по-латыни, причем я поясняю причины, заставившие меня остановиться на том или ином их толковании.

Начальник и Конференция Академии признали, что помещение русского перевода ньютоновых «Начал» в «Известиях Морской Академии» соответствует цели этого издания, и я считаю своим долгом принести Г. И. Шульгину и Конференции Академии глубокую благодарность за оказываемое моему труду доверие.

*А. Крылов*

**Заслуженный профессор**
**Морской Академии.**

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Так как древние, по словам Паппуса, придавали большое значение механике при изучении природы, то новейшие авторы, отбросив субстанции и скрытые свойства, стараются подчинить явления природы законам математики.

В этом сочинении имеется в виду тщательное развитие приложений математики к физике.[1]

Древние рассматривали механику двояко: как *рациональную* (умозрительную), развиваемую точными доказательствами, и как *практическую*. К практической механике относятся все ремесла и производства, именуемыя механическими, от которых получила свое название и самая *механика*.

Так как ремесленники довольствуются в работе лишь малой степенью точности, то образовалось мнение, что механика тем отличается от геометрии, что все вполне точное принадлежит к геометрии, менее точное относится к механике. Но погрешности заключаются не в самом ремесле или искусстве, а принадлежат исполнителю работы: кто работает с меньшею точностью, тот — худший механик, и если бы кто-нибудь смог исполнять изделие с совершеннейшею точностью, тот был бы наилучшим из всех механиков.

Однако самое проведение прямых линий и кругов, служащее основанием геометрии, в сущности относится к механике. Геометрия не учит тому, *как* проводить эти линии, но предполагает (постулирует) выполнимость этих построений. Предполагается также, что приступающий к изучению геометрии уже ранее научился точно чертить круги и прямые линии; в геометрии показывается лишь, каким образом при помощи проведения

---

[1] При современной терминологии заглавие сочинения Ньютона: «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» — наиболее точно передается словами: «Математические основания физики». Термин «Натуральная или естественная философия» — «Natural Philosophy» удержался и до сих пор в английской литературе; так, напр., озаглавлено знаменитое сочинение В. Томсона и Тэта.

этих линий решаются разные вопросы и задачи. Само по себе черчение прямой и круга составляет также задачу, но только не геометрическую. Решение этой задачи заимствуется из механики, геометрия учит лишь пользованию этими решениями. Геометрия за то и прославляется, что заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает.

Итак, геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть *общей механики*, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения. Но так так в ремеслах и производствах приходится по большей части иметь дело с движением тел, то обыкновенно все касающееся лишь величины относят к геометрии, все же касающееся движения — к механике.

В этом смысле *рациональная механика* есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное.

Древними эта часть механики была разработана лишь в виде учения о пяти машинах,[2] применяемых в ремеслах; при этом даже тяжесть (так

---

[2] Слова: «Pars haec mechanicae a veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentis illas movendis considerarunt» представляют для перевода ту трудность, что здесь слово «potentia» употреблено в двух разных смыслах, из которых один уже более не употребляется. Сохранившийся смысл слова «potentia» есть сила, мощность; и лишь этот смысл и сохранен за этим словом в переводе Wolfers'а, где поставлено слово «Krafft», или маркизы Du Châtelet, где поставлено слово «puissance», и фраза Ньютона становится совершенно непонятной. Между тем во времена Ньютона слово «potentia» употреблялось и как равносильное слову «machina» — машина. Так, напр., в «Механике» Wallis'а, изданной в 1671 г. (Opera omnia, vol. I, p. 969) говорится: «in axe cum peritrochio et cognatis p o t e n t i i s quibus eadem est ratio»..., в заголовке же: «de axe in peritrochio et m a c h i n i s cognatis», или далее: «Solent autem plerique omnes mechanicorum scriptores „p o t e n t i a m" hanc ad Vectem reducere». В тексте самих «Principia», в следствии II законов, Ньютон употребляет слова: «p o t e n t i i s mechanicis» как равносильное «machinis mechanicis», чтобы избежать частого повторения слова «machina».

Основные машины, рассматривавшиеся древними авторами, суть: vectis — рычаг, axis in peritrochio — ворот, trochlea seu polispastus — блок, cochlea — винт, cuneus — клин. Эти-то пять машин и подразумевал Ньютон, говоря о «potentiis quinque».

В английском переводе Motte'а слово «potentia» везде переведено словом «power», причем это английское слово имело тоже двойственное значение, как то видно, напр., по следующей выписке из гл. III Maclaurin—«An Account on Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries»: «It is distinguished by Sir I. Newton into *practical* and *rational* mechanics; the former treats of the *mechanical powers* viz: the *lever*, the *axis* and *wheel*, the *pulley*, the *wedge* and the *screw* to which the *inclined* plan is to be added and of their various combinations together. Rational Mechanics comprehends the whole theory of motion and shews when the *powers or forces* are given how to determ ne the motion that are produced by them»... «in tracing the powers that operate in nature from the phenomena we proceed by analysis and deducing the phenomena rom the powers or causes that produce them we proceed by synthesis».

как это не есть усилие, производимое руками) рассматривалась ими не как сила, а лишь как грузы, движимые сказанными машинами. Мы же, рассуждая не о ремеслах, а об учении о природе, и следовательно, не об усилиях, производимых руками, а о силах природы, будем, главным образом, заниматься тем, что относится к тяжести, легкости, силе упругости, сопротивлению жидкостей и к тому подобным притягательным или напирающим силам. Поэтому и сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предложений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильныя фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение.

При издании этого сочинения оказал содействие остроумнейший и во всех областях науки ученейший муж *Эдмунд Галлей*, который не только правил типографские корректуры и озаботился изготовлением рисунков, но даже по его лишь настояниям я приступил и к самому изданию. Получив от меня доказательства вида орбит небесных тел, он непрестанно настаивал, чтобы я сообщил их Королевскому обществу, которое затем своим благосклонным вниманием и заботливостью заставило меня подумать о выпуске их в свет. После того я занялся исследованием неравенств движения Луны, затем я попробовал сделать другия приложения, относящиеся: к законам и измерению сил тяготения и других; к исследованию вида путей, описываемых телами под действием притяжения, следующего какому-либо закону; к движению многих тел друг относительно друга; к движению тел в сопротивляющейся среде; к силам, плотностям и движениям среды; к исследованию орбит комет, и к тому подобным вопросам; вследствие этого я отложил издание до другого времени, чтобы все это обработать и выдать в свет совместно.

Все относящееся к движению Луны (как не совершенное) сведено в следствиях предложения LXVI, чтобы не прибегать к отдельным доказательствам и к сложным методам, не соответствующим важности предмета, а также чтобы не прерывать последовательности прочих предложений. Кое что, найденное мною впоследствии, я предпочел вставить, может быть, и в менее подходящих местах, нежели изменять нумерацию предложений и ссылок. Я усерднейше прошу о том, чтобы все здесь изложенное читалось с благосклонностью и чтобы недостатки в столь трудном предмете не осуждались бы, а пополнялись новыми трудами и исследованиями читателей.

*Ис. Ньютон.*

Дано в Кембридже
в Коллегии св. Троицы
8 мая 1686 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этом втором издании «Начал» сделано много отдельных исправлений и некоторые добавления. Так, во втором отделе первой книги определение сил, под действием которых тела описывают заданные орбиты, изложено более просто и полно. В отделе четвертом второй книги сопротивление жидкостей исследуется более точно и теория его подтверждается новыми опытами. В третьей книге теория Луны и предварение равноденствий выводятся более полно из их начал и теория комет подтверждается примерами бóльшего числа и более точно вычисленных орбит.

*Ис. Ньютон.*

Дано в Лондоне
28 марта 1713 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ ИЗДАТЕЛЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Ньютоновой философии новое, столь давно желанное издание, теперь во многом исправленное и дополненное, предъявляем тебе, благосклонный читатель. Главнейшее содержание этого знаменитейшего сочинения ты можешь усмотреть в приложенных оглавлениях, о добавлениях же и измекениях тебе указано в предисловии автора. Остается лишь кое что присовокупить относительно самого метода этой философии.

Пытавшихся излагать физику можно вообще отнести к трем категориям. Прежде всего выделяются приписывавшие разного рода предметам специальные скрытые качества, от которых неизвестно каким образом и должно было происходить, по их мнению, взаимодействие отдельных тел. В этом заключалась сущность схоластических учений, берущих свое начало от *Аристотеля* и *перипатетиков*. Они утверждали, что отдельные действия тел происходят вследствие особенностей самой их природы, в чем же эти особенности состоят, тому они не учили, следовательно, в сущности, они ничему не учили. Таким образом все сводилось к наименованию отдельных предметов, а не к самой сущности дела, и можно сказать, что ими создан философский язык, а не самая философия.

Другие, отбросив напрасное нагромождение слов, надеялись с большею пользою затратить свой труд. Они утверждали, что все вещество во вселенной однородно и что все различие видов, замечаемое в телах, происходит в некоторых простейших и доступных пониманию свойствах частиц, составляющих тела. Восходя, таким образом, от более простого к более сложному, они были бы правы, если бы они на самом деле приписали этим первичным частицам лишь те самые свойства, которыми их одарила природа, а не какие-либо иные. Но на деле они предоставляют себе право допускать какие им вздумается неведомые виды и величины частиц, неопределенные их расположения и движения, а также измышлять различные неощутимые жидкости, свободно проникающие через поры тел и обладающие всемогущею тонкостью и скрытыми движениями.

Таким образом они предаются фантазиям, пренебрегая истинною сущностью вещей, которая, конечно, не может быть изыскана обманчивыми предположениями, когда ее едва удается исследовать при помощи точнейших наблюдений. Заимствующие основания своих разсуждений из гипотез, даже если бы все дальнейшее было ими развито точнейшим образом на основании законов механики, создали бы весьма изящную и красивую басню, но все же лишь басню.

Остается третья категория — это те, кто является последователями экспериментальной философии (т. е. экспериментального метода при исследовании явлений природы). Они также стремятся вывести причины всего сущего из возможно простых начал, но они ничего не принимают за начало как только то, что подтверждается совершающимися явлениями. Они не измышляют гипотез и не вводят их в физику иначе, как в виде предположений, коих справедливость подлежит исследованию. Таким образом они пользуются двумя методами—аналитическим и синтетическим. Силы природы и простейшие законы их действия они выводят аналитически из каких-либо избранных явлений, и затем синтетически получают законы остальных явлений. Вот этот-то самый лучший способ исследования природы и принят преимущественно перед прочими нашим знаменитейшим автором. Лишь к этому методу он счел достойным приложить свои труды для его усовершенствования и развития. Он же дал и знаменитейший пример приложения этого метода, выведя счастливейшим образом изъяснение системы мира из теории тяготения. Уже и другими предполагалось или подозревалось существование тяготения как общего свойства тел, но лишь он первый и один из всех смог доказать существование тяготения на основании совершающихся явлений и положить его в основу самых возвышенных изысканий.

Мне, конечно, известны лица с видными именами, которые, страдая некоторыми предрассудками, неохотно соглашаются с этим новым началом и неведомому отдают предпочтение перед твердо установленным. Я не имею в виду вредить их славе, а хочу лишь все изложить вкратце, чтобы ты сам, благосклонный читатель, мог себе составить справедливое суждение об этом деле.

Чтобы начать разсуждение с простейшего и доступнейшего, рассмотрим в общих чертах, какова природа силы тяжести на Земле, чтобы затем с большею уверенностью перейти к телам небесным, столь далеко от нас отстоящим. Все философы согласны с тем, что все земные тела тяготеют к Земле. Уже давно подтверждено многочисленными опытами, что не существует истинно легких тел. То, что обычно называется легкостью, не есть истинная легкость, а лишь относительная, кажущаяся, происходящая от преобладающей тяжести тел окружающих.

Далее, если все тела тяготеют к Земле, то и Земля равным образом тяготеет ко всем телам. Что тяготение между Землей и телами есть действие взаимное и соответственно равное, обнаруживается следующим разсуждением. Вообразим, что весь объем Земли подразделен на две какие бы то ни было части, равные или неравные между собою; тогда, если бы их тяготения друг к другу не были бы между собою равны, то меньшее уступило бы большему, и по соединении частей они стали бы двигаться по прямой линии, уходя в бесконечность в ту сторону, куда направлено большее усилие, что совершенно противоречит опыту. Таким образом тяготения частей друг к другу взаимно уравновешиваются, т. е. действия тяготения взаимны и между собою равны.

Веса тел, равноотстоящих от центра Земли, относятся между собою как количества материи или массы тел. Об этом заключают по равенству ускорения всех падающих под действием веса тел, ибо силы, сообщающие неравным массам равные ускорения, должны быть пропорциональны массам, приводимым в движение. Равенство же ускорений всех падающих тел следует из того, что в *бойлевой* пустоте, т. е. когда сопротивление воздуха устранено, все падающие тела проходят в равные времена равные пространства. Более же точно это подтверждается опытами над маятниками.

Притягательные силы тел при равных расстояниях пропорциональны массам тел. В самом деле, как тела Землею, так обратно и Земля телами притягиваются с равными усилиями, т. е. вес Земли на каждом из этих тел в отдельности, иначе — та сила, с которою Земля притягивается этим телом, равен весу самого этого тела на Земле, этот же вес пропорционален массе тела, следовательно и та сила, с которою каждое отдельное тело притягивает Землю, иначе — абсолютная притягательная сила тела, пропорциональна его массе.

Отсюда следует, что притягательная сила всего тела происходит и слагается из притягательных сил его частиц, и когда увеличивается или уменьшается количество вещества, то в той же пропорции надлежит увеличивать или уменьшать и его притягательную способность. Итак, действие Земли должно рассматривать как состоящее из действий отдельных частиц ее, следовательно и все земные тела взаимно притягиваются с абсолютными силами, пропорциональными массе притягивающего тела. Такова природа силы тяжести на Земле, рассмотрим, какова она в небесном пространстве.

Всеми философами признается как общий закон природы, что всякое тело удерживает свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока оно не будет вынуждено приложенными к нему силами изменить это состояние. Отсюда непосредственно следует, что тела, движущиеся по кривым линиям, т. е. так, что они непрерывно уклоняются от прямолинейных касательных к своим орбитам, побуждаются совершать свой криволинейный путь какою-либо постоянно действующей силою. Так как планеты обращаются по орбитам криволинейным, то необходимо существование некоторой силы, повторными действиями которой они непрестанно уклоняются от касательных.

Но признание этого равносильно признанию также того, что отсюда выводится математическими рассуждениями и что точнейшим образом доказывается, а именно: всякое тело, движущееся по какой-либо лежащей в плоскости кривой так, что радиусом, проводимым к точке, находящейся в покое или движущейся как бы то ни было, описываются площади, пропорциональные временам, находится под действием силы, направленной к сказанной точке. Астрономами установлено, что главные планеты около Солнца, спутники же — около своих главных описывают площади, пропорциональные временам; из этого следует, что та сила, которая их уклоняет от прямолинейных касательных и вынуждает описывать криволинейные орбиты, направлена к тому телу, которое находится в центре орбиты. Этой силе может быть придаваемо подходящее наименование: по отношению к движущемуся телу ее можно назвать центростремительной, по отношению к центральному телу — притягательной, независимо от того, какой бы причине ее происхождение ни приписывалось.

Затем необходимо признать также, как доказанное математически, что если несколько тел обращается равномерно по концентрическим кругам и квадраты времен обращения пропорциональны кубам расстояний этих тел от общего центра орбит, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам разстояний.

Далее, если тела обращаются по орбитам, лишь близким к круговым, и вершины (апсиды) орбит неподвижны, то опять-таки центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам расстояний. Все астрономы согласны между собою в том, что оба эти свойства имеют место для всех планет.

Таким образом центростремительные силы для всех планет обратно пропорциональны квадратам расстояний до центров орбит. Если кто возразит, что для планет, в особенности же для Луны, апсиды не находятся вполне в покое, но медленно перемещаются, то можно ответить, что если принять это медленное перемещение во внимание, то окажется, что центростремительная сила действительно отступает от обратной пропорциональности второй степени расстояний. Это отступление может быть найдено математически и окажется весьма незначительным. Так, даже для Луны, для которой оно наибольшее, оно едва повышает вторую степень, пропорциональность силы к которой в шестьдесят раз ближе, нежели к третьей. Но более правилен другой ответ, именно: что перемещение апсид происходит не от отступления силы от обратной пропорциональности второй степени расстояния, а от разного рода иных причин, что и устанавливается превосходнейшим образом в этом сочинении. Следовательно, центростремительные силы, которыми главные планеты притягиваются к Солнцу, а спутники — к своим главным, в точности обратно пропорциональны квадратам расстояний.

Итак, в сказанном до сих пор установлено, что планеты удерживаются на своих орбитах некоторою силою, на каждую из них постоянно действующею, что эта сила направлена к центру орбиты, что ее напряжение возрастает при приближении к центру и убывает при удалении от него и что это возрастание происходит в той пропорции, в какой убывает квадрат расстояния, и убывание силы — в той пропорции, в какой квадрат расстояния растет. Посмотрим же теперь, делая сравнение между центростремительными силами планет и силою тяжести, одного ли они рода, или нет. Эти силы будут одного рода, если обладают одинаковыми свойствами и следуют тем же самым законам. Рассмотрим прежде всего центростремительную силу Луны, которая есть ближайшее к нам небесное тело.

Прямолинейные пространства, проходимые телами, пущенными из состояния покоя, в течение заданного промежутка времени под действием каких бы то ни было сил, пропорциональны этим силам, — это следует из математических рассуждений. Таким образом центростремительная сила Луны, обращающейся по своей орбите, будет так относиться к силе тяжести на поверхности Земли, как пространство, проходимое в течение весьма малого промежутка времени Луною под действием центростремительной силы при ее падении по направлению к Земле, вообразив, что она лишена кругового движения, относится к пространству, проходимому в течение того же малого промежутка времени тяжелым тѣлом, падающим близ поверхности Земли под действием своего веса. Первое из этих пространств равно синусу верзусу дуги, описанной Луною за рассматриваемый промежуток времени; этим и определится уклонение Луны от касательной, производимое центростремительной силой, и его можно вычислить, зная время обращения Луны и расстояния ее до центра Земли. Второе из сказанных пространств находится при помощи опытов над маятниками, как это показано Гюйгенсом. По производстве такого расчета оказывается, что отношение первого пространства ко второму, иначе — центростремительной силы Луны, обращающейся по своей орбите, к силе тяжести у поверхности Земли, равно отношению квадрата полудиаметра Земли к квадрату полудиаметра орбиты Луны. Но таково же отношение, как это следует из изложенного выше, и центростремительной силы Луны, обращающейся по своей орбите, к таковой же силе при движении Луны у самой поверхности

Земли. Центростремительная сила у поверхности Земли оказывается, таким образом, равной силе тяжести. Следовательно, это не две различные силы, а та же самая сила, ибо если бы они были различными, то под совокупным их действием тела падали бы на Землю вдвое скорее, нежели под действием одной только силы тяжести. Таким образом установлено, что центростремительная сила, которою Луна постоянно отклоняется от касательной к своей орбите и вынуждается описывать эту орбиту, есть сила тяжести Земли, распространяющаяся до Луны.

Распространение этой силы на огромные расстояния согласуется и с здравым смыслом, так как незаметно какого-либо ее уменьшения на вершинах даже самых высоких гор. Итак, Луна тяготеет к Земле, значит в виду взаимности этого действия, и Земля с равною силою тяготеет к Луне; все это обстоятельно доказывается в рассматриваемом сочинении там, где говорится о приливах моря и о предварении равноденствий, происходящих от действия на Землю Луны и Солнца. Отсюда мы непосредственно заключим, по какому закону сила тяжести убывает с возрастанием расстояния до Земли. Действительно, так как сила тяжести не отличается от центростремительной силы Луны, эта же последняя обратно пропорциональна квадратам расстояний, то и сила тяжести уменьшается в том же отношении.

Перейдем теперь к прочим планетам. Так как обращение главных планет около Солнца и обращение спутников около Юпитера и Сатурна суть явления того же рода, как и обращение Луны около Земли, то уже доказано, что центростремительные силы главных планет направлены к центру Солнца, а спутников — к центрам Юпитера и Сатурна, подобно тому как эта сила для Луны направлена к центру Земли; затем, так как все эти силы обратно пропорциональны квадратам расстояний до центров, подобно тому как сила Луны обратно пропорциональна квадратам расстояний до Земли, то необходимо заключить, что все эти силы одной всеобщей природы. Значит, как Луна тяготеет к Земле и, обратно, Земля к Луне, так и все спутники тяготеют к своим главным планетам, и обратно, главные планеты — к своим спутникам, и наконец, все главные планеты — к Солнцу и Солнце к ним.

Отсюда следует, что все планеты тяготеют к Солнцу и Солнце — к ним. В самом деле, так как главные планеты сопровождаются своими спутниками, то и эти последние обращаются вокруг Солнца вместе с своими главными, из чего и следует, что всякого рода планеты тяготеют к Солнцу и Солнце — к ним. Тяготение спутников к Солнцу обстоятельно устанавливается, кроме этого, еще по неравенствам в движении Луны, которых точнейшая теория, открытая с удивительною проницательностью, излагается в третьей книге этого сочинения.

Распространение притягательной силы Солнца по всем направлениям на огромные расстояния и рассеяние ее по всем частям окружающего его пространства может быть с ясностью выведено по движению комет, которые, приходя с громадных расстояний, доносятся в соседство с Солнцем, иногда настолько близко, что при прохождении через перигелий почти касаются поверхности Солнца.

Теориею этих светил, которую до сих пор тщетно изыскивали астрономы, точнейшим образом подтверждаемой наблюдениями, мы обязаны нашему знаменитейшему автору, счастливо ее открывшему. Оказывается, что кометы движутся по коническим сечениям с фокусом в центре Солнца так, что радиусы, проводимые в эту точку, описывают площади, пропорциональные временам. Из этого явления следует и выводится математически, что силы, удерживающие кометы на их орбитах, направлены к Солнцу и обратно пропорциональны квадратам расстояний до его центра. Таким образом кометы тяготеют к Солнцу, и следовательно, притягательная сила Солнца достигает не только до планет на известные расстояния и приблизительно в одной плоскости, но распространяется и на кометы в самые разнообразные области небесного пространства и на самые разнообразные расстояния. Следовательно, природа тяготеющих тел такова, что их силы источаются на всякие расстояния и действуют на все тяготеющие тела и все планеты и кометы взаимно притягиваются и тяготеют друг к другу. Это подтверждается также небезызвестными астрономам возмущениями Юпитера и Сатурна, происходящими от их взаимодействия, а также упомянутым выше медленным движением апсид, происходящим от подобной же причины.

Итак, можно утверждать, что Земля и Солнце и все небесные тела, сопровождающие Солнце, взаимно притягиваются.

Отсюда следует, что и отдельные малейшие частицы обладают также притягательными силами, пропорциональными их массам, как это было показано для тел земных. Эти силы также будут обратно пропорциональны квадратам расстояний, ибо математически доказывается, что шары, составленные из частиц, притягивающихся по этому закону, притягиваются по такому же закону.

Предыдущие заключения основаны на аксиомах, которые не отрицаются ни одним философом, а именно, что одинаковые следствия, т. е. такие, коих известные свойства одинаковы, происходят и от одинаковых

2. Зак. 3350

причин и что неизвестные их свойства также одинаковы. Кто, например, сомневается в том, что если тяжесть есть причина падения камня в Европе, то такова же причина падения и в Америке, что если тяготение между камнем и Землею взаимно в Европе, то кто станет отрицать, что оно взаимно и в Америке? Если сила притяжения камня и Земли слагается в Европе из сил притяжения отдельных частиц этих тел, то кто станет отрицать, что эта сила так же слагается и в Америке? Если притяжение Земли на всякие тела распространяется в Европе на всякое расстояние, то почему бы ему не распространяться так же и в Америке?

На этом правиле основана вся философия, и если его устранить, то ничего нельзя будет утверждать вообще. Наблюдениями и опытами познается строение отдельных вещей: лишь руководствуясь этим правилом, мы делаем заключения о природе вещей вообще.

Так как все тела, находящиеся на Земле или в небесных пространствах, относительно которых возможно поставить или опыты, или наблюдения, тяготеют взаимно, то можно утверждать, что тяготение есть общее свойство всех тел. Подобно тому как нельзя представить себе тело, которое бы не было протяженным, подвижным и непроницаемым, так нельзя себе представить и тело, которое бы не было тяготеющим, т. е. тяжелым.

Если кто станет утверждать, что тела, составляющие неподвижные звезды, — не тяготеющие, ибо их тяготение не было наблюдаемо, то рассуждая так же, следовало бы сказать, что эти тела и не протяженны и что они не обладают ни подвижностью, ни непроницаемостью, ибо и эти свойства для неподвижных звезд никем наблюдаемы не были. Что же из этого следует? Или что в числе общих свойств тел находится и тяготение, или же что протяженность, подвижность и непроницаемость также не находится в их числе, и следовательно, или что природа вещей правильно объясняется тяготением тел, или же что она неправильно объясняется и протяженностью, и подвижностью, и непроницаемостью.

Я слышу, как некоторые осуждают это заключение и неведомо что бормочут о скрытых свойствах. Они постоянно твердят, что тяготение есть скрытое, сокровенное свойство, скрытым же свойствам не место в философии. На это легко ответить: сокровенны не те причины, коих существование обнаруживается наблюдениями с полнейшею ясностью, а лишь те, самое существование которых неизвестно и ничем не подтверждается.

Следовательно, тяготение не есть скрытая причина движения небесных тел, ибо явления показывают, что эта причина существует на самом деле. Правильнее признать, что к скрытым причинам прибегают те, кто законы этих движений приписывает неведомо каким вихрям некоторой чисто воображаемой материи, совершенно непостижимой чувствами.

Но, может быть, тяготение следует признать скрытой причиной и исключить из философии потому, что причина самого тяготения неизвестна и никем не найдена. Кто разсуждает таким образом, должен озаботиться, чтобы не впасть в такое противоречие, которое рушит основания всей философии. Причины идут неразрывною цепью от сложнейших к простейшим, и когда достигнута самая простая причина, то далее итти некуда. Поэтому простейшей причине нельзя дать механического объяснения, ибо если бы таковое существовало, то эта причина не была бы простейшею. Поэтому, если простейшие причины называть сокровенными и исключать, то придется исключать и непосредственно от них зависящие, затем и происходящие от этих последних, пока философия окажется свободной и очищенной от всяких причин вообще.

Есть и такое учение, в котором утверждают, что тяготение сверхъестественно, и называют его непрерывным чудом, и поэтому считают, что его надо отбросить, ибо в физике не место сверхъестественному. Едва ли стоит затрачивать труд, чтобы опровергать такую нелепость, которая низвергает всякую философию вообще. По такому учению придется или отрицать, что тяготение присуще телам, чего, однако, утверждать нельзя, или же придется называть это свойство тел сверхъестественным, ибо его нельзя вывести ни из других их свойств, ни из механических причин.

Но непременно должны существовать некоторые первоначальные свойства тел и, следовательно, как таковые, не вытекающие из других. Значит, и все такие свойства пришлось бы считать сверхъестественными и отбросить; спрашивается, какая же после того останется философия.

Некоторым вся эта небесная физика еще менее нравится, ибо она противоречит *декартовым* догматам и едва ли может быть с ними согласована. Пусть они остаются при своем мнении, но пусть они будут справедливы и предоставят другим такую же свободу, какую они желают, чтобы была предоставлена им. Пусть же нам будет предоставлено право придерживаться *ньютоновой* философии, которую мы считаем более правильной, и признавать истинными причины, подтверждаемые явлениями, а не такие, которые выдумываются и ничем не подтверждаются.

Истинной философии подобает выводить природу вещей из причин, действительно существующих, и изыскивать те законы, которыми великий творец установил прекраснейший порядок сего мира, а не те, которыми он мог бы это сделать, если бы того пожелал. Разум допускает, что то же самое следствие может происходить и от нескольких причин, различных одна от другой; но лишь та причина истинная, от которой эти следствия на самом деле происходят, прочим же нет места в истинном учении о природе. В часах движение стрелок может происходить или от подвешенных гирь, или от заключенной внутри пружины. Если бы кто принял часы с гирями за пружинные и на основании этого поспешного заключения стал бы объяснять движение стрелок, то его бы осмеяли. Сперва надлежало бы тщательно исследовать внутреннее устройство машины, чтобы определить истинное начало производимых ею движений. Разве не следует вынести подобного же суждения о тех философах, которые предполагают, что небесное пространство заполнено тончайшей материей, находящейся в непрестанном вихревом движении. Если бы им даже удалось точнейшим образом удовлетворить своими гипотезами совершающимся явлениям, то и тогда нельзя было бы утверждать, что они излагают истинное учение о природе и что ими найдена истинная причина движения небесных тел, пока они бы не доказали, что предполагаемое ими действительно существует или, по крайней мере, что другого ничего не существует. Поэтому, после того как показано, что тяготение действительно имеет место в природе, и после того как показано, каким образом от него происходит движение всех небесных тел, то совершенно напрасно и заслуживает лишь осмеяния возражение, что те же движения следует еще объяснить и вихрями, если бы даже такое объяснение и оказалось возможным, чего мы, однако, совершенно не допускаем.

Мы не допускаем возможности объяснить совершающиеся явления вихрями, потому что это нашим автором доказано с совершеннейшею ясностью и полнотою, и надо обладать большою склонностью к бредням, чтобы напрасно затрачивать труд на подновление нелепейшей выдумки и на украшение ее новыми пояснениями.[3]

---

[3] Резкая полемика и все выпады Котеса против вихрей направлены не столько против *Декарта*, как против *Лейбница*, который напечатал в 1689 г., т. е. через два года после издания ньютоновых «Начал», статью под заглавием «Tentamen... astronomiae»... В этой статье он объясняет движение небесных тел не только действием силы, направленной к Солнцу, но еще и переносом их жидкостью, движущейся вместе с ними. Лейбниц затем неоднократно возвращался к этому вопросу, упорствуя в своем заблуждении. Надо также иметь в виду, что второе издание «Начал», редактированное Котесом, совпало по времени с самым разгаром спора между Ньютоном и Лейбницем об открытии исчисления бесконечно малых, или метода флюксий — по терминологии Ньютона и дифференциального исчисления — по терминологии Лейбница.

В 1712 г. были изданы: «Обмен письмами» — «Commercium epistolicum», и «Рецензия» этой книги в Philosophical Transactions, причем последняя была признана Лейбницем особенно для него обидной. Обратив внимание на слог этой неподписанной рецензии и сравни-

Если планеты и кометы переносятся вокруг Солнца вихрями, необходимо, чтобы переносимые тела и прилегающие к ним части вихрей двигались бы с одинаковыми скоростями и по одинаковым направлениям и чтобы они обладали одинаковою плотностью, иначе—равными массами при равных объемах материи. Но установлено, что планеты и кометы, при прохождении через те же самые области небесного пространства, движутся с различными скоростями и по различным направлениям. Отсюда вытекает необходимое следствие, что части заполняющей небесные пространства жидкости, находящиеся в одинаковом удалении от Солнца, несутся в то же самое время по разным направлениям с различными скоростями, ибо одни направления и скорости необходимы для переноса планет, другие—для переноса комет. Так как этого быть не может, то или надо признать, что небесные тела не переносятся материей вихрей, или же надо сказать, что их движения производятся не одним и тем же вихрем, а многими различными друг от друга, которые блуждают по тому же пространству вокруг Солнца. Спрашивается, если множество вихрей заключается в том же самом пространстве и эти вихри проникают друг через друга и обладают разнообразными движениями, ибо их движения должны соответствовать движениям переносимых ими тел — движениям, совершающимся по коническим сечениям с чрезвычайною правильностью и притом то весьма растянутым, то весьма близким к кругу, то как же может быть, что эти вихри сохраняют свою целость и в течение веков не претерпевают никаких возмущений от столкновений со встречаемой ими материей?

Очевидно, что эти вымышленные движения вихрей гораздо сложнее и их гораздо труднее объяснить, нежели действительные движения планет и комет, и мне кажется, что напрасно и вводить их в философию, так как всякая причина должна быть проще своего следствия.

Допустим свободное пользование баснями, и пусть кто-либо станет утверждать, что все планеты и кометы окружены атмосферами, подобными земной; такое предположение представляется гораздо более обоснованным, нежели гипотеза вихрей; затем он станет утверждать, что эти атмосферы, по самой своей природе, движутся вокруг Солнца и описывают

---

вая его с предисловием к «Началам», можно было думать, что «Рецензия» написана также Котесом, тем более, что некоторые рассуждения почти буквально повторены и в предисловии. Во всяком случае, нападки Котеса в этом предисловии достигли цели: в письме к аббату Conti от 9 апр. 1716 г. Лейбниц, между прочим, пишет: «Soit qu'on regarde la préface plaine d'aigreur qu'un autre a mise devant la nouvelle édition de ses Principes»...

Лет через 150 выяснилось, что эта рецензия написана Ньютоном.

Commercium epistolicum, 1856, ed. Briot, p. 243.

конические сечения; очевидно, что такое движение гораздо легче себе представить, нежели движение проникающих друг через друга вихрей, и наконец, что планеты и кометы переносятся своими атмосферами вокруг Солнца. После этого он станет торжествовать открытие причины движения небесных тел. Кто не согласен с этою баснею, должен отвергнуть и басню о вихрях, ибо яйцо с яйцом менее схоже, чем гипотеза атмосфер с гипотезою вихрей.

*Галилей* показал, что отклонение брошенного и движущегося по параболе камня от прямолинейного пути происходит от тяготения камня к Земле, т. е. от скрытой причины. Может случиться, что какой-либо другой, более проницательный, философ измыслит другую причину. Он придумает, что некоторая материя, не постигаемая ни зрением, ни ощущением, вообще никакими чувствами, заполняет пространство, смежное с поверхностью Земли, что эта материя обладает по различным направлениям различными, зачастую противоположными, движениями по параболическим линиям. После этого он под одобрение толпы так объяснит отклонение камня: движущийся камень плавает в этой тончайшей жидкости и, следуя ее течению, не может описывать иного пути, жидкость же движется по параболам, следовательно — и камень должен двигаться по параболе. Кто же после этого не будет удивляться остроте ума этого философа, объясняющего механическими причинами, т. е. материей и движением, явления природы совершенно понятно даже для неученых? Кто же не пожалеет этого простака *Галилея*, который, после больших математических усилий, ввел лишь вновь скрытые свойства, от которых философия столь счастливо была избавлена? Однако стыдно продолжать еще дальше заниматься вздором.

Сущность дела состоит в следующем: число комет громадно, движения их весьма правильны и следуют тем же законам, как и движения планет. Они движутся по коническим сечениям, и орбиты их весьма растянуты, поэтому они проносятся по всем частям небесного пространства и свободно проходят через области планет, часто попятным движением. Эти явления, подтверждаемые точнейшими астрономическими наблюдениями, не могут быть объяснены вихрями и никоим образом не могут быть совместными с планетными вихрями. Вообще движения комет не могут иметь места иначе, как если эта измышленная материя вихрей не будет совершенно удалена из небесного пространства.

В самом деле, если планеты переносятся вокруг Солнца вихрями, то части вихрей, расположенные в смежности с какою-нибудь планетою, должны быть одной с нею плотности, как уже сказано выше. Таким образом вся материя, расположенная по орбите Земли, должна иметь ту же плотность, как Земля, та же материя, которая лежит между орбитою Земли и орбитою Сатурна, должна иметь или такую же плотность, или бо́льшую, ибо для того, чтобы строение вихря могло сохраняться, необходимо, чтобы менее плотные части были ближе к центру, более плотные — дальше от центра. Так как времена обращения планет находятся в полукубическом отношении их расстояний до Солнца, то и времена обращения вихрей должны быть в таком же отношении. Отсюда следует, что центробежные силы этих частей должны быть обратно пропорциональны квадратам расстояний; поэтому массы, более удаленные от центра, побуждаются удалиться от него с меньшею силою, следовательно, если их плотность была бы меньшею, то они по необходимости уступили бы той бо́льшей силе, с которою ближайшие к центру массы стремятся от него удалиться. Следовательно, удаляются от центра более плотные части, приближаются к центру менее плотные, и происходит их обмен местами, пока материя вихря не расположится таким образом, чтобы она могла оставаться в относительном покое после того, как наступит равновесие. Если две жидкости разной плотности находятся в том же сосуде, то та жидкость, коей плотность больше, под действием большей силы тяжести стремится к низшему месту; вследствие подобной же причины более плотные части вихря, как уже сказано, большею центробежною силою побуждаются занять наиболее удаленное от центра место. Таким образом вся и притом значительно бо́льшая часть вихря, расположенная снаружи земной орбиты, будет обладать плотностью, а значит, и силою инерции на каждый объем материи не меньшею, нежели плотность и сила инерции Земли.

Следовательно, проходящие через вихрь кометы будут встречать громадное сопротивление, которое и проявилось бы весьма ощутительно, если только оно не оказалось бы достаточным, чтобы поглотить и прекратить их движение.

Чрезвычайно же правильное движение комет показывает, что они не подвержены даже в малейшей степени ощутительному сопротивлению. Отсюда следует, что кометы совершенно не проникают в такую среду, которая обладала бы каким бы то ни было сопротивлением или какою бы то ни было инерцией, ибо сопротивление среды происходит как от инерции материи, составляющей жидкость, так и от вязкости, т. е. от недостатка скользкости жидкости. Сопротивление, происходящее от вязкости, совершенно ничтожно и едва может быть наблюдаемо в общеизвестных жидкостях, если только они не весьма тягучи, как масло или мед. Сопротивление, замечаемое в воздухе, воде и подобных нетягучих жидкостях, почти полностью первого рода; его нельзя уменьшить изменяя как угодно степень тонкости жидкости, но сохраняя ее плотность, которой сказанное сопротивление всегда пропорционально. Все это с совершеннейшею ясностью доказывается нашим автором в его превосходнейшей теории сопротивления жидкостей, излагаемой в этом втором издании его сочинения несколько более полно, нежели в первом, и вполне подтверждаемой опытами над падающими телами.

Движущиеся тела постепенно сообщают свое движение окружающей жидкости, и вследствие этой передачи утрачивают свое первоначальное количество движения и замедляются. Таким образом замедление пропорционально сообщаемому жидкости количеству движения, это же последнее, при заданной скорости движущегося тела, пропорционально плотности жидкости, следовательно как замедление, так и сопротивление пропорциональны плотности. Такое замедление непременно имеет место, если только теряемое телом количество движения не восстановляется притекающей к нему сзади жидкостью. Но такое восстановление может быть лишь тогда когда давление жидкости на тело сзади будет равно давлению тела на жидкость спереди, а это может быть лишь в том случае, когда относительная скорость, с которою жидкость ударяет тело, притекая к нему сзади, равна той скорости, с которою тело ударяет жидкость своею переднею частью, т. е. надо, чтобы абсолютная скорость притекающей сзади жидкости была вдвое больше скорости, сообщаемой ей телом, а этого быть не может. Таким образом сопротивление жидкости, происходящее от ее плотности и инерции, не может исчезнуть. Отсюда следует заключить, что жидкость, заполняющая небесное пространство, не обладает инерцией, ибо она не оказывает сопротивления движущимся в ней телам; а если у нее нет инерции, то нет и силы, которая могла бы сообщать движение, нет, значит, и силы, которая могла бы производить какое-либо изменение в отдельном теле или в нескольких телах, значит у нее нет и каких-либо проявлений своего присутствия, ибо у нее нет никакой способности произвести какое-либо изменение в состоянии тел. Не следует ли поэтому такую гипотезу, которая совершенно лишена обоснованности, которая даже в малейшей степени не может служить к объяснению явлений природы, признать нелепейшею и совершенно недостойной философа. [4]

---

[4] В настоящее время декартова теория вихрей не только совершенно оставлена, но и совершенно забыта в физике; во времена же Ньютона и еще лет двадцать после его смерти ее упорно придерживались, в особенности Парижская Академия Наук. Предложив, напр., на премию вопрос о теории приливов, она, разделяя в 1740 г. эту премию между сочинениями Даниила Бернулли, Маклорена и Эйлера, строго математическими и основанными на законе тяготения, присоединяла к ним и сочинение иезуита аббата Cavaleri, основанное на картези-

Предполагающие, что небесное пространство заполнено жидкостью, полагают, следовательно, что эта жидкость не инертна, а тогда, отрицая на словах существование пустого пространства, они на деле его допускают, ибо такого рода жидкость никоим образом не может быть различена от пустоты, и весь спор будет итти о словах, а не о сути дела. В самом деле, если есть такие поклонники материи, которые совершенно не допускают существования пустого пространства, то посмотрим, к каким выводам они должны прийти. Или им придется утверждать, что такое строение повсюду заполненного мира волею божиею было устаяовлено для того, чтобы все действия в природе совершались при посредстве этого тончайшего эфира, все проницающего и все заполняющего; но этого утверждать нельзя, ибо, как показано выше на основании движения комет, присутствие этого эфира ничем не проявляется. Или же они скажут, что такое строение мира установлено волею божиею неизвестно с какою целью, — но такого утверждения быть не должно, ибо и всякое другое строение мира может совершенно так же быть обосновано, — или же наконец они скажут: волею божиею все так создано в силу необходимости, вызываемой самою природою вещей. Но тогда их надо причислить к отребью того нечестивого стада, которое думает, что мир управляется роком, а не провидением, и что материя, в силу своей собственной необходимости, всегда и везде существовала, что она бесконечна и вечна. Но если это допустить, то материя должна бы быть и повсюду однородной, ибо разнообразие форм совершенно не вызывается необходимостью; материя тогда должна бы быть и неподвижною, ибо если бы она по необходимости двигалась бы по какому-нибудь одному направлению с какою-нибудь скоростью, то по той же необходимости она должна бы двигаться и по всякому иному направлению со всякою другою скоростью, а так как одновременное движение по разным направлениям с различными скоростями невозможно, то, значит, материя должна быть неподвижной. Следовательно, мир, отличающийся прекраснейшими формами и разнообразием движений, мог произойти не иначе, как только по свободной воле все предопределяющего и всем управляющего божества.

---

анских воззрениях, мотивируя свое решение тем, что Академия не признает возможным отдать предпочтение которой-либо из двух систем, ньютоновой или декартовой. Декартовское же объяснение приливсв основано на предположении, что Луна, оказывая давление на атмосферу, заставляет воду морей подниматься; понятно, что все подобные рассуждения доказывались диалектикою, и тем не менее их противопоставляли ньютоновским доказательствам, наблюдениям и расчетам. Отсюда понятна полемика Котеса и его указание на склонность противников ньютоновой философии к бредням.

Из этого источника и проистекли все те свойства, которые мы называем законами природы, в которых проявлено много величайшей мудрости, но нет и следов необходимости. Поэтому эти законы надо искать не в сомнительных допущениях, а распознавать при помощи наблюдений и опытов. Если же кто возомнит, что он может найти истинные начала физики и истинные законы природы единственно силою своего ума и светом своего рассудка, тот должен будет признать, или что мир произошел в силу необходимости и что существующие законы природы явились следствием той же необходимости, или же что мироздание установлено по воле бога и что он, ничтожнейший человечишко (homunculus), сам бы предвидел все то, что так превосходно создано. Всякая здравая и истинная философия должна основываться на изучении совершающихся явлений, которое, если мы не будем упорствовать, приведет нас к познанию тех начал, в коих с наибольшею ясностью проявляются высочайшая мудрость и всемогущество всемудрейшего и всемогущего творца. Поэтому нельзя отвергать эти начала в силу того, что некоторым людям они не нравятся. Эти начала можно называть или чудесами, или скрытыми свойствами, как кому угодно, — насмешливые названия не обращаются в недостатки самого дела. Или же придется признать, что философия должна основываться на безбожии. Ради таких людей не стоит портить философии, — порядок мироздания все равно не изменится.

Честные и справедливые судьи сами отдадут предпочтение тому наилучшему способу исследования природы, который основан на опытах и наблюдениях. Действительно, едва ли можно передать словами, сколько света, сколько величия в этом превосходном сочинении нашего знаменитейшего автора. Его величайший и счастливейший гений разрешил такие труднейшие задачи и достиг до таких пределов, что не было и надежды, что человеческий ум в состоянии до них возвыситься; все это по достоинству составляет предмет восхищения и преклонения всех тех, кто хотя немного поглубже вникнет в эти исследования. Таким образом двери отворены, и нам предоставлен доступ к познанию прекраснейших тайн природы. Автором открыто и представлено изящнейшее строение системы мира, и если бы теперь вновь ожил король *Альфонс*, то он едва ли бы пожелал в ней большей простоты и стройности. Теперь мы в состоянии ближе рассматривать величие природы и, предаваясь сладостному созерцанию, в большей степени преклоняться и почитать творца и господа вселенной, а это и есть истинный плод философии. Надо быть слепым, чтобы из прекраснейшего и мудрейшего строения мира не усмотреть величайшей мудрости и благости всемогущего творца, надо быть безумцем, чтобы этого не признавать.

Поэтому превосходнейшее сочинение Ньютона представляет вернейшую защиту против нападок безбожников, и нигде не найти лучшего оружия против нечестивой шайки, как в этом колчане.*

Это прежде всего оценил и доказал в своих ученых речах, изданных на английском и латинском языках, знаменитейший *Ричард Бентлей*, весьма сведущий во всякого рода науках и ревностный покровитель искусств, украшение нашего века и нашей Академии, Коллегии св. Троицы достойнейший и полновластнейший начальник. Ему я весьма многим обязан, не откажи и ты, благосклонный читатель, ему в своей благодарности. Он с давних пор пользовался искреннею дружбою нашего знаменитого автора (и он настолько ее ценит, что в своих сочинениях, составляющих радость ученого мира, делает это известным и потомству), он же способствовал как его славе, так и распространению науки. Когда от первого издания этого сочинения остались лишь редчайшие и весьма дорого оплачиваемые экземпляры, он самым настойчивым образом, чуть что не порицая, убедил знаменитого автора, коего скромность не меньше его учености, позволить ему на свой счет и под своим наблюдением выпустить в свет второе издание этого сочинения, пересмотренное и снабженное превосходными дополнениями. Мне же он своею властию поручил, тем возложив на меня приятную обязанность, озаботиться, чтобы это издание было исправное.

*Рожер Котес.*

**Кембридж.**
**12 мая 1713 г.**

**Член коллегии св. Троицы и Плюмеевский профессор астрономии и опытной физики.**

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В этом третьем издании, о котором озаботился *Генри Пембертон*, д-р мед., опытный в этих делах человек, во второй книге кое что о сопротивлении жидкостей изложено более полно, нежели в предыдущем, и добавлены новые опыты над падением тел в воздухе. В третьей книге рассуждение о том, каким образом Луна удерживается силою тяжести на своей орбите, изложено полнее и прибавлены новые наблюдения над отношением диаметров Юпитера, произведенные *Пондом*. Добавлены также наблюдения над

* Рассуждения Котеса показывают, насколько сильно даже в Англии, уже тогда почти двести лет свободной от гнета римского католицизма, было влияние духовенства и богословов на научные учения даже в такой области, как астрономия и физика.

В католических странах научные истины тогда опровергались более убедительными доводами, нежели ругательства — именно пытками и кострами инквизиции (см. прим. 179 в начале книги III).

По подсчету Вольтера инквизицией было казнено 9 718 800 еретиков.

кометой, появившейся в 1680 г., произведенные *Кирком* в Германии в ноябре того года, которые лишь недавно попали нам в руки и из которых явствует, насколько точно параболическая орбита соответствует движению кометы. Орбита кометы, определенная *Галлеем*, вычислена более точно, нежели прежде, и притом орбита эллиптическая. Оказывается, что движение кометы по этой эллиптической орбите на протяжении девяти знаков зодиака представляется не менее точно, чем движение планет по их орбитам, определенным астрономически. Прилагается также орбита кометы 1723 г., вычисленная *Брадлеем*, профессором астрономии в Оксфорде.

*Ис. Ньютон.*

Дано в Лондоне
12 января 1725—1726 г.

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## Определение I

*Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.*

Воздуха двойной плотности в двойном объеме вчетверо больше, в тройном — вшестеро. То же относится к снегу или порошкам, когда они уплотняются от сжатия или таяния. Это же относится и ко всякого рода телам, которые, в силу каких бы то ни было причин, уплотняются. Однако при этом я не принимаю в расчет той среды, если таковая существует, которая свободно проникает в промежутки между частицами. Это же количество я подразумеваю в дальнейшем под названиями *тело* или *масса*. Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом, как о том сказано ниже.[5]

---

[5] Ни одно определение Ньютона не вызывало столько критических замечаний и столько толкований, как это первое, высказанное такими словами: «quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim». В пояснении к этому определению указывается, что слова «quantitas materiae» — «количество материи» равносильны словам «corpus» — «тело» или «massa». Таким образом в этом определении слова «количество материи» составляют как бы одно слово, один новый термин, который при дальнейшем развитии науки не удержался, и в современной терминологии заменен равносильным ему термином «масса». Словам «количество материи» теперь придается несколько иной смысл, нежели им придавал Ньютон в своем определении. То, что теперь разумеется под словами «количество материи», он просто выражает словом «материи», заменив его местоимением „ejusdem" — „таковой". Поэтому он и в пояснении не говорит «количество воздуха двойной плотности в двойном объеме вчетверо больше», а просто «воздуха».

Необходимо также иметь в виду, что в то время при установлении меры для какой-либо величины устанавливалась лишь ее пропорциональность другим величинам, от коих эта мера зависит. Тогда не говорили, как теперь (когда делается определенное предположение о принятой единице меры), «площадь прямоугольника *равняется* произведению из его основания на высоту», а говорили (предполагая единицу меры произвольной) «площадь прямоугольника *пропорциональна* его основанию и высоте».

До Ньютона понятие о массе не вводилось, и рассматривался лишь вес — pondus тела, и при старинной терминологии понятно, что плотность не определялась как масса единицы объема вещества, а говорилось, что плотность тела пропорциональна его весу и обратно

### Определение II

*Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.*

Количество движения целого есть сумма количеств движения отдельных частей его, значит для массы, вдвое большей, при равных скоростях оно двойное, при двойной же скорости — четверное. [6]

---

пропорциональна его объему. Имея это в виду, можно ньютоново определение, придерживаясь теперешней терминологии, выразить так: «масса есть мера количества вещества, пропорциональная его плотности и объему». Самым существенным в ньютоновом пояснении вводимого им т рмина и понятия *масса* есть установление *опытным* путем пропорциональности между массою тела и его весом.

[6] Второе определение выражено следующими слонами: «quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim», т. е. оно выражено совершенно подобно первому, и им вводится новый термин «количество движения», сохранившийся и доселе. Слова «orta conjunctim» указывают на совместную пропорциональность той величины, которая названа «количество движения» и которая могла бы быть названа и каким-либо одним словом, как, напр., у англичан, словом «momentum», почему, придерживаясь современной терминологии, они и переведены словами «устанавливаемая пропорционально массе и скорости».

Необходимо иметь в виду, что высказывая это определение, Ньютон придает слову «motus» — „движение" не смысл названия общеизвестного явления, а вводит некоторую *новую величину*, имеющую при рассмотрении этого явления первенствующее значение. Это особенно ясно выступает в первых словах пояснения: «motus totius est summa motuum in partibus singulis, т. е., переводя буквально, «движение целого есть сумма движений в отдельных частях». Из этих слов ясно, что под словом «motus» он разумеет нечто измеримое, как бы заключающееся или содержащееся в движущемся теле. Вот почему эти слова и переведены так: «Количество движения целого есть сумма количеств движения отдельных частей его», так как теперь слову «движение» иного смысла, как название самого явления, не придается. До Ньютона, напр., Wallis в своей «Mechanica sive de Motu» рассматривал величину, называемую им «momentum» или «impedimentum», мера которой пропорциональна весу и скорости движущегося тела; он принимает вместе с тем эту величину за меру «силы движущегося тела», ибо этой-то величине пропорциональна способность одного тела передавать движение другим телам. Термин «momentum» удержался в английской литературе и по настоящее время, но только ему придается не Wallis'ов, а ньютонов смысл.

«Механика» Wallis'a издана с 1669 г. по 1671 г., и достаточно ее просмотреть, чтобы составить себе понятие о том, что для этой науки сделано Ньютоном.

«Механика» Wallis'a занимает в первом томе полного собрания его сочинений страницы 573—1063 мелкой убористой печати огромной книги формата в лист (in folio). Сперва дается множество определений, затем поясняются кинематические понятия о пройденном пути, скорости и соотношении между ними, выраженных, по обычаю того времени, пропорциями во множестве отдельных предложений. Затем идет ряд предложений о соотношениях между весом тела и скоростью, сообщаемой ему к концу одинаковых или различных промежутков времени силою, составляющей некоторую определенную долю веса, помещая тело на наклонную плоскость. Затем излагается учение о равновесии весов.

Большая часть книги, именно: страницы 645—941, заняты изложением способов вычисления положения центра тяжести разного рода площадей и объемов, составляя, таким образом, продолжение и применение к ряду примеров методов, изложенных Wallis'ом в его «Arithmetica Infinitorum», являющейся как бы преддверием к интегральному исчислению. Страницы 941—992 заняты учением о равновесии простейших машин. Страницы 992—1002 уделены

### Определение III

*Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает* [7] *свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Эта сила всегда пропорциональна массе, и если отличается от инерции массы, [8] то разве только воззрением на нее.

От инерции материи происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения. Поэтому «врожденная сила» могла бы быть весьма вразумительно названа «силою инерции». Эта сила проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии. Проявление этой силы может быть рассматриваемо двояко: и как сопротивление и как напор. Как сопротивление — поскольку тело противится действующей на него силе, стремясь сохранить свое состояние; как напор — поскольку то же тело, с трудом уступая силе

---

учению о движении тела под действием своего веса или его доли при движении по наклонной плоскости, причем понятие о массе не вводится и движущая сила сравнивается всегда с весом заданного тела. Остальные 60 страниц содержат учение об ударе тел: и здесь в предложении 1-м слово «momentum» поясняется словами «quod ex pondere et celeritate componitur», т. е. «которое составляется из веса и скорости», и доказывается закон сохранения этого «momentum» при ударе тел Сочинение заканчивается изложением простейших начал гидростатики.

Отсюда видно, что если в «Механике» Wallis'а и можно найти основные понятия кинематики, систематическое и по тогдашнему времени практически достаточное изложение статики, то относительно динамики можно сказать, что даже не поставлен общий ее вопрос. Может быть, это и составляет причину, почему Ньютон не дает определений ни одного из кинематических понятий — он предполагает их известными, всю статику он излагает мимоходом, как следствие второго закона движения (параллелограмм сил), и все его сочинение посвящено изложению динамики, от данных им основных ее начал до рассмотрения теории планетных возмущений, неравенств в движении Луны и предварения равноденствий.

7 Как в этом определении, так и при формулировке первого закона движения, Ньютон пользуется глаголом «perseverare», включающем в себе не только понятие о сохранении чего-либо, но еще и понятия о длительности и упорстве такого сохранения, поэтому слова «perseverare in statu quo» наиболее точно передаются словами: «продолжает упорно пребывать в своем состоянии»; слова «удерживает свое состояние» передают короче те же понятия, хотя и с меньшею силою выражения. Вообще латынь Ньютона отличается силою выражений; так, тут сказано «perseverare» — «упорно пребывать», а не «manere» — «пребывать или оставаться»; когда говорится, что какое-либо тело действием силы отклоняется от прямолинейного пути, то употребляется не просто слово «deviatur» — «отклоняется», а «retrahitur» — «оттягивается»; про силу не говорится просто, что она прикладывается, «applicatur», к телу, а «imprimitur», т. е. «вдавливается» или «втискивается» в тело и т. п. В переводе принята менее выразительная, но общеупотребительная теперь терминология.

8 В этом пояснении чуть ли не единственный раз во всей первой книге «Principia» употреблено слово «massa», именно — «inertia massae». Вообще же Ньютон пользуется словом «corpus» — «тело», и несколько реже — словами «quantitas materiae».

сопротивляющегося ему препятствия, стремится изменить состояние этого препятствия. Сопротивление приписывается обыкновенно телам покоящимся, напор — телам движущимся. Но движение и покой, при обычном их рассмотрении, различаются лишь в отношении одного к другому, ибо не всегда находится в покое то, что таковым простому взгляду представляется.

### Определение IV

*Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Сила проявляется единственно только в действии, и по прекращении действия в теле не остается. Тело продолжает затем удерживать свое новое состояние вследствие одной только инерции. Происхождение приложенной силы может быть различное: от удара, от давления, от центростремительной силы.

### Определение V

*Центростремительная сила есть та, с которою тела к некоторой точке, как к центру, отовсюду притягиваются, гонятся или как бы то ни было стремятся.*

Такова сила тяжести, под действием которой тела стремятся к центру Земли; магнитная сила, которою железо притягивается к магниту, и та сила, каковою бы она ни была, которою планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и вынуждаются обращаться по кривым линиям. Камень, вращаемый в праще, стремится удалиться от вращающей пращу руки, и этим своим стремлением натягивает пращу тем сильнее, чем быстрее вращение, и как только ее пустят, то камень улетает.

Силу, противоположную сказанному стремлению, которою праща постоянно оттягивает камень к руке и удерживает его на круге, т. е. силу, направленную к руке или к центру описываемого круга, я и называю *центростремительной*. Это относится и до всякого тела, движущегося по кругу. Все такие тела стремятся удалиться от центра орбиты, и если бы не было некоторой силы, противоположной этому стремлению, которая их и удерживает на их орбитах, то они и ушли бы по прямым линиям, двигаясь равномерно. Эту то силу я и называю центростремительной. Брошенное тело, если бы силы тяжести не было, не отклонялось бы к Земле, а уходило бы в небесное пространство по прямой линии равномерно, если бы не было и сопротивления воздуха. Своею тяжестью оно оттягивается от прямолинейного пути и постоянно отклоняется к Земле в большей или меньшей степени, сообразно напряжению силы тяжести и скорости движения. Чем меньше будет отнесенное к массе напряжение тяжести и чем больше будет скорость, с которою тело брошено, тем менее оно отклонится от прямой линии и тем дальше отлетит.

Если свинцовое ядро, брошенное горизонтально силою пороха из пушки, поставленной на вершине горы, отлетит по кривой, ранее чем упасть на землю, на две мили, то предполагая, что сопротивления воздуха нет, если его бросить с двойною скоростью, оно отлетит приблизительно вдвое дальше, если с десятерною, то — в десять раз. Увеличивая скорость, можно по желанию увеличить и дальность полета и уменьшать кривизну линии, по которой ядро движется, так что можно бы заставить его упасть в расстоянии и десяти градусов, и тридцати, и девяноста, можно бы заставить его окружить всю Землю или даже уйти в небесные пространства и продолжать удаляться до бесконечности. Подобно тому как брошенное тело может быть отклонено силою тяжести так, чтобы описывать орбиту вокруг Земли, так и Луна или силою тяжести, если она ей подвержена, или же иною силою, которая влечет ее к Земле, может быть отклоняема от прямолинейного пути и вынуждена обращаться по своей орбите; без такой силы Луна не могла бы удерживаться на своей орбите. Если бы эта сила была меньше соответствующей этой орбите, то она отклоняла бы Луну от прямолинейного пути недостаточно, а если больше, то отклонила бы ее более, чем следует, и приблизила бы ее от орбиты к Земле. Следовательно, надо, чтобы эта сила была в точности надлежащей величины. Дело математиков найти такую силу, которая в точности удерживала бы заданное тело в движении по заданной орбите с данною скоростью, и наоборот, найти тот криволинейный путь, на который заданною силою будет отклонено тело, вышедшее из заданного места с заданною скоростью.

В центростремительной силе различается три рода величии: абсолютная, ускорительная и движущая.

### Определение VI

*Абсолютная величина центростремительной силы есть мера большей или меньшей мощности самого источника ее распространения из центра в окружающее его пространство.*

Так, магнитная сила, в зависимости от величины магнита или степени намагничивания, может быть в одном магните больше, в другом меньше.

### Определение VII

*Ускорительная*[9] *величина центростремительной силы есть мера, пропорциональная той скорости, которую она производит в течение данного времени.*

Так, действие того же магнита более сильно на близком расстоянии, слабее — на дальнем, или сила тяжести больше в долинах, слабее на вершинах высоких гор и еще меньше (как впоследствии будет показано) на еще бóльших расстояниях от земного шара; в равных же расстояниях она везде одна и та же, ибо, при отсутствии сопротивления воздуха, все падающие тела (большие или малые, тяжелые или легкие) ускоряются ею одинаково.

### Определение VIII

*Движущая величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная количеству движения, которое ею производится в течение данного времени.*

Таким образом вес большей массы больше, меньшей — меньше; для той же самой массы или того же самого тела вес больше вблизи Земли, меньше в небесной дали. Эта величина есть направленное к центру стремление всего тела, которое и называется его весом. Движущая сила распознается по силе, ей равной и противоположной, которая могла бы воспрепятствовать опусканию тела. [10]

---

[9] Вся первая книга «Начал» занята почти исключительно учением о центростремительных силах и их действиях. При этом всегда Ньютон рассматривает лишь «ускорительную силу» в данном месте. При теперешней терминологии можно сказать, что в первой книге им исследуются «силы поля», и то, что он называет «ускорительная сила», теперь называется «напряжение поля» в данном месте. Замечательно, что Ньютон, вводя понятие «ускорительная сила», не пользуется понятием об ускорении, а заменяет его скоростью, производимою в продолжение заданного времени. Вообще понятие ускорения, как оно разумеется теперь, в «Началах» не применяется, и под словом «acceleratio» — «ускорение» всегда разумеется приращение скорости в течение заданного конечного или бесконечно малого промежутка времени.

[10] Давая определение понятия «движущая сила», т. е. того, что теперь зовут просто «сила», Ньютон обращает внимание на способ ее измерения и именно — способ **статический**, уравновешивая другою силою, препятствующей движению к центру. В этих немногих словах и установлена связь между статикою и динамикою при посредстве второго закона — сила статически вдвое бóльшая сообщает и вдвое бóльшее количество движения в заданное время. Замечательно также, что нигде Ньютон не говорит, чтобы сила измерялась произведением из массы на ускорение, но что движущая сила пропорциональна произведению из ускоряющей и массы, и ускоряющая сила не есть понятие, равнозначущее ускорению, а, как уже сказано, напряжению поля в данном месте, т. е. это есть сила, действующая на массу, равную единице. Ньютон, если и не применял, то ясно представлял измерение силы при помощи растяжения пружины или нити, вообще динамометра; это можно видеть из его поучения в конце этой главы, где он указывает, как различить абсолютное движение от относительного, и, приводя

Для краткости эти величины сил можно называть силами движущими, ускоряющими и абсолютными, и для отличия — относить их к самим притягиваемым к центру телам, к месту тел и к центру сил, а именно: движущую силу — к телу, как стремление всего тела к центру, причем это полное стремление составляется из стремлений отдельных частиц тела; силу ускорительную — к месту тела в пространстве, как некоторую способность, распространенную центром на все места окружающего пространства и заставляющую приходить в движение тела, в этих местах находящиеся, абсолютную же силу — к самому центру, как заключающуюся в нем причину, без которой движущие силы не распространялись бы в окружающем пространстве; сказанною причиною может служить или какое-либо центральное тело (как, напр., магнит в центре сил магнитных или Земля в центре сил тяжести), или что бы то ни было иное, хотя бы и ни чем не обнаружимое. Эти понятия должно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил.

Таким образом ускорительная сила так относится к движущей, как скорость к количеству движения. В самом деле, количество движения пропорционально скорости и массе, движущая же сила пропорциональна ускорительной и массе, ибо сумма [11] действий ускорительной силы на отдельные частицы тела и составляет движущую силу его. Поэтому близ поверхности Земли, где ускоряющая сила тяжести для всех тел одна и та же, движущая сила тяжести, или вес, пропорциональна массе тела. Если подняться в такие области, где ускоряющая [12] сила тяжести будет меньше, то и вес пропорционально уменьшится; вообще вес будет постоянно пропорционален массе тела и ускоряющей силе тяжести. Так, напр., в тех областях пространства, где ускоряющая сила тяжести вдвое меньше, вес массы вдвое или втрое меньшей будет вчетверо или вшестеро меньше, нежели близ поверхности Земли. [13] Далее я придаю тот же самый смысл названиям «ускорительные и движущие притяжения и натиски».[14] Название же «притяжение» (центром),

---

опыт с шарами, говорит: «по натяжению нити (соединяющей шары), можно будет узнать их стремление удалиться от оси вращения и по нему вычислить количество движения», т. е. он здесь имеет в виду именно такое «статическое» измерение силы, и по нему находит ее действие.

[11] Отсюда следует, что масса всего тела считается равной сумме масс частиц его.

[12] Ньютон употребляет термины «gravitas acceleratrix» и «gravitas motrix», т. е. „ускоряющая тяжесть“ и „движущая тяжесть“. Современные термины: «напряжение силы тяжести» и «сила тяжести или вес».

[13] В этих словах и устанавливается различие *веса* и массы при пропорциональности их между собою.

[14] Точный смысл латинского слов «impulsus» вполне передается словом «натиск», включающим в себя как понятие о напряженности, так и продолжительности действия.

«натиск» или «стремление» (к центру) я употребляю безразлично одно вместо другого, рассматривая эти силы не физически, а математически, поэтому читатель должен озаботиться, чтобы, в виду таких названий, не думать, что я ими хочу определить самый характер действия или физические причины происхождения этих сил, или же приписывать центрам (которые суть математические точки) действительно и физически силы, хотя я и буду говорить о силах центров и о притяжении центрами.

## *ПОУЧЕНИЕ*

В изложенном выше имелось в виду объяснить, в каком смысле употребляются в дальнейшем менее известные названия. Время, пространство, место и движение составляют понятия общеизвестные. Однако необходимо заметить, что эти понятия обыкновенно относятся к тому, что постигается нашими чувствами. Отсюда происходят некоторые неправильные суждения, для устранения которых необходимо вышеприведенные понятия разделить на абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные.

I. *Абсолютное, истинное математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно, и иначе называется длительностью.

*Относительное, кажущееся* или *обыденное время* есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения, мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как то: час, день, месяц, год.

II. *Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

*Относительное* есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное: так, напр., протяжение пространств подземного воздуха или надземного, определяемых по их положению относительно Земли. По виду и величине абсолютное и относительные пространства одинаковы, но численно не всегда остаются одинаковыми. Так, напр., если рассматривать Землю подвижною, то пространство нашего воздуха, которое по отношению к Земле остается всегда одним и тем же, будет составлять то одну часть пространства абсолютного, то другую, смотря по тому, куда воздух перешел, и следовательно, абсолютно сказанное пространство беспрерывно меняется.

III. *Место* есть часть пространства, занимаемая телом, и по отношению к пространству бывает или абсолютным или относительным. Я говорю «часть пространства», а не положение тела и не объемлющая его поверхность. Для равнообъемных тел места равны, поверхности же от несходства формы тел могут быть и неравными. Положение, правильно выражаясь, не имеет величины, и оно само по себе не есть место, а принадлежащее месту свойство. Движение целого то же самое, что совокупность движений частей его, т. е. перемещение целого из его места то же самое, что совокупность перемещений его частей из их мест; поэтому место целого то же самое, что совокупность мест его частей, и следовательно, оно целиком внутри всего тела.

IV. *Абсолютное движение* есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое, *относительное* — из относительного в относительное же. Так, на корабле, идущем под парусами, относительное место тела есть та часть корабля, в которой тело находится, напр. та часть трюма, которая заполнена телом и которая, следовательно, движется вместе с кораблем. Относительный покой есть пребывание тела в той же самой области корабля или в той же самой части его трюма.

Истинный покой есть пребывание тела в той же самой части того неподвижного пространства, в котором движется корабль со всем в нем находящимся. Таким образом, если бы Земля на самом деле покоилась, то тело, которое по отношению к кораблю находится в покое, двигалось бы в действительности с тою абсолютною скоростью, с которою корабль идет относительно Земли. Если же и сама Земля движется, то истинное абсолютное движение тела найдется по истинному движению Земли в неподвижном пространстве и по относительным движениям корабля по отношению к Земле и тела по кораблю.

Так, если та часть Земли, где корабль находится, движется на самом деле к востоку со скоростью 10 010 частей, корабль же идет к западу со скоростью 10 частей, моряк же ходит по кораблю и идет к востоку со скоростью одной части, то истинно и абсолютно моряк перемещается в неподвижном пространстве к востоку со скоростью 10 001 частей, по отношению же к Земле — на запад со скоростью 9 частей.

*Абсолютное время* различается в астрономии от обыденного солнечного времени уравнением времени. Ибо естественные солнечные сутки, принимаемые при обыденном измерении времени за равные, на самом деле между собою неравны. Это неравенство и исправляется астрономами, чтобы при измерениях движений небесных светил применять более правильное время. Возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенною точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени изменяться не может. Длительность или продолжительность существования вещей одна и та же, быстры ли движения (по которым измеряется время), медленны ли, или их совсем нет, поэтому она надлежащим образом и отличается от своей, доступной чувствам, меры, будучи из нее выводимой при помощи астрономического уравнения. Необходимость этого уравнения обнаруживается как опытами с часами, снабженными маятниками, так и по затмениям спутников Юпитера.

Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства. Если бы они переместились из мест своих, то они продвинулись бы (так сказать) в самих себя, ибо время и пространство составляют как бы вместилища самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве — в смысле порядка положения. По самой своей сущности они суть места, приписывать же первичным местам движения нелепо. Вот эти-то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения.

Однако совершенно невозможно ни видеть, ни как-нибудь иначе различить при помощи наших чувств отдельные части этого пространства одну от другой, и вместо них приходится обращаться к измерениям, доступным чувствам. По положениям и расстояниям предметов от какого-либо тела, принимаемого за неподвижное, определяем места вообще, затем и о всех движениях судим по отношению к этим местам, рассматривая тела лишь как переносящиеся по ним. Таким образом вместо абсолютных мест и движений пользуются относительными; в делах житейских это не представляет неудобства, в философских необходимо отвлечение от чувств. Может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих.

Абсолютное и относительное движение и абсолютный и относительный покой отличаются друг от друга: свойствами, причинами происхождения и проявлениями.

*Свойство покоя* состоит в том, что тела **истинно покоящиеся находятся в покое и друг относительно друга**. Возможно, что какое-нибудь тело в области неподвижных звезд, а может быть, и много далее, находится в абсолютном покое, но узнать по взаимному положению тел в наших областях, не сохраняет ли какое-нибудь из них постоянное положение относительно этого весьма отдаленного нельзя. Невозможно также определить истинный их покой по относительному их друг к другу положению.

*Свойство движения* состоит в том, что части, сохраняющие постоянное положение по отношению к целому, участвуют в движении этого целого. Так, все части вращающихся тел стремятся удалиться от оси вращения, для движущихся поступательно полное движение образуется из соединения отдельных частных движений. Следовательно, когда движутся окружающие тела, то движутся и те, которые по отношению к ним находятся в покое; поэтому нельзя определить истинное абсолютное движение по перемещениям от соседних тел, рассматриваемых как неподвижные. Эти тела должны быть действительно в покое, а не только приниматься за покоящиеся. В противном случае все содержащиеся тела участвовали бы в истинных движениях тел, их окружающих, и если бы это последнее движение прекратить, то они оказались бы на самом деле не в покое, а лишь представлялись до тех пор находящимися в таковом. Окружающие тела по отношению к содержащимся стоят в том же отношении, как наружная часть целого к его внутренней части или как скорлупа к ядру. При движении скорлупы движется и ядро, не перемещаясь относительно скорлупы, т. е. движется как часть целого.

В тесной связи с предыдущим свойством находится такое: тело, движущееся в подвижном пространстве, участвует и в движении этого пространства, поэтому тело, движущееся от подвижного места, участвует в движении своего места. Следовательно, все движения, совершающиеся от подвижных мест, суть лишь составляющие части полных абсолютных движений, и всякое полное движение составляется из движения тела от первого места своего, из движения этого первого от его места и так далее, пока не достигнем до места неподвижного, как это было пояснено примером моряка, приведенным выше. Таким образом полные абсолютные движения могут быть определены не иначе, как при помощи мест неподвижных, почему я и относил их выше к местам неподвижным, относительные же движения — к местам подвижным. Места же неподвижны не иначе, как если они из вечности в вечность сохраняют постоянные взаимные положения и, следовательно, остаются всегда неподвижными и образуют то, что я называю неподвижным пространством.

*Причины происхождения*, которыми различаются истинные и кажущиеся движения, суть те силы, которые надо к телам приложить, чтобы произвести эти движения. Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к самому движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено и изменено без приложения сил к этому телу; достаточно, чтобы силы были приложены к тем телам, по отношению к которым это движение определяется. Когда эти тела будут уступать действию сил, то будет изменяться и то относительное положение, которым определяется относительный покой или относительное движение. Наоборот, истинное движение всегда изменяется от приложения к телу сил, относительное же движение может при таком приложении сил и не изменяться. Так, напр., если и к тем телам, к которым движение заданного тела относится, будут приложены такие силы, что относительное положение всех тел будет сохраняться, то сохранится и относительное движение заданного тела по отношению к прочим. [15] Таким образом всякое относительное движение может быть изменяемо такими действиями, при которых абсолютное движение не меняется, и может сохраняться при таких, от которых абсолютное изменяется, так что абсолютное движение совершенно не зависит от тех соотношений, которыми определяется движение относительное.

*Проявления*, которыми различаются абсолютное и относительное движение, состоят в силах стремления удалиться от оси вращательного движения, ибо в чисто относительном вращательном движение эти силы равны нулю, в истинном же и абсолютном они больше или меньше, сообразно количеству движения. Если на длинной веревке подвесить сосуд и, вращая его, закрутить веревку, пока она не станет совсем жесткой, затем наполнить сосуд водой и, удержав сперва вместе с водою в покое, внезапным действием другой силы привести сосуд во вращение в сторону раскручивания веревки, то сосуд будет продолжать вращаться, причем это вращение будет поддерживаться достаточно долго раскручиванием веревки. Сперва поверхность воды будет оставаться плоской, как было до движения сосуда. Затем сосуд силою, постепенно действующею на воду, заставит и ее участвовать в своем вращении. По мере возрастания вращения вода будет постепенно отступать от середины сосуда и возвышаться по краям его, принимая впалую форму поверхности (я сам это пробовал делать); при

---

[15] Это свойство относительного движения высказано еще вторично, как следствие VI законов движения.

усиливающемся движении она все более и более будет подниматься к краям, пока не станет обращаться в одинаковое время с сосудом и придет по отношению к сосуду в относительный покой. Этот подъем воды указывает на стремление ее частиц удалиться от оси вращения, и по этому стремлению обнаруживается и измеряется истинное и абсолютное вращательное движение воды, которое, как видно, во всем совершенно противоположно относительному движению. В начале, когда относительное движение воды в сосуде было наибольшее, оно совершенно не вызывало стремления удалиться от оси — вода не стремилась к окружности и не повышалась у стенок сосуда, а ее поверхность оставалась плоской и истинное вращательное ее движение еще не начиналось. Затем, когда относительное движение уменьшилось, повышение воды у стенок сосуда обнаруживало ее стремление удалиться от оси и это стремление показывало постепенно возрастающее истинное вращательное движение воды, и когда оно стало наибольшим, то вода установилась в покое относительно сосуда. Таким образом это стремление не зависит от движения воды относительно окружающего тела, следовательно по таким движениям нельзя определить истинно вращательное движение тела. Истинное круговое движение какого-либо тела может быть лишь одно в полном соответствии с силою стремления его от оси, относительных же движений, в зависимости от того, к чему они относятся, тело может иметь бесчисленное множество; но, независимо от этих отношений, эти движения совершенно не сопровождаются истинными проявлениями, если только это тело не обладает, кроме этих относительных, и сказанным единственным истинным движением. Поэтому в тех системах мира, в которых предполагается, что наши небесные сферы обращаются внутри сферы неподвижных звезд и несут с собою планеты, окажется, что отдельные части этих сфер и планеты, покоящиеся относительно своих сфер, на самом деле движутся, ибо они меняют относительное положение (чего не может быть для тел, покоящихся абсолютно); вместе с тем они участвуют в общем движении несущих их сфер и, значит, как части вращающегося целого, стремятся отдалиться от оси.

Таким образом относительные количества не суть те самые количества, коих имена им обычно придаются, а суть лишь результаты измерений сказанных количеств (истинные или ложные), постигаемые чувствами и принимаемые обычно за самые количества. Если значение слов определять по тому смыслу, в каком эти слова обычно употребляются, то под названиями «время», «пространство», «место» и «движение» и следует разуметь эти постижимые чувствами меры их.

Речь стала бы совершенно необычной и чисто математической, если бы под этими названиями разуметь действительно сами измеряемые количества. Поэтому воистину насилуют смысл священного писания те, кто эти слова истолковывают в нем как самые количества. Не менее того засоряют математику и физику и те, кто смешивает самые истинные количества с их отношениями и их обыденными мерами.

*Распознание истинных движений* отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дело не вполне безнадежное. Основания для суждений можно заимствовать частью из кажущихся движений, представляющих разности истинных, частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить угловую его скорость. Если затем на противоположные стороны шаров заставить действовать равные силы, так чтобы они или увеличивали, или уменьшали, круговращательное движение, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяжению нити может быть обнаружено увеличение или уменьшение скорости движения, и таким образом можно будет найти те стороны шаров, к которым надо приложить силы, чтобы увеличение скорости движения стало наибольшим, и значит, найти те стороны шаров, которые обращены по направлению движения или по направлению, ему обратному. Когда эти передние и задние стороны будут найдены, то и движение будет вполне определено.

Таким способом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних доступных чувствам признаков, к которым можно было бы относить положения шаров. Если бы в этом пространстве, кроме того, находились бы еще некоторые весьма удаленные тела, сохраняющие относительные друг к другу положения, подобно тому как наши неподвижные звезды, то по перемещению шаров относительно этих тел мы не могли бы определить, чему принадлежит это перемещение — телам или шарам. Но если бы мы, определив натяжение нити, нашли бы, что это натяжение как раз соответствует движению шаров, то мы бы заключили, что движение принадлежит шарам, а не внешним телам, и что эти тела находятся в покое. Таким образом по видимому перемещению шаров относительно внешних тел мы вывели бы их движение. Нахождение же истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений и, наоборот, нахождение по истинным или кажущимся движениям их причин и проявлений излагаются подробно в последующем. Именно с этою-то целью и составлено предлагаемое сочинение.

# АКСИОМЫ ИЛИ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

## Закон I

*Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.*[16]

---

[16] В виду важности основных законов движения приводим и подлинную их формулировку.

Закон I высказан так: «Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare».

Закон II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Закон III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Первый закон представляет для точного перевода некоторые затруднения, именно — по отношению к словам «perseverare» и «nisi quatenus». Слово «perseverare», как уже упомянуто в примечании 7, включает в себе понятие о стойкости или упорстве в сохранении чего-либо. Но, кроме того, оно может включать и понятие о длительности сохранения или пребывания, и в этом смысле оно или, точнее говоря, соответствующее ему существительное «perseverantia» употреблено Ньютоном в пояснение понятия об абсолютном времени, где сказано прямо: «duratio seu perseverantia existentiae», т. е. «длительность или продолжительность существования» Сообразно тому, какой смысл придать слову «perseverare», надо придавать и смысл словам «nisi quatenus», т. е. «ограничения в смысле времени или в смысле количества», и тогда их надо переводить или словами: «до тех пор пока» или просто «пока» — в первом случае, и словами: «кроме того поскольку» или просто «поскольку не» — во втором. Таким образом в первом толковании первый закон можно перевести так: «Всякое тело продолжает пребывать в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не понудят его изменить это состояние». Во втором толковании этот закон можно перевести так: «Всякое тело удерживает свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние».

В первом толковании будет оттенено, что одного только времени недостаточно для изменения состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения тела, необходимо еще действие силы. Во втором — что тело лишь постольку удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, поскольку внешние силы ему в том не препятствуют. В пояснении, в первых двух примерах, как бы оттеняется второе толкование, причем в первом

Брошенное тело продолжает удерживать свое движение, поскольку его не замедляет сопротивление воздуха и поскольку сила тяжести не побуждает это тело вниз. Волчок, коего части, вследствие взаимного сцепления, отвлекают друг друга от прямолинейного движения, не перестает вращаться (равномерно), поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха. Бо́льшие же массы планет и комет, встречая меньшее сопротивление в свободном пространстве, сохраняют свое как поступательное, так и вращательное движение в продолжение гораздо большего времени.

### Закон II

*Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Если какая-нибудь сила производит некоторое количество движения, то двойная сила произведет двойное, тройная — тройное, будут ли они приложены разом все вместе, или же последовательно и постепенно. Это количество движения, которое всегда происходит по тому же направлению, как и производящая его сила, если тело уже находилось в движении, при совпадении направлений прилагается к количеству движения тела, бывшему ранее, при противоположности — вычитается, при наклонности — прилагается наклонно и соединяется с бывшим ранее, сообразно величине и направлению каждого из них.

---

повторено выражевие «perseverant nisi quatenus», в третьем же сказано просто «сохраняют» — «conservant», и подчеркнута именно длительность этого сохранения.

Таким образом латинский текст включает в себе одновременно оба толкования или оба понятия, и словом «perseverare» Ньютон использовал всю силу латинского языка. Сочетать совершенно точно в русском переводе оба толкования я не сумел, и в той формулировке, которая дана в тексте, второе толкование как бы несколько пересиливает.

Как при формулировке, так и при пояснении второго закона, подразумевается, что продолжительность действия силы или постоянная, или одна и та же для сравниваемых сил. В непосредственной связи со вторым законом находится лемма X, в которой показывается, что в пределе для бесконечно малых промежутков времени изменения скорости тела, а значит, и количества движения, производимые силою, пропорциональны времени, пройденное же телом по направлению силы пространство пропорционально квадрату времени. Эта лемма, в связи со вторым законом и с понятием об «ускорении» в его теперешнем смысле, и устанавливает пропорциональность силы ускорению.

В поучении, в конце отдела о законах движения, Ньютон особенно подробно останавливается на третьем законе, показывая как подтверждения его опытами, так и важные его применения во всех случаях, где дело идет не об одном, а о нескольких телах, действующих друг на друга.

### Закон III

*Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга междус обою равны и направлены в противоположные стороны.*

Если что-либо давит на что-нибудь другое или тянет его, то оно само этим последним давится или тянется. Если кто нажимает пальцем на камень, то и палец его также нажимается камнем. Если лошадь тащит камень, привязанный к канату, то и, обратно (если можно так выразиться), она с равным усилием оттягивается к камню, ибо натянутый канат своею упругостью производит одинаковое усилие на лошадь в сторону камня и на камень в сторону лошади, и насколько этот канат препятствует движению лошади вперед, настолько же он побуждает движение вперед камня. Если какое-нибудь тело, ударившись в другое тело, изменяет своею силою его количество движения на сколько-нибудь, то оно претерпит от силы второго тела в своем собственном количестве движения то же самое изменение, но обратно направленное, ибо давления этих тел друг на друга постоянно равны. От таких взаимодействий всегда происходят равные изменения не скоростей, а количеств движения, предполагая, конечно, что тела никаким другим усилиям не подвергаются. Изменения скоростей, происходящие также в противоположные стороны, будут обратно пропорциональны массам тел, ибо количества движения получают равные изменения. Этот закон имеет место и для притяжений, как это будет доказано в поучении.

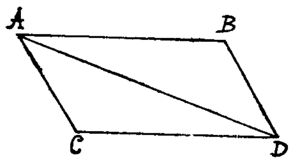
### Следствие I

*При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных.*[17]

---

[17] Формулировка этого следствия представляется при теперешнем изложении необычной, и доказательство — как бы ей несоответствующим, ибо в нем предполагается, что когда тело описывает стороны или диагональ параллелограмма, то оно движется равномерно, т. е. силы на него не действуют, а теорема высказана так, что можно думать, что стороны и диагональ параллелограмма описываются при продолжающемся действии сил и притом сил каких угодно, постоянных или переменных, и в продолжение какого угодно, лишь бы во всех случаях того же самого, промежутка времени. Но необходимо иметь в виду второй закон, по которому скорости, сообщаемые разными силами тому же телу, пропорциональны этим силам и так же направлены. В то время, когда были изданы «Начала», представления скорости в виде отрезка прямой не было, почему вместо этого представления Ньютон и берет те пути, которые тело могло бы описать в течение некоторого произвольно заданного промежутка времени, и вот об этом-то времени после прекращения действия силы и идет речь в теореме. Таким образом эта теорема при теперешней терминологии составляет не что иное, как сложение количеств движения по правилу параллелограмма. Первые слова доказательства также весьма кратки; если развить

Если тело при действии в месте $A$ (фиг. 1) одной только силы $M$ перенеслось бы в продолжение заданного промежутка времени равномерным движением из $A$ в $B$ и если бы при действии в том же месте одной только силы $N$ оно перенеслось бы из $A$ в $C$, то при действии обеих сил оно перенесется в то же самое время из $A$ в $D$ по диагонали параллелограмма $ABCD$.




Фиг. 1.

Так как сила $N$ действует по направлению прямой $AC$, параллельной $BD$, то по второму закону эта сила нисколько не изменит той скорости приближения к прямой $BD$, которая была произведена первою силою. Следовательно, тело в продолжение данного времени достигнет до линии $BD$, была ли сила $N$ приложена, или нет. На основании такого же рассуждения, к концу того же промежутка времени тело должно находиться и где-либо на прямой $CD$, следовательно оно должно быть в их пересечении $D$. Переходит же оно из $A$ в $D$ прямолинейно на основании закона I.

### Следствие II

*Отсюда явствует составление силы, направленной по $AD$, из каких-либо двух наклоненных друг к другу $AB$ и $BD$ и, наоборот, разложение любой силы, направленной по $AD$, на наклонные $AB$ и $BD$. Как это сло-*

подробно их смысл, то можно бы передать его так; «сила $M$, действуя одна, могла бы сообщить телу в продолжение некоторого промежутка времени $t_0$ такую скорость, что тело, двигаясь затем из точки $A$ с этою скоростью равномерно, прошло бы в течение данного промежутка времени $T$ путь $AB$. Сила $N$, действуя одна, могла бы сообщить в продолжение того же промежутка $t_0$ такую скорость, что тело, двигаясь затем с этою скоростью равномерно, прошло бы в течение данного промежутка времени $T$ путь $AC$; тогда если бы на тело действовали одновременно и совместно в течение того же промежутка времени $t_0$ обе силы $M$ и $N$, то они сообщили бы телу такую скорость, что тело, двигаясь затем с этою скоростью равномерно, прошло бы в течение данного промежутка времени $T$ путь $AD$, представляющий диагональ параллелограмма $ABCD$».

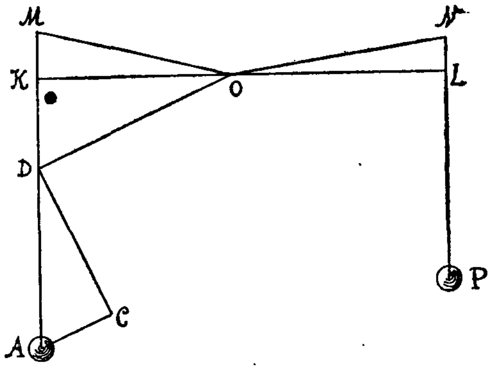
Вторая часть доказательства изложена подробно, и ею вполне разъясняется смысл, который надо придавать как теореме, так и не вполне ясно выраженной первой части доказательства. Можно думать, что потому и теорема и начало ее доказательства и высказаны так неопределенно, чтобы побудить читателя проследить доказательство до конца и самому восполнить краткость формулировки.

Ньютоново доказательство отнюдь не предполагает, что тело до действия сил находилось в покое, в нем также не оговорено, в продолжение какого промежутка времени силы $M$ и $N$ сообщали телу скорости. Этот промежуток времени может быть бесконечно мал, все равно сообщенные скорости будут пропорциональны силам, а это значит, что силы $M$ и $N$ могут быть не только постоянные, но и переменные; в этом последнем случае надо предполагать сказанный промежуток бесконечно малым и переходить к пределу. Здесь Ньютон на этом не останавливается, но дальше, в лемме X и в предложении I, он на это обращает внимание.

*жение, так и разложение беспрестанно подтверждаются в учении о машинах.*[18]

Так, пусть к точкам $M$ и $N$ (фиг. 2а) колеса, взятым на радиусах его $OM$ и $ON$ в неодинаковом расстоянии от центра, подвешены на нитях грузы $A$ и $P$ и требуется определить усилия, с которыми эти грузы стремятся вращать колесо.

Через центр $O$ проводится прямая $KOL$, перпендикулярная к нитям и пересекающая их в $K$ и $L$; центром $O$ и бо́льшим из расстояний $OL$ проводится круг, пересекающий $MA$ в $D$, и строятся прямые: $DC$ перпендикулярно к $OD$ и $AC$ ей параллельно. Так как ничто не изменится от того, будут ли точки $K$, $L$, $D$ нитей прикреплены к плоскости колеса, или нет, то действие грузов будет одно и то же, подвесить ли их в точках $K$ и $L$, или в точках $D$ и $L$. Но если полную величину веса груза $A$ представить линией $AD$, то этот вес разлагается на силы $AC$ и $CD$, из коих $AC$, действующая по направлению радиуса $OD$ прямо от центра, не имеет значения для вращения колеса, вторая же сила, действующая перпендикулярно к радиусу $OD$, имеет такое же значение, как если бы она действовала перпендикулярно радиусу $OL$, равному $OD$, т. е. такое же, как вес груза $P$, если его взять таким, чтобы он относился к весу $A$, как длина $DC$ к $DA$.



Фиг. 2а.

Но, по подобию треугольников $DAC$ и $KOD$ и равенству $OD$ и $OL$, будет

$$DC : DA = OK : OL$$

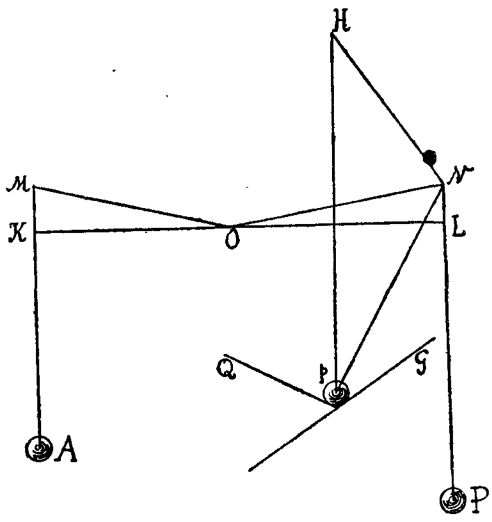
следовательно, когда веса $A$ и $P$ обратно пропорциональны плечам $OK$ и $OL$, составляющим продолжения одно другого, то их действия равносильны, и они

[18] Так как сообщаемые в продолжение равных промежутков времени количества движения, а для того же самого тела скорости, имеют направления действующих сил и пропорциональны им, в предыдущем же следствии показано, что эти количества движения или скорости слагаются по правилу параллелограмма, то, как и сказано в этом следствии, «сложение и разложение сил явствует из предыдущего следствия». Заключительные его слова суть: «ex mechanica», но по дальнейшему изложению и по предисловию автора видно, что под этим словом здесь надо разуметь «учение о машинах», а не «механику» вообще.

будут находиться в равновесии; это и есть известное свойство весов, рычага и ворота. Когда который-нибудь из двух грузов будет больше, нежели в этом отношении, то и усилие к вращению колеса будет соответственно больше.

Пусть груз $p$, коего вес равен весу груза $P$, отчасти подвешен на нити $Np$ (фиг. 2b), частью же поддерживается наклонною плоскостью $G$.

Если провести прямые $pH$ и $NH$ соответственно перпендикулярно горизонтальной плоскости и плоскости $G$, то представив через $pH$ направленную вниз силу,[19] равную весу груза $p$, можно ее разложить на силы $pN$ и $HN$.




Фиг. 2b.

Если плоскость $Q$, пересекающая данную плоскость $G$ по горизонтальной прямой, будет взята перпендикулярно направлению нити $pN$ и груз $p$ поддерживался бы лишь этими двумя плоскостями, то он давил бы на эти плоскости с силами $pN$ и $HN$, соответственно перпендикулярными этим плоскостям, т. е. на плоскость $Q$ силою $pN$ и на плоскость $G$ силою $HN$. Поэтому, если убрать плоскость $Q$, чтобы груз натягивал нить, то так как нить, поддерживая груз, теперь заменяет убранную прочь плоскость $Q$, то она будет натянута с тою самою силою $pN$, которая раньше давила на плоскость. Следовательно, натяжение этой наклонной нити будет так относиться к натяжению отвесной нити $NP$, как длина $pN$ к $pH$. Поэтому, если отношение веса груза $p$ к весу груза $A$ будет равно отношению, составленному из отношения длин $pH$

[19] При сложении и разложении сил по правилу параллелограмма, Ньютон обыкновенно строит лишь стороны той ломаной, коей замыкающая и есть равнодействующая предложенных или искомых сил. Кроме того, он часто делает это построение где-нибудь, не заботясь о том, чтобы стороны и диагональ параллелограмма сходились именно в точке приложения этих сил; построение служит ему не для наглядного представления всех трех элементов силы, т. е. точки приложения, величины и направления, а лишь для установления соотношений между величинами составляющих и равнодействующей и направлениями их; наконец, он часто делает построение так, что сила как бы направлена к точке схода сторон и диагонали, а не от нее, как это принято теперь. Поэтому приведенные у него построения представляются теперь несколько необычными, но само собою очевидно, как от них перейти к принятым теперь.

к $pN$ и обратного отношения кратчайших расстояний от центра колеса до нитей подвеса $pN$ и $AM$ этих грузов, то их действия на колесо будут одинаковы, и они будут взаимно уравновешиваться, что всякий может испытать.

Груз $p$, надавливающий на вышеуказанные две наклонные плоскости, находится в условиях, подобных тем, как клин, коего грани и были бы эти плоскости; следовательно, можно определить соотношение между силами клина и молота, а именно, давление на грань $Q$ так относится к силе, действующей на клин по направлению прямой $pH$ от веса ли его или от удара молота, как $pN$ относится к $pH$, к давлению же на вторую грань $G$ — как $pN$ к $NH$.

Наконец, и сила винта найдется подобным же разложением, ибо он не что иное, как клин, вгоняемый рычагом.

Применение этого следствия весьма широкое, и благодаря этому широкому применению постоянно обнаруживается справедливость его, ибо от вышесказанного зависит все учение о машинах, разными авторами излагаемое различным образом. Пользуясь этим же следствием, легко выводятся соотношения между усилиями в машинах, составленных из колес, барабанов, воротов, рычагов, блоков, натянутых канатов и других механизмов,[20] и весами грузов, поднимаемых или прямо, или наклонно, а также силы связок, приводящих в движение кости животных.

### Следствие III

*Количество движения, получаемое беря сумму количеств движения, когда они совершаются в одну сторону, и разность, когда они совершаются в стороны противоположные, не изменяется от взаимодействия тел между собою.*[21]

Так как по закону III действие и противодействие между собою равны и противоположны, то по закону II они производят равные изменения количеств движения, направленные в противоположные стороны. Таким образом, если движения двух тел направлены в одну сторону, то что

---

[20] Здесь словом «механизмов» переведены слова «potentiis mechanicis», равносильные словам «machinis» и, очевидно, употребленные, чтобы избежать повторения этого последнего (см. прим. 2).

[21] В «Началах» строго проводится, почти исключительно, чисто геометрическое изложение, совершенно избегая алгебры, поэтому закон сохранения количеств движения и высказан в такой форме, что слов «алгебраическая сумма» не встречается. Кроме того, как теорема, так и ее доказательство как бы ограничивают этот закон случаем движения двух тел по той же самой прямой. Но сказанное относительно косвенного удара, в особенности же закон сохранения движения центра тяжести, показывает, что Ньютон не ограничивался этим частным случаем, но счел лишь излишним излагать этот вопрос подробнее.

приложится к количеству движения тела, идущего впереди, то вычтется из количества движения тела, за ним следующего, и сумма количеств движения обоих тел останется прежняя. Если же тела движутся в противоположные стороны, то вычтется поровну из количеств движения каждого из них, и следовательно, разность количеств движения, направленных в обратные стороны, останется без перемены.

Пусть масса шара $A$ втрое больше массы шара $B$ и скорость его заключает две части таких, коих скорость последующего за ним шара $B$ заключает десять, и движение шаров происходит по той же самой прямой. Количества движения $A$ и $B$ будут относиться, как 6 к 10; положим, что эти количества соответственно равны 6 и 10 частям, так что сумма их равна 16. При встрече тел, если тело $A$ приобретет количество движения, равное 3, 4 или 5 частям, то тело $B$ утратит столько же частей, и следовательно, после отражения тело $A$ пойдет, имея количество движения, равное 9, 10 или 11 частям, тело же $B$ будет иметь или 7, или 6, или 5 частей, так что сумма все время остается равной 16, как и раньше. Если бы тело $A$ приобрело 9, 10, 11 или 12 частей и, следовательно, после встречи шло бы, имея количество движения, равное 15, 16, 17 или 18, то тело $B$, потеряв столько же, сколько приобретено телом $A$, или идет вперед с 1 частью после потери 9, или находится в покое при потере 10 частей, или же идет назад, потеряв не только все свое количество движения, но еще (как сказано выше) и одну часть вдобавок, или же при потере 12 частей идет назад с количеством движения, равным 2. Таким образом суммы количеств движения, направленных в ту же сторону, как $(15 + 1)$ или $(16 + 0)$, и разности направленных в противоположные, как $(17 - 1)$ или $(18 - 2)$, составляют постоянно 16, как то было до встречи и отражения. Найдя количества движения, которыми обладают тела после отражения, определим и скорости каждого из них, ибо каждая из этих скоростей так относится к скорости, бывшей до удара, как количества движения соответствующего тела после и до удара. Так, напр., для последнего случая тела $A$, коего количество движения до удара было равно 6 и скорость 2, после же отражения количество движения стало 18, скорость будет 6, как это следует из пропорции $18 : 6 = 6 : 2$.

Когда тела не сферические или же, двигаясь по разным прямым, соударяются косвенно и требуется найти количества движения их после отражения, то необходимо сперва найти положение плоскости, касающейся обоих тел в точке их встречи, затем количество движения каждого тела разложить на два (по след. II), одно перпендикулярно сказанной плоскости, другое ей параллельно. Количества движения, параллельные плоскости, сохранятся без изменения, ибо взаимодействие тел происходит по прямой, перпендикулярной этой плоскости. Количества же движения перпендикулярные получают равные и противоположные изменения, так что сумма этих количеств движения, когда они направлены в одну сторону, и разность, когда они направлены в стороны обратные, остается тою же самою, какая была до удара. От отражений подобного рода могут происходить и вращательные движения тел около их собственных центров, но таких случаев я в дальнейшем не рассматриваю, и было бы весьма долго излагать все сюда относящееся.

### Следствие IV

*Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения; поэтому центр тяжести системы всех действующих друг на друга тел (при отсутствии внешних действий и препятствий) или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно.*

В самом деле, если две точки перемещаются равномерно по прямым линиям и расстояние между ними разделяется в заданном отношении, то и точка раздела или находится в покое, или движется равномерно по прямой. Это будет доказано в лемме XXIII и ее следствии для того случая, когда движение обеих точек происходит в одной плоскости; таким же рассуждением это могло бы быть доказано и для того случая, когда движения совершаются не в одной плоскости. Следовательно, если какие-либо тела движутся равномерно и прямолинейно, то центр тяжести любой пары их или покоится, или движется равномерно по прямой, и кроме того, прямая, соединяющая сказанные прямолинейно перемещающиеся центры тяжести тел, разделяется общим их центром тяжести в постоянном отношении.

Подобным же образом общий центр тяжести этих двух тел и третьего или покоится, или движется равномерно по прямой, ибо и им расстояние между общим центром тяжести пары тел и центром тяжести третьего разделяется в постоянном отношении. Точно так же общий центр тяжести этих трех тел и какого-либо четвертого или покоится, или движется равномерно по прямой, ибо и им расстояние между центром тяжести системы трех тел и центром тяжести четвертого разделяется в постоянном отношении и т. д. до бесконечности.

Следовательно, в системе тел, между которыми нет никаких взаимодействий и которые не подвержены никаким внешним силам, так что каждое из этих тел в отдельности движется равномерно по своему прямолинейному пути, общий центр тяжести или покоится, или движется равномерно и прямолинейно.

Далее, так как в системе двух тел, действующих друг на друга, расстояние центра тяжести каждого из них до общего центра тяжести системы обратно пропорционально массам тел, то относительные количества движения, с которыми оба тела или приближаются к этому центру, или от него удаляются, между собою равны. Вследствие этого, сказанный центр тяжести системы не претерпит от происходящих в противоположных направлениях равных изменений количеств движения, вызываемых действием тел друг на друга, ни ускорения, ни замедления в своем движении и не изменит своего состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения.

В системе многих тел центр тяжести любой пары их, действующих друг на друга, не претерпевает от этого взаимодействия никакого изменения своего состояния; общий центр тяжести остальных тел, которых это взаимодействие не касается, тем более не изменит своего состояния. Расстояние центра тяжести этих двух тел до общего центра тяжести всех остальных разделяется центром тяжести всей системы на части, обратно пропорциональные суммам масс взятой пары тел и всех прочих, т. е. в постоянном отношении. Отсюда следует, что так как центр тяжести двух взятых тел сохраняет свое состояние, то и общий центр тяжести всей системы его сохраняет, и следовательно, от действия двух тел друг на друга он не изменяет своего состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Но в системе многих тел все действия между телами состоят или из взаимодействий одного тела на другое, или же они составляются из таких взаимодействий между двумя телами, и следовательно, они не влияют на изменение состояния покоя или движения центра тяжести этой системы.

Так как центр тяжести системы, когда взаимодействий между телами нет, или покоится, или движется равномерно и прямолинейно, то на основании сказанного выше, несмотря на взаимодействие тел, он будет продолжать все время или покоиться, или двигаться равномерно и прямолинейно, если только он не будет выведен из этого состояния силами, действующими извне.

Следовательно, по отношению к центру тяжести системы нескольких тел имеет место тот же самый закон сохранения состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения, как и для одного тела. Таким образом поступательное количество движения отдельного ли тела.

или системы тел, надо всегда рассчитывать по движению центра тяжести их.[22]

### Следствие V

*Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство, или движется равномерно и прямолинейно без вращения.*

Так как разности[23] движений, направленных в ту же сторону, и суммы направленных в стороны противоположные одинаковы в обоих случаях (как это следует из условий), все же усилия, с которыми тела действуют друг на друга при столкновениях, зависят лишь от этих разностей или сумм, то по закону II последствия столкновений будут равные в обоих случаях, и следовательно, относительные движения останутся в обоих случаях одинаковыми. Это подтверждается обильно опытами. Все движения на корабле совершаются одинаково, находится ли он в покое, или движется равномерно и прямолинейно.

### Следствие VI

*Если несколько тел, движущихся как бы то ни было друг относительно друга, будут подвержены действию равных ускоряющих сил, направленных по параллельным между собою прямым, то эти тела будут*

---

[22] Длиннота доказательства закона сохранения движения центра тяжести системы происходит единственно оттого, что не применен аналитический способ, но зато при изложенном доказательстве ясно видна связь этого закона с предыдущим.

Формулировка предложения обнимает лишь частный случай общего закона о движении центра тяжести системы тел, но заключительные слова доказательства, о расчете количества движения, заставляют думать, что Ньютону был известен и этот закон. На это указывают также заключительные слова доказательства предложения LXV, в котором рассматривается движение системы многих малых тел около одного большого центрального и где сказано: «центр тяжести системы будет описывать вокруг большого тела коническое сечение, и радиусом, проводимым к этому наибольшему, будут описываться площади, пропорциональные временам».

[23] Выражение «разности каких-либо величин, когда они направлены в одну сторону, или суммы, когда они направлены в стороны противоположные», встречается в «Началах» несколько раз, и по своему смыслу равносильно теперешнему термину «геометрическая разность» каких-либо векториальных величин. Когда же говорится: «суммы каких-либо величин, когда они направлены в ту же сторону, и разности, когда они направлены в стороны противоположные», то это равносильно теперешнему термину «геометрическая сумма», и при пояснении второго закона упомянуто о таком геометрическом сложении количеств движения. В других случаях такого упоминания не делается.

Под словами «движение» здесь подразумеваются перемещения и скорости.

Геометрические разности, о которых идет речь в этом предложении, суть геометрические разности перемещений и скоростей всех тел системы и одного из них, относительно которого движение прочих определяется.

*продолжать двигаться друг относительно друга так же, как если бы сказанные силы на них не действовали.*

Так как эти силы, действуя на все тела одинаково (соответственно массам движущихся тел) и по направлениям параллельным, будут сообщать всем телам одинаковые скорости (по закону II), то они ни в чем не изменят ни положений, ни движений тел друг относительно друга.

## *ПОУЧЕНИЕ*

До сих пор я излагал начала, принятые математиками и подтверждаемые многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами и первыми двумя следствиями, *Галилей* нашел, что падение тел пропорционально квадрату времени и что движение брошенных тел происходит по параболе; это подтверждается опытом, поскольку такое движение не претерпевает замедления от сопротивления воздуха. При падении тела, сила тяжести в отдельные равные между собою весьма малые промежутки времени, действуя одинаково, сообщает этому телу равные количества движения [24] и производит равные скорости, следовательно за все время движения она сообщает телу полные количества движения и скорости, пропорциональные времени. Пространства, проходимые в пропорциональные времена, будут относиться, как произведения скорости и времени, т. е. как квадраты времени. Телу, подброшенному вверх (вертикально), тяжесть сообщает равномерно количества движения,[24] пропорциональные времени, и уменьшает скорость также пропорционально времени, так что времена подъема до наибольшей высоты пропорциональны той скорости, которая подлежит уничтожению, самые же эти высоты пропорциональны скорости и времени, т. е. пропорциональны квадрату скорости.

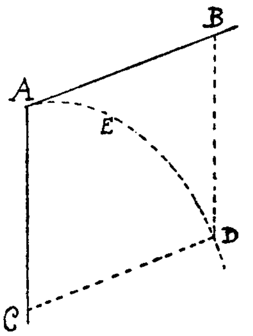
Движение тела, брошенного по какой-нибудь прямой (наклонной к горизонту), слагается из движения по этой прямой, происходящего от начального толчка, и из движения, происходящего от силы тяжести. Так, если бы тело $A$ (фиг. 3) в своем движении только от толчка описало бы в данное время прямолинейный путь $AB$, под влиянием же только силы тяжести, падая вниз, — путь $AC$, то дополнив параллелограмм $ABCD$, получим в точке $D$ место тела в конце рассматриваемого времени. Кривая $AED$, описанная телом, есть касающаяся прямой $AB$ в точке $A$ парабола, ордината коей $BD$ пропорциональна $AB$.[2]

---

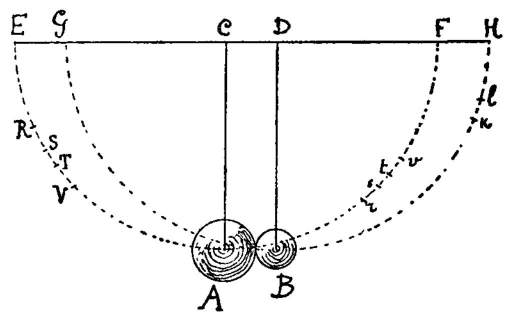
[24] В тексте сказано «vires» — «силы», причем за «силу тела» принимается его количество движения. В переводе употреблен теперешний термин.

От тех же законов и следствий зависят известные свойства времен качаний маятников, которые подтверждаются ежедневным опытом с часами.

Из этих же двух законов и из третьего кавалер *Христофор Врен*, *Iоанн Уаллис* S. T. D. * и *Христиан Гюйгенс*, величайшие геометры нашего времени, вывели законы удара и отражения тел, и почти одновременно сообщили их Королевскому обществу, причем их выводы, во всем касающемся этих законов, между собою согласны. По времени обнародования найденного Уаллис был первым, затем следовал Врен, затем — Гюйгенс. Справедливость этих законов была подтверждена Вреном перед Королевским обществом опытами с маятниками. Эти опыты были затем признаны знаменитым *Мариоттом* достойными быть изложенными в его книге, целиком посвященной




Фиг. 3.




Фиг. 4.

этому предмету. Однако, чтобы результаты таких опытов в точности совпадали с теорией, необходимо принять во внимание как сопротивление воздуха, так и степень упругости соударяющихся тел.

Пусть шары $A$ и $B$ (фиг. 4) подвешены на равных и параллельных нитях $AC$, $BD$ из точек $C$ и $D$. Опишем из этих точек, как из центров, радиусами $BD$ и $AC$ полуокружности $EAF$ и $GBH$. Отклонив тело $A$ до точки $R$ дуги $EAF$ и убрав тело $B$, пускаем $A$ качаться и замечаем ту точку $V$, до которой оно дойдет после одного полного размаха; тогда $RV$ представляет уменьшение величины размаха от сопротивления воздуха. Пусть $ST$ есть четвертая часть $RV$, так расположенная по средине этой дуги, чтобы $RS$ и $TV$ были между собою равны, т. е. чтобы было $RS = TV = \frac{3}{2} ST$, тогда $ST$ представит весьма близко влияние сопротивления воздуха при размахе от $S$ до $A$. Поместим тело $B$ на его место; если тело

* Sacrosanctae Theologiae Doctor — доктор богословия.

$A$ пустить из точки $S$, то можно без чувствительной погрешности принять, что его скорость при ударе в низшем его положении будет такая же, как если бы оно свободно падало в пустоте из точки $T$. Эту скорость можно представить хордой $TA$, ибо известно, что скорость маятника в низшей точке его дуги пропорциональна хорде дуги его падения. Пусть после отражения тело $A$ достигает до точки $\bar{\bar{S}}$ и тело $B$ — до точки $k$. Убрав тело $B$, определяем положение такой точки $v$, из которой если пустить тело $A$, то после полного размаха оно приходит в $r$; если тогда взять $st = \frac{1}{4} rv$ и поместить точки $s$ и $t$ так, чтобы было $rs = tv$, то хорда $tA$ представит ту скорость, которую имеет тело $A$ после отражения, ибо $t$ будет то истинное и исправленное место, до которого могло бы дойти тело $A$ при отсутствии сопротивления воздуха.

Подобным же образом исправляется и место $k$ и находится та точка $l$, до которой дошло бы тело $B$ в пустоте. Производя все испытания таким способом, мы как бы производим их в пустоте. Умножив затем массу тела $A$ (если можно так выразиться) на хорду $TA$, представляющую его скорость, получим его количество движения в точке $A$ перед самым моментом удара. Затем, умножив на $tA$, получим его количество движения после отражения. Точно так же надо массу тела $B$ умножить на хорду $Bl$, чтобы получить его количество движения после отражения. Подобным образом находятся количества движения каждого из двух тел как перед ударом, так и после отражения, и в том случае, когда они одновременно пускаются из разных мест, после чего и можно сравнивать количества движения между собою и выводить последствия удара и отражения.

Производя таким образом испытания над маятниками длиною 10 футов и над массами равными и неравными и пуская тела так, чтобы они встречались, пройдя большие промежутки, напр. 8, 12, 16 футов, я получал с ошибкою, меньшею 3 дюймов, в измерениях, что при прямом ударе между телами изменения их количеств движения были равны и направлены в стороны противоположные, откуда следует, что действие и противодействие между собою равны. Так, напр., если тело $A$ ударяло по покоящемуся телу $B$ с количеством движения, равным девяти частям, и, потеряв семь, продолжало движение с двумя, то тело $B$ отскакивало также с количеством движения, равным семи. Когда тела шли друг другу навстречу, напр. $A$ с количеством движения, равным двенадцати, и $B$ с количеством движения, равным шести, и если после удара $A$ шло в обратную сторону с количеством движения, равным двум, то $B$ шло в обратную сторону с количеством движения, равным восьми, т. е. оба тела, как показывает вычитание, изменяли свое количество движения на четырнадцать частей. В самом деле, если из количества движения $A$ вычесть двенадцать, то останется нуль, по вычете же еще двух получится количество движения, равное двум, направленное в обратную сторону, также по вычете четырнадцати из количества движения тела $B$, равного шести, остается количество движения, равное восьми, направленное в обратную сторону.

То же самое происходит и при движении тел в одну сторону: пусть, напр., тело $A$ идет более быстро и с количеством движения четырнадцать, $B$ — медленнее и с количеством движения, равным пяти; если после удара $A$ продолжает итти с количеством движения пять, то $B$ пойдет с четырнадцатью, получив девять частей от $A$.

Подобное соотношение имеет место и в остальных случаях: полное количество движения, рассчитываемое взяв сумму количеств движения, когда они направлены в одну сторону, и разность, когда они направлены в стороны противоположные, никогда не изменяется от удара при встрече тел.

Ошибки в один или два дюйма при измерениях следует приписать трудности произвести их достаточно точно. Была также трудность и в том, чтобы пустить оба тела так, чтобы они одновременно приходили в низшее свое положение, а также чтобы заметить места $s$ и $k$, до которых тела поднимались после встречи. Неравномерное распределение плотности и неравномерность строения тел, происходящие от случайяых причин, приводят также к погрешностям.

Чтобы опровергнуть возражение против высказанного выше правила, для доказательства которого эти опыты и производились, будто бы оно предполагает, что тела или абсолютно тверды, или вполне упруги, т. е. такие, каких в природе не встречается, добавлю, что описанные опыты удаются как с телами мягкими, так и с жесткими, и совершенно не зависят от степени твердости их. Если это правило прилагать к телам не вполне твердым, то необходимо лишь уменьшать скорость отражения сообразно степени упругости тел.

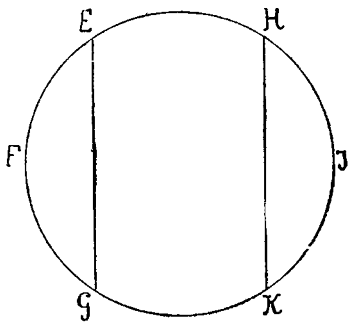
По теории Врена и Гюйгенса, тела абсолютно твердые отскакивают одно от другого со скоростью, равною скорости встречи. Точнее, это следовало бы сказать о телах вполне упругих. В телах не вполне упругих скорость расхождения должна быть уменьшаема соответственно степени упругости. Эта степень упругости (если только тела при ударе не повреждаются или не претерпевают удлинений как бы от ударов молотом) вполне определенная и (как мне кажется) производит то, что тела расходятся с такою относительною скоростью, которая составляет постоянную долю относительной скорости их встречи. Так, я производил следующие опыты над мячами, плотно смотанными из шерсти и сильно затем сбжатыми. Прежде всего, пустив маятники и определив отражение, я определял степень упругости, затем по найденной степени упругости я рассчитывал отражение для других случаев ударов, и оно согласовалось с опытом: мячи всегда отскакивали друг от друга с относительною скоростью, составлявшей от скорости их встречи $\frac{5}{9}$ или около того. Почти с такою же скоростью отскакивали стальные шары, пробковые — с несколько меньшей, для стеклянных это отношение было близко к $\frac{15}{16}$. Таким образом третий закон по отношению к удару и отражению подтверждается теорией, вполне согласующейся с опытом.

Относительно притяжения дело может быть изложено вкратце следующим образом: между двумя взаимно притягивающимися телами надо вообразить помещенным какое-либо препятствие, мешающее их сближению. Если бы одно из тел $A$ притягивалось бы телом $B$ сильнее, нежели тело $B$ притягивается телом $A$, то препятствие испытывало бы со стороны тела $A$ бо́льшее давление, нежели со стороны тела $B$, и следовательно, не осталось бы в равновесии. Преобладающее давление вызвало бы движение системы, состоящей из этих двух тел и препятствия, в сторону тела $B$, и в свободном пространстве эта система, двигаясь ускоренно, ушла бы в бесконечность. Такое заключение нелепо и противоречит первому закону, по которому система должна бы оставаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Отсюда следует, что оба тела давят на препятствие с равными силами, а значит, и притягиваются взаимно с таковыми же.

Я производил подобный опыт с магнитом и железом: если их поместить каждый в отдельный сосуд и пустить плавать на спокойной воде так, чтобы сосуды взаимно касались, то ни тот, ни другой не приходят в движение, но вследствие равенства взаимного притяжения сосуды испытывают равные давления и остаются в равновесии.

Подобным образом и притяжение между Землею и отдельными ее частями взаимно. Вообразим, что Земля рассечена какою-либо плоскостью $EG$ (фиг. 5) на две части $EGF$ и $EGJ$ — притяжения их друг другом будут равны. В самом деле, если отсечь другою плоскостью $HK$, параллельной $EG$, от части $EGJ$ часть $HKJ$, равную $EFG$, то ясно, что средняя часть $EGKH$ не будет испытывать ни от одной из крайних бо́льшего притяжения, нежели от другой, и будет находиться между ними как бы подвешенной, оставаясь в равновесии и покое. Но вся крайняя часть $HKJ$ всем своим весом давит на среднюю $EGHK$ и побуждает ее двигаться в сторону другой крайней $EFG$, следовательно сила, с которою сумма частей $EGHK$ и $HKJ$, т. е. $EGJ$, стремится к $EFG$, равна весу (притяжению) части $HKJ$, т. е. весу части $EFG$, следовательно притяжения друг к другу, т. е. веса частей $GEF$ и $GEJ$ друг на друге, между собою равны, что я и имел в виду показать. Если бы эти веса не были между собою равны, то вся Земля, плавающая в свободном эфире, уступила бы бóльшему весу, и под его действием ушла бы в бесконечность.

Подобно тому как при ударе и отражении тела, коих скорости обратно пропорциональны массам, равнозначущи, так и при движении механических приборов действующие силы, коих скорости, взятые по направлению самих сил (проекции скорости точки приложения каждой силы на направление этой силы), обратно пропорциональны этим силам, равнозначущи между собою, и при стремлении в противоположные стороны взаимно уравновешиваются. Таким образом в стремлении привести в движение коромысло весов равнозначущи грузы, обратно пропорциональные тем направленным прямо вверх или вниз скоростям, кои они получают при качаниях коромысла, т. е. грузы, поднимающиеся или опускающиеся вертикально, равнозначущи, если они обратно пропорциональны расстояниям их точек подвеса от ребра опоры коромысла. Если же эти грузы поднимаются или опускаются по наклонным плоскостям или по иным препятствиям, то они равнозначущи, когда они обратно пропорциональны проекциям подъема или опускания на отвесное направление, т. е. на направление силы тяжести.



Фиг. 5.

Подобно этому в блоке или полиспасте усилие руки, тянущей снасть прямо, удержит прямо или наклонно поднимаемый груз в равновесии, если это усилие будет так относиться к весу груза, как скорость отвесного подъема груза относится к скорости руки, тянущей снасть. В часах и подобных им механизмах, состоящих из сцепленных между собою колес, две силы, взаимно противящиеся, т. е. такие, из коих одна способствует, другая же сопротивляется движению, находятся в равновесии, если эти силы обратно пропорциональны скоростям тех частей колес, к коим они приложены. Сила винта, сжимающего тело, так относится к усилию руки, вращающей рукоятку, как окружная скорость той точки рукоятки, где усилие руки приложено, относится к скорости поступания винта против сжимаемого тела. Силы, с коими клин раздвигает две части раскалываемого дерева, так относятся к силе молота, бьющего по клину, как скорость перемещения клина в направлении действующей от бьющего его молота силы относится к скоростям, с которыми части дерева уступают клину, причем эти скорости надо брать по направлениям, перпендикулярным к щекам клина. Совершенно подобно соотношение между силами и во всякого рода машинах. Действительность и назначение машин в том только и состоит, чтобы уменьшая скорость увеличивать силу и наоборот, ибо во всех подобного рода приборах в сущности решается такая задача: заданнный груз двигать заданною силою или же заданное сопротивление преодолеть заданным усилием.

В самом деле, если машина будет устроена таким образом, чтобы скорости точек приложения движущей силы и сопротивления были обратно пропорциональны этим силам, то движущая сила уравновесит сопротивление, при бо́льшем же отношении скоростей преодолеет его. Если отступление от пропорциональности скоростям будет таково, что будут преодолеваться сопротивления, происходящие от трения соприкасающихся и скользящих друг по другу тел, от сцепления тел непрерывных и разъединяемых и от подъема грузов, то, за выключением всех этих сопротивлений, избыточная сила произведет ускорение, пропорциональное ее величине как в частях машины, так и в сопротивляющемся теле.

Дальнейшее изложение учения о машинах сюда не относится, я хотел лишь показать, сколь далеко простирается и сколь благонадежен третий закон движения. Если действие движущей силы оценивать пропорционально произведению этой силы и скорости и, подобно этому, противодействие сопротивлений оценивать для каждой части в отдельности пропорционально произведению ее скорости и встречаемого ею сопротивления, происходящего от трения, сцепления, веса и ускорения,[25] то во всякой машине действие и противодействие будут постоянно равны, и поскольку действие передается машиною и в конце концов прилагается к сопротивляющемуся телу, то это последнее его значение будет обратно значению противодействия.

---

[25] В этих заключительных словах поучения можно видеть не только начало возможных перемещений, в его всеобъемлющем приложении к учению о равновесии машин, т. е. вообще систем тел с полною связью или одною степенью свободы, но и сущность принципа Даламберта, лишь высказанную в столь сжатой форме, что нужен был гений Лангранжа, чтобы это общее начало выразить одною математическою формулою, включающей в себе всю статику и динамику.

# О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ

## КНИГА ПЕРВАЯ

## ОТДЕЛ I

## О МЕТОДЕ ПЕРВЫХ И ПОСЛЕДНИХ ОТНОШЕНИЙ, ПРИ ПОМОЩИ КОТОРОГО ПОСЛЕДУЮЩЕЕ ДОКАЗЫВАЕТСЯ

### Лемма I

*Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны.*

Если это отрицаешь, то пусть они в пределе будут неравны, и их предельная разность пусть будет $D$, следовательно они не могут ближе подойти к равенству, как до этой заданной разности $D$, в противность предположению.

### Лемма II

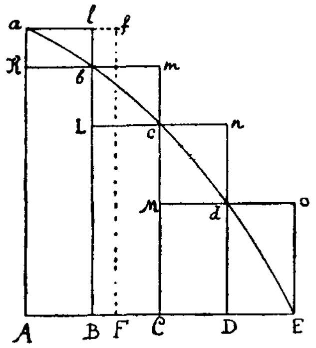
*Если в какую-либо фигуру $AacE$, ограниченную прямыми $Aa$ и $AE$ и кривою $acE$, вписывать любое число параллелограммов $Ab$, $Bc$, $Cd$ и т. д., имеющих равные основания $AB$, $BC$, $CD$ и т. д. и стороны $Bb$, $Cc$, $Dd$ и т. д., параллельные стороне $Aa$ фигуры, и дополнить параллелограммы $aKbl$, $blcm$, $cMdm$ и т. д., затем, уменьшая ширину этих параллелограммов, увеличивать их число до бесконечности, то я утверждаю, что в пределе отношения вписанной фигуры $AKbLcMdD$, описанной $AalbmcndoE$ и криволинейной $AabcdE$ друг к другу равны единице.* [26]

[26] Предельные отношения Ньютон называет или «primae rationes», т. е. «первые отношения», или «ultimae rationes», т. е. «последние отношения», причем первым термином он пользуется при определении предела отношения двух бесконечно малых величин: «зарождающихся» — «nascentium» или «исчезающих» — «evanescentium». Второй термин применяется безразлично как для предела отношения величин конечных, так и бесконечно малых. Когда две величины в пределе равны, т. е. когда их отношение в пределе равно единице, то употребляется термин «sunt ultimo aequales», т. е. «наконец равны», или «ultimae rationes sunt rationes aequalitatis», т. е. «последние отношения суть отношения равенства». В переводе все эти термины заменены употребляемыми теперь словами «предельное отношение» или «предел отношения». Переменные величины вообще Ньютон называет или «неопределенными» — «indeterminatae», или «текущими» — «fluentes», величины постоянные всегда называет «заданными» или «данными» — «datae». В переводе этот термин во многих местах сохранен.

Разность вписанной и описанной фигуры есть сумма параллелограммов $Kl$, $Lm$, $Mn$,... (фиг. 6), которая (вследствие равенства всех оснований) равна прямоугольнику, построенному на одном из оснований $Kb$, и сумме высот $Aa$, т. е. прямоугольнику $ABla$. Но этот прямоугольник, так как его ширина $AB$ уменьшается бесконечно, может быть сделан менее любой заданной величины. Следовательно (по лем. I), в пределе фигура вписанная, фигура описанная и тем паче заключающаяся между ними криволинейная будут между собою равны.

## Лемма III

*Предельные отношения тех же сумм параллелограммов равны единице и в том случае, когда ширины их $AB$, $BC$, $CD$,... не равны между собою, но все уменьшаются бесконечно.*




Фиг. 6.

Пусть $AF$ равно наибольшей из ширин $l$ и на ней построен параллелограмм $AFaf$. Этот параллелограмм будет больше разности фигуры вписанной и фигуры описанной; при бесконечном же уменьшении ширины его, площадь может быть сделана менее площади любого заданного прямоугольника.

*Следствие 1.* Таким образом в пределе сумма этих исчезающих параллелограммов вполне совпадает с площадью криволинейной фигуры.

*Следствие 2.* В еще бо́льшей мере прямолинейная фигура, ограниченная хордами дуг $ab$, $bc$, $cd$ и т. д., совпадает с криволинейною фигурою.

*Следствие 3.* То же самое относится и к описанной прямолинейной фигуре, ограниченной касательными к сказанным дугам.

*Следствие 4.* Поэтому эти две последние фигуры (по отношению к периметру $acE$) в пределе не суть прямолинейные, но составляют криволинейный предел прямолинейных фигур.

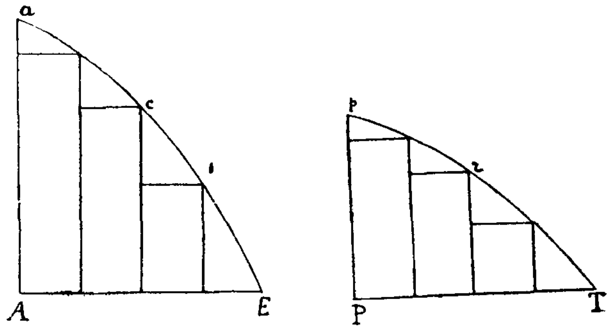
## Лемма IV

*Если в каждую из двух фигур $AacE$ и $PprT$ вписать (как указано выше) ряд параллелограммов так, что число их то же самое, и если при бесконечном уменьшении ширин пределы отношений площадей параллелограммов одной фигуры к параллелограммам другой, каждого к ему соот-*

*ветствующему, между собою равны, то я утверждаю, что и самые фигуры AacE и PprT находятся в том же отношении.*

В самом деле, в каком отношении находится каждый из параллелограммов одной фигуры (фиг. 7) к ему соответствующему другой, в том же отношении друг к другу находятся и суммы всех их, т. е. площадь одной фигуры к площади другой, ибо по лемме III пределы отношений площади первой фигуры к первой сумме и площади второй ко второй сумме равны единице.

*Следствие.* Совершенно так же докажется, что если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей




Фиг. 7.

и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, т. е. первой к первой, второй ко второй и т. д., остается постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении. Ибо, если в относящихся к этой лемме фигурах взять параллелограммы так, чтобы они были пропорциональны сказанным частям, то суммы частей будут относиться между собою, как суммы параллелограммов, и следовательно, когда число частей и число параллелограммов будет бесконечно возрастать, а самые части уменьшаться, то предельное отношение сумм частей будет оставаться равным предельному отношению сумм параллелограммов, это же отношение равно отношению каждого параллелограмма, к ему соответствующему, т. е. (по предположению) пределу отношения части к части.[27]

---

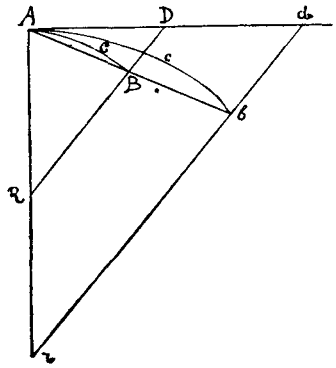
[27] Эта лемма и ее следствие, составляющие в теперешнем изложении основную теорему интегрального исчисления, постоянно применяются в «Началах», в которых аналитический процесс интегрирования заменяется часто сопоставлением той кривой, коей площадь ищется, с другой известной кривой так, чтобы площади соответствующих параллелограммов (элементы интеграла) находились в постоянном отношении. Аналитически этот процесс равносилен интегрированию при помощи подстановки.

### Лемма V

*У подобных фигур длины соответствующих сторон, как прямолинейные, так и криволинейные, между собою пропорциональны, площади же фигур пропорциональны квадратам сторон.*

### Лемма VI

*Если какая угодно заданная по положению дуга $ACB$ стягивается хордою $AB$, и в какой-либо ее точке $A$, лежащей в области непрерывной кривизны, проведена касательная $AD$, продолженная в обе стороны, и если точки $A$ и $B$ приближаются друг к другу и совпадают, то я утверждаю, что угол $BAD$, заключенный между хордою и касательной, уменьшается бесконечно и в пределе исчезает.*



Фиг. 8.

Ибо, если бы этот угол не исчезал, то между дугою $ACB$ и касательной $AD$ заключался бы угол, равный некоторому данному прямолинейному углу (т. е. конечной величины), и следовательно, кривизна в точке $A$ не была бы непрерывною, в противность предположению (фиг. 8).

### Лемма VII

*При тех же предположениях я утверждаю, что предельное отношение дуги, хорды и касательной друг к другу равно единице.*

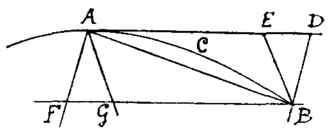
Когда точка $B$ приближается к $A$ (фиг. 8), то $AB$ и $AD$ следует рассматривать продолженными до постоянной прямой $bd$, параллельно которой и проводится секущая $BD$.

Пусть дуга $Acb$ подобна дуге $ACB$ при всяком положении точки $B$. При совмещении точек $A$ и $B$, угол $dAb$, по предыдущей лемме, исчезает, следовательно остающиеся постоянно конечными прямые $Ab$ и $Ad$ и промежуточная дуга $Acb$ совпадают, и поэтому равны между собою, значит и постоянно им пропорциональные прямые $AB$, $AD$ и промежуточная дуга $ACB$, исчезающие в пределе, будут иметь своим предельным отношением единицу.

*Следствие 1.* Если через точку $B$ провести прямую $BF$ (фиг. 9) параллельно касательной, пересекающую какую-либо прямую $AF$, проведенную через $A$ в точке $F$, то предельное отношение длины $BF$ к исчезающей дуге $ACB$ равно единице, ибо дополнив параллелограммы $AFBD$, видим, что $BF$ постоянно равно $AD$.

*Следствие 2.* Если через точки $A$ и $B$ проводить различные прямые $BE$, $BD$, $AF$, $AG$, пересекающие касательную $AD$ и параллельную ей $BF$, то предельное отношение всех отрезков $AD$, $AE$, $BF$, $BG$, хорды $AB$ и дуги $AB$ друг к другу равно единице.

*Следствие 3.* В виду этого все эти длины, при всяком рассуждении о пределах отношений, могут быть взяты одна вместо другой.




Фиг. 9.

### Лемма VIII

*Если задана прямая $AR$ и направление прямой $BR$, то хорда $AB$, дуга $ACB$ и касательная $AD$ образуют с прямыми $AR$ и $BR$ три треугольника $RAB$, $RACB$, $RAD$; если затем точка $B$ будет приближаться к $A$ и совпадет с нею, то я утверждаю, что в пределе эти три исчезающие треугольника между собою равны и предельное отношение их площадей равно единице.*

Ибо, когда точка $B$ приближается к $A$ (фиг. 8), то надо рассматривать, что прямые $AB$, $AD$ и $AR$ продолжены до встречи с постоянною прямою $rbd$, параллельно которой и проводится $RD$, дуге же $ACB$ строится подобная дуга $Acb$. Когда точки $A$ и $B$ совпадают, то угол $bAd$ исчезает, и следовательно, три остающихся постоянно конечными треугольника $rAb$, $rAcb$, $rAd$ совпадают, в виду чего они подобны и равны. Поэтому и постоянно им подобные треугольники $RAB$, $RACB$, $RAD$ будут в пределе между собою равны и подобны.

*Следствие.* Следовательно, во всех рассуждениях о пределе отношений эти треугольники могут быть взяты один на место другого.

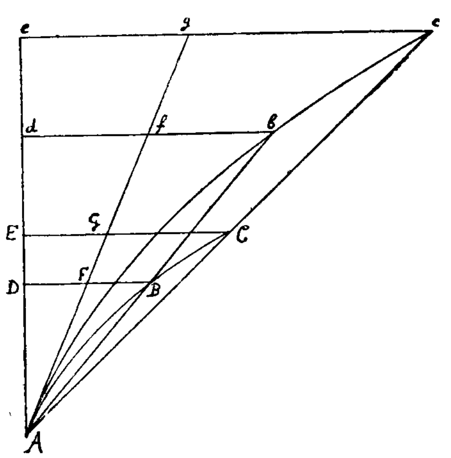
### Лемма IX

*Если заданные по положению прямая $AE$ и кривая $ABC$ пересекаются под данным углом $A$, и от прямой $AE$ проводятся внутри этого угла ординаты $BD$, $CE$, пересекающие кривую в точках $D$ и $C$, и точки $B$ и $C$ совместно приближаются к $A$, то я утверждаю, что площади треугольников $ABD$ и $ACE$ будут в пределе относиться друг к другу, как квадраты сторон.*

Как и в предыдущем, надо подразумевать, что когда точки $B$ и $C$ (фиг. 10) приближаются к $A$, то $AD$ продолжается до заданных прямых $db$ и $ec$, параллельных ординатам $DB$ и $EC$ и проведенных так, чтобы постоянно было

$$AD : AE = Ad : Ae.$$

До встречи с этими же прямыми в точках $b$ и $c$ продолжаются и хорды $AB$ и $AC$. Проводим кривую $Abc$, подобную $ABC$ и касательную $Ag$ к обеим кривым в точке $A$. Пусть эта касательная пересекает ординаты в точках $F$, $G$, $f$, $g$. Сохраняя затем длину $Ae$ неизменной, приближаем точки $B$ и $C$ к точке $A$ до совмещения с нею. Так как в пределе угол $cAg$ исчезает, то криволинейные площади $Abd$, $Ace$ совпадут с прямолинейными $Afd$, $Age$, следовательно (по лем. V) они будут относиться, как квадраты сторон $Ad$ и $Ae$. Но этим площадям постоянно пропорциональны площади $ABD$, $ACE$, и стороны их $AD$ и $AE$ пропорциональны сторонам $Ad$ и $Ae$, следовательно и площади $ABD$ и $ACE$ будут в пределе относиться между собою, как квадраты сторон $AD$ и $AE$.




Фиг. 10.

### Лемма X

*Пространства, описываемые телом, находящимся под действием какой-либо конечной силы, будет ли эта сила постоянная, или же она будет непрерывно увеличиваться или уменьшаться, при самом начале движения пропорциональны квадратам времен их описания.*

Пусть времена представляются длинами $AD$, $AE$ (фиг. 10), скорости, производимые силою, — ординатами $BD$, $EC$, тогда пространства будут пропорциональны площадям $ABD$, $ACE$, описанным этими ординатами, т. е. при самом начале движения, по лемме IX, они пропорциональны квадратам $AD$ и $AE$.

*Следствие 1.* Отсюда легко заключить, что когда тела описывают подобные части подобных фигур, то отклонения, производимые действием каких бы то ни было равных сил, вновь подобным образом приложенных к телам, приблизительно пропорциональны квадратам времени; при этом эти отклонения надо измерять от тех мест, в которые сказанные тела пришли бы в течение рассматриваемых промежутков времени без действия этих новых сил.

*Следствие 2.* Отклонения, производимые при вышесказанных условиях различными силами, пропорциональны этим силам и квадратам времени.

*Следствие 3.* То же самое относится и до пространств, описываемых телами под действием различных сил: в самом начале движения эти пространства также пропорциональны силам и квадратам времени.

*Следствие 4.* Следовательно, силы прямо пропорциональны пространствам при самом начале движения и обратно пропорциональны квадратам времени их описания.

*Следствие 5.* Квадраты времени прямо пропорциональны пройденным пространствам и обратно пропорциональны силам.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Если разного рода переменные величины сравниваются между собою и про которую-нибудь из них говорят, что она прямо или обратно пропорциональна[28] другой, то смысл этого выражения тот, что первая величина

---

[28] При изложении «Начал», Ньютон, как уже сказано, избегает пользования алгеброй, а всецело придерживается образца древних авторов Эвклида и Аполлония, пользуясь постоянно пропорциями. В этом поучении он поясняет понятие о прямой и обратной пропорциональности. Это сделано, повидимому, потому, что в книге V «Элементов» Эвклида, где излагается учение о пропорциях между *величинами* (не числовыми их мерами), рассматривается пропорциональность четырех величин (опред. 6). Необходимо также при чтении подлинника иметь в виду следующие термины, определения которых приведены у Эвклида (опред. 13—17) и которыми Ньютон постоянно пользуется. Эти термины относятся к классификации так называемых теперь производных пропорций. Эти термины следующие: пусть дана пропорция

$$a : b = c : d.$$

Тогда будет:

| | |
|---|---|
| Permutando или alternando . . . | $a : c = b : d$ |
| Invertendo . . . . . . . . . . | $b : a = d : c$ |
| Componendo . . . . . . . . . . | $(a + b) : b = (c + d) : d$ |
| Dividendo или divisim . . . . . | $(a - b) : b = (c - d) : d$ |
| Convertendo . . . . . . . . . . | $a : (a - b) = c : (c - d)$ |
| Mixtim . . . . . . . . . . . . | $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$ |

В то время на классификацию и терминологию обращалось большое внимание, и напр., Wallis в своей «Алгебре», изданной в 1685 г., т. е. за год до «Principia», из предложенной пропорции выводит 52 с нею связанных и придает им названия, состоящие из сочетаний предыдущих терминов.

Ньютон также весьма строго придерживается этой терминологии, и если у него встречается пропорция

$$a : b = c : d,$$

увеличивается или уменьшается в том же самом отношении, как вторая или как величина ей обратная.

Если же про которую-нибудь из этих величин сказано, что она прямо или обратно пропорциональна двум или нескольким другим, то смысл этого выражения тот, что первая или увеличивается, или уменьшается, в отношении, равном произведению отношений, в которых прочие или им обратные увеличиваются или уменьшаются.

Так, если сказано, что $A$ прямо пропорционально $B$ и $C$ и обратно пропорционально $D$, то смысл этого тот, что $A$ увеличивается или уменьшается в том же отношении, как $B \cdot C \cdot \frac{1}{D}$, т. е. что величины $A$ и $\frac{BC}{D}$ находятся друг к другу в постоянном отношении.

## Лемма XI

*Расстояние от конца дуги до касательной, проведенной в ее начале, при бесконечном уменьшении дуги для всех кривых, коих кривизна в точке касания конечная, пропорционально в пределе квадрату ее хорды.*

*Случай 1.* Пусть $AB$ (фиг. 11) — рассматриваемая дуга, $AD$ — ее касательная в начале, $BD$ — расстояние точки $B$ до касательной. Проведем к касательной $AD$ и к хорде $AB$ перпендикуляры $AG$ и $BG$, пересекающиеся в $G$, пусть затем точки $B$, $D$, $G$ перешли в $b$, $d$, $g$; и пусть, наконец, $J$ есть предельное положение точки $G$ — пересечения прямых $AG$ и $BG$, когда точки $B$ и $D$ сольются с $A$.

Очевидно, что расстояние $GJ$ может быть сделано меньше всякой наперед назначенной величины.

---

то он не иначе напишет пропорцию

$$(a - b) : b = (c - d) : d,$$

как предпослав слово divisim.

Так как эта классификация почти утратилась, то в переводе эти термины по большей части опущены, но при чтении подлинника надо их иметь в виду, особенно неудачный термин «divisim» или «dividendo».

Вообще Ньютон пропорций в том виде, как теперь, не пишет, всякую линию обыкновенно обозначает двумя буквами и отдельные величины большими — буквами.

Пропорции пишутся словами так:

$$A \text{ est ad } B \text{ ut } C \text{ est ad } D$$

что равносильно нашему

$$A : B = C : D$$

или

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

В переводе, для наглядности, слова заменены знаками и принято обычное теперь обозначение.

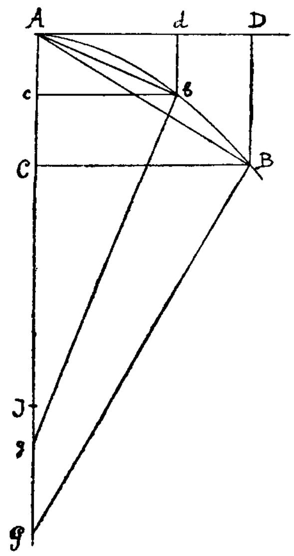
По свойству кругов, проходящих через точки $A$, $B$, $G$ и $A$, $b$, $g$, будет

$$AB^2 = AG \cdot BD \quad \text{и} \quad Ab^2 = Ag \cdot bd$$

следовательно

$$\frac{AB^2}{Ab^2} = \frac{AG}{Ag} \cdot \frac{BD}{bd}.$$

Но так как $GJ$ может быть сделано меньше всякой наперед заданной величины, то можно сделать так, что отношение $\frac{AG}{Ag}$ будет отличаться от единицы менее, чем на любую заданную величину, следовательно и отношение $\frac{AB^2}{Ab^2}$ будет отличаться от $\frac{BD}{bd}$ менее, чем на любую заданную величину, и значит, по лемме I, пределы отношений $\frac{AB^2}{ab^2}$ и $\frac{BD}{bd}$ равны.




Фиг. 11.

*Случай 2.* Положим теперь, что $BD$ наклонено к $AD$ под каким-либо постоянным углом, отношение $BD$ к $bd$ будет в пределе то же самое, т. е. равно пределу отношения $AB^2$ к $Ab^2$.

*Случай 3.* Наконец, в том случае, когда угол $D$ — переменный, но прямая $BD$ или проходит через постоянную точку, или строится по какому-либо определенному закону, то углы $D$ и $d$, строимые также по одному и тому же закону, при приближении точек $B$ и $D$ к точке $A$ стремятся к равенству, и так как разность их может быть сделана меньше любой наперед назначенной величины, то эти углы в пределе равны; и следовательно, длины $BD$ и $bd$ будут находиться попрежнему в том же отношении, как квадраты хорд.

*Следствие 1.* Так как тангенсы[29] $AD$ и $Ad$ дуги $AB$ и $Ab$ и их синусы $BC$ и $bc$ в пределе равны хордам $AB$ и $Ab$, то предельное отношение их квадратов равно отношению затяжек $BD$ и $bd$.

---

[29] Отрезкам $AD$, $Ad$, $BC$ и $bc$приданы назнания «тангенсы» и «синусы», которые бы им принадлежали, если бы кривая $AB$ была заменена дугою круга, описанною на диаметре $AG$, и дуга кривой $Ab$ — дугою круга, описанною на диаметре $Ag$, но ясно, что эт[illegible] [illegible]рмины введены лишь для краткости речи и высказанное свойство принадлежит всякой кривой [illegible]жкой точке, где кривизна — *конечная*, т. е. где длина $AJ$ — конечная и положеиие точки $J$ — конца

*Следствие 2.* Предельное отношение квадратов хорд и прочих упомянутых выше длин равно отношению стрелок, разделяющих хорды дуг пополам и проходящих по продолжению через постоянную точку, ибо эти стрелки пропорциональны затяжкам $BD$ и $bd$.

*Следствие 3.* Поэтому стрелки пропорциональны квадратам времен описания их дуг телами, движущимися с постоянною скоростью.

*Следствие 4.* Площади прямолинейных треугольников $Adb$, $ADB$ в пределе находятся в отношении кубов[30] сторон $AD$ и $Ad$ или в отношении $\left(\frac{DB}{db}\right)^{\frac{3}{2}}$, ибо отношение этих площадей равно произведению отношений[31]

$$\frac{AB}{Ab}\cdot\frac{BD}{bd}.$$

Точно так же и треугольники $ABC$ и $Abc$ в пределе относятся, как кубы сторон $BC$ и $bc$.

*Следствие 5.* Так как в пределе $DB$ и $db$ параллельны и длины их пропорциональны квадратам абсцисс $Ad$ и $AD$, то в пределе криволинейные площади $ADB$ и $AdB$ (по свойству параболы) составляют по две трети площадей треугольников $ADB$ и $Adb$, сегмент же $AB$ и $Ab$ — по одной трети тех же площадей, следовательно эти сегменты пропорциональны кубам касательных, хорд и дуг $AB$ и $Ab$.

---

диаметра круга кривизны — определенное. Все это затем подробно оговаривается в поучении в конце отдела.

Отрезок $BD$, заключенный между концом дуги и касательной, проведенной в ее начале, назван: «Subtensa anguli contactus», т. е. «затяжка угла соприкосновения» или «угла касания». Об угле касания см. примечание 32.

[30] Когда величины

$$a : b = c^2 : d^2,$$

то по старинной терминологии говорилось, что $a$ находится к $b$ *«в удвоенном отношении с к d»*; если

$$a : b = c^3 : d^3$$

то говорилось: «в утроенном отношении $c$ к $d$»; если

$$a : b = c^{\frac{1}{2}} : d^{\frac{1}{2}},$$

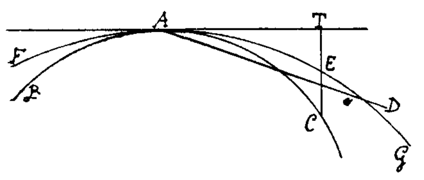
то — в «половинном отношении» и т. п. Все эти выражения, как не употребляемые теперь и могущие лишь искажать истинный смысл, заменены современными; поэтому выпущены и заключительные слова этого следствия: «полуторным отношением я называю отношение половинное от утроенного, т. е. отношение, составленное из простого и половинного». Составным или сложным отношением называлось произведение двух отношений.

[31] Как уже сказано, в «Началах» везде применяется эвклидова терминология и эвклидовы, а не теперешние, представления.

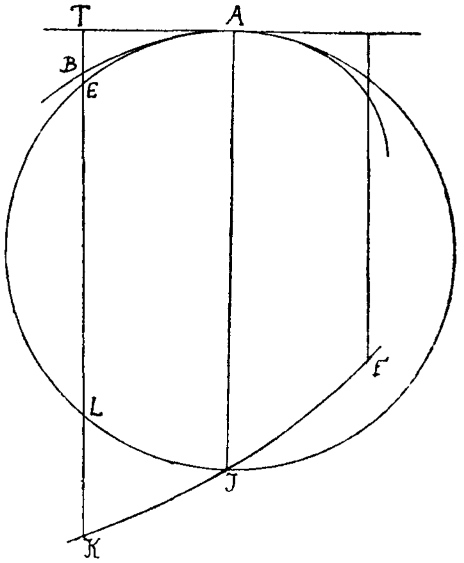
### *ПОУЧЕНИЕ*

Во всех предыдущих выводах предполагалось, что «угол касания или соприкосновения»[82] не бесконечно велик и не бесконечно мал по сравнению

[82] «Угол соприкосновения» или «угол касания» (angulus contactus), о котором идет речь в лемме XI и в этом поучении, есть такой термин, который в науке не удержался, хотя дальнейшее развитие данного Ньютоном способа для точного суждения об этом элементе послужило основанием учению о соприкосновении вообще. Вопрос об «угле касания» возник по поводу толкования предложения 16-го III книги «Элементов» Эвклида, в котором сказано: «Прямая, проведенная под прямым углом к диаметру круга в конце этого диаметра, лежит вне круга, и в пространство между этою прямою и окружностью никакая другая прямая не укладывается, или, что то же самое, окружность круга проходит между прямою, перпендикулярной к диаметру, и прямою, которая составляет с диаметром острый угол сколь угодно большой или же которая составляет с перпендикуляром к диаметру угол сколь угодно малый». Теорема эта устанавливает, как видно, что под каким бы малым углом $DAT$ (фиг. 12a)




Фиг. 12a.




Фиг. 12b.

к перпендикуляру к диаметру $AT$ ни проводить прямую, то всегда найдутся такие части этой прямой, которые лежат внутри окружности. Возникал вопрос, какой смысл придавать понятию об «угле между касательной $AT$ и дугою $BAC$», причем не давалось точного определения, что такое под этим углом разумеют. При отсутствии такого определения появились вопросы вроде следующего: одинаковы ли углы касания для дуги $FAG$ и для дуги $BAC$, радиусы коих не равны, не составляет ли один из этих углов *части* другого, а если он есть часть другого, то значит оба они не нули (эвклидово: «точка есть то, чего часть ничто»). С другой стороны каждый из этих углов *меньше* всякого сколь угодно малого прямолинейного угла, следовательно он нуль и т. д. По этому поводу возникла полемика, и Wallis'ом был издан обширный трактат «De angulo contactus et angulo semicirculi», занимающий 60 стр. in folio мелкой печати в Собрании его сочинений.

Ньютон, указав, что для суждения о более или менее «тесном» касании кривых с прямою или между собою в данной точке надо рассматривать ординаты $CT$ и $ET$ и их разность $CE$ (фиг. 12a) и обращать главное внимание на *порядок* этих бесконечно малых относительно бесконечно малой $AT$, тем самым обосновал как учение о соприкосновении, так и о различных порядках бесконечно малых величин.

Самое учение о кривизне излагалось им несколько иначе, чем теперь. Обобщая эвклидовское определение касательной, круг кривизны в данной точке кривой определялся как с углом касания круга со своими касательными, т. е. что кривизна кривой в точке $A$ не бесконечно малая и не бесконечно большая, иначе — что длина $AJ$ конечная. Действительно, можно взять кривую, у которой $DB$ пропорционально $AD^3$; в таком случае через точку $A$ нельзя провести круга между кривою и касательной, ибо угол касания для этой кривой в этой точке бесконечно мал по сравнению с углом касания для круга. По подобной же причине, если $DB$ будет пропорционально $AD^4$, $AD^5$, $AD^6$, $AD^7$ и т. д., то получится беспредельный ряд таких углов касания, из которых каждый последующий бесконечно мал по отношению к предыдущим. Точно так же, если $DB$ будет пропорционально $AD^2$, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$ и т. д., то получится другой беспредельный ряд углов касания, из которых первый такого же рода, как у круга, второй бесконечно больше и, вообще, всякий последующий бесконечно больше предыдущих. Но и между любыми двумя из этих углов соприкосновения можно включить беспредельный ряд других, из коих каждый последующий будет или бесконечно больше, или бесконечно меньше, предыдущего. Так, между $AD^2$ и $AD^3$ можно включить ряд

$$AD^{\frac{13}{6}},\ AD^{\frac{11}{5}},\ AD^{\frac{9}{4}},\ AD^{\frac{7}{3}},\ AD^{\frac{5}{2}},\ AD^{\frac{8}{3}}\ \ AD^{\frac{14}{5}},\ AD^{\frac{17}{6}}$$

и т. д. Далее между любыми двумя членами этого ряда можно включить новый ряд промежуточных углов, бесконечно различных между собою. Природа не терпит ограничений.

Доказанное относительно кривых линий и ограниченных ими площадей легко прилагается к кривым поверхностям и объемам.

Предыдущие леммы приведены, чтобы избежать утомительности длинных доказательств, основываясь по образцу древних на приведении к нелепости.

---

такой круг, между которым и данною кривою в смежности с этою точкою нельзя провести никакого другого круга. Пусть $AT$ (фиг. 12b) есть касательная, $AJ$ — нормаль, прямая $TK$ — параллельная нормали. Строим кривую $KJF$ так, чтобы было

$$TB \cdot TK = AT^2.$$

Предельное положение $J$ точки $K$ и есть конец диаметра круга кривизны, по кривой же $KJF$ можно судить о «качестве кривизны» — «qualitas curvaturae», т. е. об изменении кривизны в смежности с точкой $A$. Пусть $AEJ$ есть круг, описанный на $AJ$ как диаметре, и положим, что кривая $KJ$ вне круга; тогда будет для круга:

$$TE \cdot TL = AT^2,$$

но $TL < TK$, значит $TE > TB$, т. е. точка $B$ вне круга.

Если бы кривая $KJ$ была внутри круга, то ясно, что $TE$ было бы меньше $TB$. Очевидно теперь, что проведя круг иного диаметра, нежели $AJ$, мы увидим, что ни одна из точек этого круга не может лежать между кривою и кругом $AEJ$. В «Началах» мера «угла касания» упоминается при изложении примера 1 предложения X второй книги.

Доказательства делаются более краткими и при помощи способа неделимых, но так как самое представление неделимых грубовато (durior), то этот способ представляется менее геометричным, почему я и предпочел сводить доказательства всего последующего к пределам сумм исчезающих количеств и к пределам их отношений; поэтому я и предпослал сколь можно краткие доказательства свойств этих пределов. Способом пределов достигается то же, что и способом неделимых, и после того как его основания доказаны, мы можем им пользоваться с еще бо́льшею уверенностью. Поэтому, если во всем последующем изложении я и рассматриваю какие-либо величины как бы состоящими из постоянных частиц, или если я принимаю за прямые линии весьма малые части кривых, то следует разуметь, что это — не неделимые, а исчезающие делимые величины, что это — не суммы и не отношения определенных конечных частей, а пределы сумм и пределы отношений исчезающих величин, и сущность этих доказательств в том и состоит, чтобы все приводить к предыдущим леммам.

Делают возражение, что для исчезающих количеств не существует «предельного отношения», ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчезания нет никакого отношения. Но при таком и столь же натянутом рассуждении окажется, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, не может быть «предельной» скорости, ибо та скорость, которую тело имеет ранее, нежели оно достигло этого места, не есть «предельная», когда же достигло, то нет скорости. Ответ простой: под «предельною» скоростью надо разуметь ту, с которою тело движется не перед тем как достигнуть крайнего места, где движение прекращается и не после того, а когда достигает, т. е. именно ту скорость, обладая которою тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается. Подобно этому под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем как они исчезают и не после того, но при котором исчезают. Точно так же и предельное отношение зарождающихся количеств есть именно то, с которым они зарождаются. Предельная сумма зарождающихся или исчезающих количеств есть та составленная из них сумма, когда они, увеличиваясь или уменьшаясь, только начинают или прекращают быть. Существует такой предел, которого скорость в конце движения может достигнуть, но не может превзойти, это и есть предельная скорость. Такова же причина существования предела отношения зарождающихся или исчезающих количеств и пропорций. Когда такой предел существует и величина его вполне определенная, то его нахождение есть задача истинно геометрическая.

Все же геометрическое может быть законным образом применяемо при геометрических изысканиях и доказательствах.

Можно возразить, что если существуют предельные отношения исчезающих количеств, то существуют и предельные величины их самих, и следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, что опровергнуто Эвклидом в книге X «Элементов», в учении о несоизмеримых величинах. На самом же деле это возражение основано на неверном допущении.

Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их и к которым эти отношения могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых превзойти или достигнуть на самом деле не могут, ранее чем эти количества уменьшатся бесконечно. Дело объясняется проще на бесконечно больших величинах. Если две величины, разность которых задана, будут обе увеличиваться до бесконечности, то между ними существует предельное отношение, которое равно единице, однако нет предельных значений для самих величин, т. е. таких наибольших их значений, отношение которых как раз было бы равно единице. Поэтому, если в последующем для простоты речи я буду говорить о величинах весьма малых, или исчезающих, или зарождающихся, то не следует под этими словами разуметь количества определенной величины, но надо их рассматривать как уменьшающиеся бесконечно.[33]

---

[33] В этом отделе изожены те основные теоремы о пределах и бесконечно малых, которые *являются главнейшими при всякого рода геометрических приложениях. Примеры таких приложений* можно найти в томе I сочинения Бертрана — «Traité de calcul différentiel et de calcul intégral».

В «Principia», в отделе II второй книги, даны в самом кратком виде начала исчисления флюксий, т. е. по современной терминологии производных В Введении к трактату «О квадратуре кривых», изданному в 1704 г., Ньютон излагает сущиость метода флюксий. Так как ознакомление с воззрениями Ньютона может способствовать правильности понимаиия некоторых мест в «Началах», то и приводится перевод этого Введения.

«Я рассматриваю здесь математические количества не как состоящие из очень малых постояиных частей а как производимые непрерывным движением. Линии описываются, и по мере описания образуются не приложением частей, а непрерывным движением точек, поверхности — движением линий, объемы — движением поверхностей, углы — вращением сторон, времеиа — непрерывным течением и т. ц.

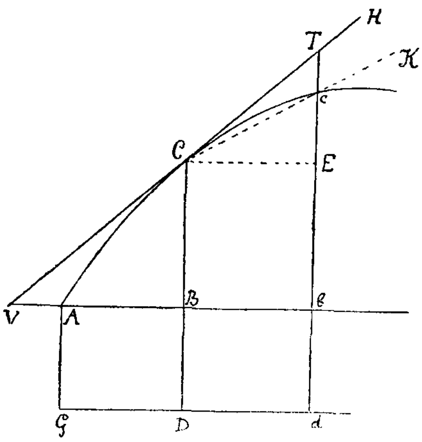
«Такое происхождеиие имеет место и на самом деле и в самой природе вещей, и наблюдается ежедневно при движении тел. Подобным образом древние объясняли происхождение прямоугольников, ведя подвижиые прямые линии по неподвижным.

«Замечая, что нарастающие количества, образующиеся по мере нарастания в равные времена, сообразно большей или меньшей скорости их нарастания, оказываются бо́льшими или меньшими, я изыскивал способы определеиия самих количеств по той скорости движения или нарастания, с которою они образуются.

«Назвав скорости этих движений или нарастаний *флюксиями*, образуемые же количества *флюентами*, я постепенно пришел около 1665 и 1666 гг. к методу флюксий, который я прилагаю здесь к квадратуре кривых.

«Флюксии приблизительно пропорциональны приращениям флюент, образующимся в равные весьма малые промежутки времени, или, точнее говоря, находятся в предельном отношении зарождающихся приращений и могут быть представлены какими угодно линиями, этим приращениям пропорциональными. Так, если площади $ABC$ (фиг. 12с), $ABDG$ описываются ординатами $BC$ и $BD$, движущимися равномерно по основанию $AB$, то флюксии этих площадей относятся друг к другу, как описывающие ординаты $BC$ и $BD$, и могут быть представлены этими ординатами, ибо зарождающиеся приращения площадей пропорциональны этим ординатам.

«Пусть ордината $BC$ из своего положения $BC$ перешла в какое-нибудь положение $bc$. Дополнив параллелограмм $BCEb$, проводим прямую $VTH$, касающуюся кривой в точке $C$ и пересекающую продолженные $BA$ и $Bc$ в $V$ и $T$; тогда приращения абсциссы $AB$, ординаты $BC$ и длины дуги кривой $ACc$, при этом образовавшиеся, суть $Bb$, $Ec$, $Cc$; стороны треугольника $ECT$ находятся в предельном (первом) отношении этих зарождающихся приращений, следовательно флюксии самих $AB$, $BC$ и $AC$ пропорциональны сторонам $CE$, $ET$ и $TC$ треугольника $CET$, которыми они и могут быть представлены, или, что то же самое, — сторонами треугольника $VBC$, ему подобного.




Фиг 12с.

«То же самое получится, если принять флюксии в предельном (последнем) отношении исчезающих частей. Проведем прямую $Cc$ и продолжим ее до $K$; когда ордината $bc$ будет возвращаться к своему первоначальному положению $BC$ и когда точки $c$ и $C$ сольются, то прямая $CK$ совпадет с касательной $CH$, и исчезающий треугольник $CEc$ в предельном (последнем) своем виде станет подобным треугольнику $CET$, и его исчезающие стороны будут в пределе относиться друг к другу, как стороны $CE$, $ET$, $TC$ треугольника $CET$; следовательно, в том же отношении находятся и флюксии линий $AB$, $BC$ и $AC$. Если же точки $C$ и $c$ находятся в каком-нибудь малом удалении друг от друга, то и прямая $CK$ будет находиться в некотором небольшом удалении от касательной. Чтобы прямая $CK$ совпадала с касательной $CH$ и чтобы получились предельные (последние) отношения линий $CE$, $Ec$ и $cC$, точки $C$ и $c$ должны сойтись и совпасть вполне. В математических вопросах нельзя пренебрегать даже самыми малыми погрешностями.

«На основании подобного же рассуждения, если равномерно продвигать круг, описанный из точки $B$, как центра, радиусом $BC$ так, чтобы он оставался перпендикулярным к $AB$, то флюксия образуемого объема $ABC$ будет пропорциональна площади производящего круга, и флюксия образуемой поверхности пропорциональна окружности производящего круга и флюксии длины дуги кривой $AC$ (т. е. их произведению). Ибо в то время как объем образуется ведя круг по абсциссе $AB$, сказанная поверхность образуется ведя окружность этого круга по длине кривой $AC$.

«Вот еще два примера этого способа.

«I. *Прямая $PB$ вращается около заданного полюса $P$ и пересекает другую заданную по положению прямую $AB$; требуется найти отношение флюксий прямых $AB$ и $PB$.*

«Пусть прямая $PB$ (фиг. 12d) перешла из своего положения $PB$ в новое положение $Pb$. Отложив по $Pb$ длину, равную $PB$, проводим к $AB$ прямую $PD$ под таким углом $bPD$, который равен углу $bBC$. По подобию $\triangle$-ков $bBC$ и $bPD$, приращение $Bb$ так относится к приращению $Cb$, как $Pb$ к $bD$. Когда прямая $Pb$ будет возвращена в свое первоначальное положение, чтобы приращения исчезли, то предельное (последнее) отношение приращений, или, что то же, предельное отношение $Pb$ к $Db$, обратится в отношение $PB$ к $DB$, причем угол $PDB$ станет прямым, следовательно и флюксия $AB$ будет относиться к флюксии $PB$, как $PB$ к $DB$.

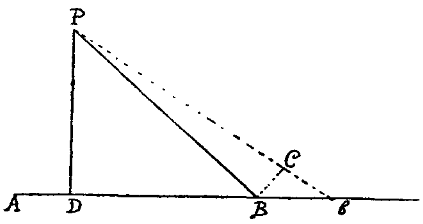
«II. *Прямая $PB$, вращающаяся около заданного полюса $P$, пересекает две другие прямые $AB$ и $AE$, заданные по положению в точках $B$ и $E$; требуется найти отношение флюксий этих прямых.*

«Когда вращающаяся прямая $PB$ (фиг. 12е) переместится из своего положения $PB$ в положение $Pb$, пересекающее заданные прямые $AB$ и $AE$ в точках $b$ и $e$, то проведя прямую $Bc$, параллельную $AE$ и пересекающую $Pb$ в $c$, получим:

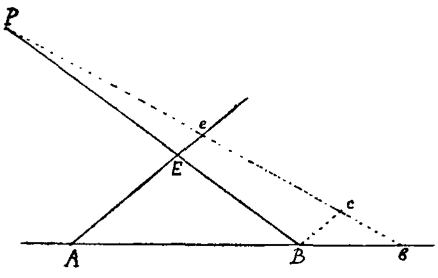
$$Bb : Bc = Ab : Ae$$
$$Bc : Ee = PB : PE.$$

«Из этих пропорций следует

$$Bb : Ee = Ab \cdot PB : Ae \cdot PE.$$




Фиг. 12d




Фиг. 12е.

«Когда прямая $Pb$ возвратится в первоначальное свое положение $PB$, то исчезающее приращение $Bb$ так будет относиться к исчезающему приращению $Ee$, как $AB \cdot PB$ относится к $AE \cdot PE$; следовательно, в этом же отношении будет находиться и флюксия прямой $AB$ к флюксии прямой $AE$.

«Поэтому, если вращающаяся прямая $PB$ пересекает какие-либо заданные по положению кривые в точках $B$ и $E$, и ставшие теперь подвижными прямые $AB$ и $AE$ касаются этих кривых в точках пересечения $B$ и $E$, то флюксия длины дуги кривой, касающейся прямой $AB$, будет так относиться к флюксии длины дуги кривой, касающейся прямой $AE$, как $AB \cdot PB$ относится к $AE \cdot PE$. То же самое получится даже и в том случае, когда прямая $PB$ будет постоянно касаться до какой-либо заданной по положению кривой в подвижной точке $P$.

«III. *Количество $x$ течет равномерно, надо найти флюксию количества $x^n$.*

«В то время как количество $x$ при своем течении обратится в $x + h$, количество $x^n$ обратится в $(x+h)^n$, т. е. по нашему способу разложения в бесконечные ряды обратится в

$$x^n + nhx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} \cdot h^2 x^{n-2} + \ldots,$$

приращения $h$ и

$$nhx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} h^2 x^{n-2} + \ldots$$

относятся друг к другу, как 1 к

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} hx^{n-2} + \ldots.$$

## ОТДЕЛ II

## О НАХОЖДЕНИИ ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫХ СИЛ

### Предложение I. Теорема I

*Площади, описываемые радиусами, проводимыми от обращающегося тела к неподвижному центру сил, лежат в одной плоскости и пропорциональны временам описания их.*

Разделим время на равные промежутки, и пусть в течение первого из них тело по инерции описывает прямую $AB$ (фиг. 13). Если бы оно не подвергалось никакому действию, то, продолжая итти по прямой, оно пришло бы в $c$ (по зак. I), пройдя путь $Bc$, равный $AB$, и тогда описанные радиусами $AS$, $BS$, $cS$, проведенными к центру сил $S$, площади $ASB$ и $BSc$ равны. В действительности же, когда тело пришло в $B$, то пусть на него подействовала центростремительная сила одним, но зато большим натиском,[34] вследствие которого тело отклонится от прямой $Ac$ и будет продолжать свой путь по прямой $BC$. Проведем прямую $cC$ параллельно $BS$ до встречи в точке $C$ с $BC$, тогда к концу второго промежутка времени тело (по след. I законов) придет в точку $C$, лежащую в одной плоскости с треугольником $ASB$. Проведи $SC$; по параллельности $SB$ и $Cc$ площади

---

«Когда эти приращения исчезнут, то их предельное отношение будет равно отношению 1 к $nx^{n-1}$, поэтому флюксия $x$ так относится к флюксии $x^n$, как 1 к $nx^{n-1}$.

«Рассуждая подобным же образом и пользуясь способом предельных первых и последних отношений, можно составить флюксии прямых или кривых линий в любых случаях, а также и флюксии поверхностей, углов и других количеств. Вместе с тем, такое установление этого анализа над количествами конечными и исследование предельных первых и последних отношений зарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометриею древних, и я хотел показать, что в методе флюксий нет надобности вводить в геометрию бесконечно малые фигуры.

«Анализ может вестись над какими угодно фигурами, конечными или бесконечно малыми (infinite parvae), которые предполагаются подобными исчезающим фигурам, а также и над фигурами, которые в способе неделимых принимаются за бесконечно малые; надо лишь поступать с должною осмотрительностью.

«Нахождение флюент по их флюксиям — задача более трудная, и первая ступень в ее решении равносильна квадратуре кривых, о которой мною же давно написано следующее сочинение».

После этого введения и следует самое изложение трактата «De quadratura curvarum». В конце этого трактата приложены две таблицы формул, отличающихся лишь обозначениями от таблиц неопределенных интегралов тех главнейших рациональных и иррациональных функций, которые и теперь составляют обычный курс оснований интегрального исчисления.

Эти таблицы могут в значительной степени способствовать уяснению того, какие задачи могли быть доводимы вычислением до конца, основываясь на том, что Ньютоном было *опубликовано*.

34 Латинское словое «impulsus» вполне передается русским словом *натиск*, которое включает в себе как понятие напряженности действия, так и его продолжительности.

треугольников $SBC$ и $SBc$ будут равны между собою, а следовательно, они равны и площади треугольника $SAB$.

Рассуждая подобным же образом, увидим, что если центростремительная сила действует последовательно в точках $C$, $D$, $E$ и т. д. и заставляет тело описывать прямые $CD$, $DE$, $EF$ и т. д., то все эти прямые будут лежать в одной плоскости, и площади треугольников $SCD$ и $SBC$, $SDE$ и $SCD$, $SEF$ и $SDE$ будут между собою равны. Следовательно, в равные времена описываются равные площади, расположенные в неподвижной плоскости. Слагая получим, что какие угодно суммы этих площадей, как $SADS$ и $SAFS$, будут относиться, как времена их описания. Увеличивая затем число треугольников и уменьшая их высоту бесконечно, получим, что в пределе периметр $ADF$ (по след. 4 лем. III) будет кривою линией и центростремительная сила, которою тело отклоняется все время от касательной к этой кривой, действует непрестанно, площади же $SADS$ и $SAFS$, описываемые радиусом, оставаясь постоянно пропорциональными временам их описания, будут и в пределе этим временам пропорциональны.

*Следствие 1.* Скорость тела, притягиваемого к неподвижному центру в пространстве несопротивляющемся, обратно пропорциональна длине перпендикуляра, опущенного из центра на касательную к орбите.

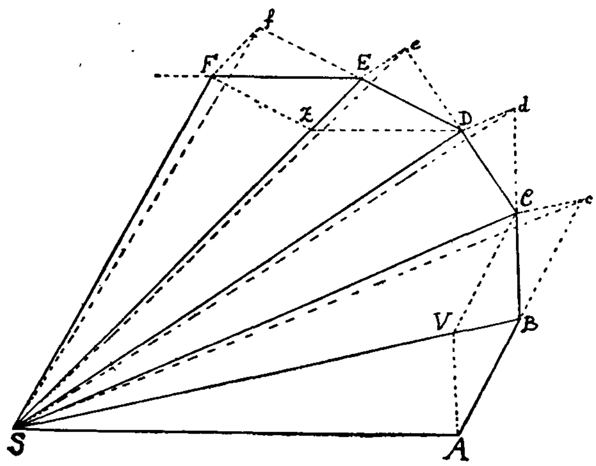
Действительно, скорости в точках $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ пропорциональны основаниям $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$ и т. д. Эти же основания обратно пропорциональны перпендикулярам, на них опущенным.

*Следствие 2.* Если на хордах $AB$ и $BC$ двух дуг, описанных в равные промежутки времени, построить параллелограмм $ABCV$ и провести его диагональ $BV$, то предельное ее положение, когда сказанные дуги бесконечно уменьшаются, проходит через центр сил.

*Следствие 3.* Если на хордах $AB$ и $BC$, $DE$ и $EF$ дуг, описанных в равные промежутки времени, построить параллелограммы $ABCV$, $DEFZ$, то силы, действующие на тело в $B$ и $E$, находятся в предельном отношении диагоналей $BV$ и $EZ$, при бесконечном уменьшении дуг. Так как перемещения $BC$ и $EF$ тела слагаются (по след. I законов) из перемещений $Bc$ и $BV$, $EF$ и $EZ$ и так как $BV$, равное $Cc$, и $EZ$, равное $Ff$ предыдущего доказательства, происходят от натисков центростремительной силы в $B$ и $E$, то сказанные диагонали этим натискам пропорциональны.

*Следствие 4.* Силы, которыми тела в пространстве, сопротивления неоказывающем, отклоняются от прямолинейного движения и вынуждаются двигаться по кривым, относятся между собою, как направленные к центру сил стрелки, проведенные через середины хорд дуг, описанных в равные промежутки времени, когда эти дуги уменьшаются бесконечно. Ибо эти стрелки равны половинам тех диагоналей,[35] о которых шла речь в следствии 3.

*Следствие 5.* Поэтому такие силы так относятся к силе тяжести, как эти стрелки относятся к перпендикулярным к горизонту стрелкам[35] параболических дуг, описываемых брошенными телами в те же промежутки времени.




Фиг. 13.

Такой способ принят сообразно лемме X, служащей ему основанием.

*Следствие 6.* Все вышеизложенное имеет место, по следствию V законов, и в том случае, когда плоскости, в которых тела движутся, не находятся, вместе с расположенными в них центрами сил, в покое, а движутся равномерно и прямолинейно.

---

[35] За промежутки времени, в продолжение которых образуются сравниваемые отклонения, возьмем те, в которые тело перешло из $A$ в $C$ и из $D$ в $F$. Для первого три последовательные точки траектории суть $A$, $B$ и $C$, причем $B$ будет в пределе вершиною, лежащею по средине дуги $AC$, а прямая $AC$ — хордою; тогда очевидно, что $AC$, пересекаясь с $VB$, разделяет эту последнюю постоянно пополам, значит стрелка дуги $AC$ и составит в пределе половину диагонали $BV$.

[36] Напряжения поля центростремительной силы сравниваются с силою тяжести не по их «ускорениям», а по производимым ими «отклонениям» от касательной в продолжение бесконечно малого промежутка времени, одинакового в обоих случаях. Очевидно, что оба способа сравнения сил равнозначущи, ибо сказанные отклонения выражаются так:

$$\delta = \frac{1}{2} w \cdot \tau^2 \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{1}{2} g \cdot \tau^2.$$

**Предложение II. Теорема II**

*Если тело движется по какой-либо плоской кривой так, что радиусом, проведенным к неподвижной точке или к точке, движущейся равномерно и прямолинейно, описываются площади, пропорциональные времени, то это тело находится под действием центростремительной силы, направленной к сказанной точке.*

*Случай 1.* Всякое тело, движущееся по кривой линии, отклоняется от прямолинейного пути некоторой силой, на него действующей (по зак. I). Сила эта, отклоняющая тело от прямолинейного пути и побуждающая его в равные времена описывать около неподвижной точки $S$ весьма малые треугольники $SAB$, $SAC$, $SCD$ и т. д., равные по площади, действует в точке $B$ (фиг. 12) по прямой, параллельной $cC$ (по предл. 40-му книги I «Элементов» и зак. II), т. е. по линии $BS$; в месте $C$ она действует по линии, параллельной $dD$, т. е. по $CS$ и т. д. Итак, сила эта постоянно направлена к сказанной неподвижной точке $S$.

*Случай 2.* По следствию V законов безразлично, находится ли плоскость, в которой тело описывает свою траекторию, в покое, или движется, вместе с телом, описываемой кривой и точкою $S$, равномерно и прямолинейно.

*Следствие 1.* При движении тела в пространстве или в среде, которые сопротивления не оказывают, если площади не пропорциональны времени, то сила не направлена к точке встречи радиусов, но уклоняется или в ту сторону, куда движение происходит, когда описание площадей ускоряется, или в сторону обратную, когда оно замедляется.

*Следствие 2.* Если описание площадей ускоряется даже в сопротивляющейся среде, то направление силы уклоняется от точки встречи радиусов в ту сторону, куда движение происходит.

*ПОУЧЕНИЕ*

Тело может находиться под действием нескольких сил, в таком случае смысл предложения тот, что сила, составленная из всех их, направлена в точку $S$. Если при этом которая-нибудь из сил действует по направлению, постоянно перпендикулярному к той плоскости, в которой площади описываются, то она заставляла бы тело лишь уклоняться от этой плоскости, причем величина описываемой в ней площади не увеличивается и не уменьшается, следовательно, при составлении сил такая сила может быть отбрасываема.

**Предложение III. Теорема III**

*Тело, движущееся вокруг другого так, что площади, описываемые радиусом, проведенным к центру этого второго тела, в свою очередь движущегося как бы то ни было, пропорциональны временам, находится под действием силы, слагающейся из центростремительной, направленной к центру этого второго тела, и полной ускорительной силы, действующей на это второе тело.*

Обозначим первое тело через $L$, второе через $T$, тогда (по след. VI законов), если бы приложить к обоим телам силы, равные и противоположные ускорительной силе, действующей на второе тело $T$, то первое тело $L$ будет продолжать описывать вокруг второго тела $T$ такие же площади, как и ранее, но тогда сила, которая ранее действовала на тело $T$, будет уничтожена силою, ей равною и противоположною, и следовательно (по зак. I), это второе тело $T$, будучи предоставлено самому себе, или покоится, или движется равномерно и прямолинейно, первое же тело $L$ под действием разности сил, т. е. под действием оставшейся силы, продолжает описывать около $T$ площади, пропорциональные времени, следовательно (по теор. II) эта разность сил направлена ко второму телу $T$, как к центру.

*Следствие 1.* Итак, если тело $L$, обращаясь около тела $T$, описывает проведенным к нему радиусом площади, пропорциональные времени, и если из полной силы (или простой, или составленной из нескольких по правилу параллелограмма), действующей на тело $L$, отнять (по тому же правилу) полную ускорительную силу, действующую на второе тело, то полная оставшаяся сила, действующая на первое тело, направлена ко второму как к центру.

*Следствие 2.* Если сказанные площади лишь весьма близки к пропорциональности времени, то и оставшаяся сила направляется лишь весьма близко к $T$.

*Следствие 3.* Обратно, если оставшаяся сила направляется весьма близко к $T$, то и сказанные площади будут весьма близки к пропорциональности.

*Следствие 4.* Если радиус, проведенный от первого тела $L$ ко второму $T$, описывает площади, совершенно не следующие отношению времен, это же второе тело или покоится, или движется равномерно и прямолинейно, то или центростремительная сила, направленная на второе тело $T$, равна нулю, или же ее действие смешивается, слагаясь с гораздо более мощными действиями других сил; полная же сила, составленная из всех действующих на тело $L$ сил, если таковых несколько, направлена к некоторому другому (подвижному или неподвижному) центру. То же самое имеет место, когда второе тело $T$ движется как бы то ни было, предполагая, что за центростремительную силу принимается та, которая остается за вычетом полной ускорительной силы, действующей на это второе тело $T$.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Так как равномерное описание площадей служит указателем центра, к которому направляется оказывающая наибольшее влияние на движущееся тело сила, которою оно и отклоняется от прямолинейного пути и удерживается на своей орбите, то почему бы не принять в последующем равномерное описание площадей вообще за признак центра, около которого происходит всякое круговое движение в свободном пространстве?

### Предложение IV. Теорема IV

*При движении тел, описывающих равномерно различные круги, центростремительные силы направлены к центрам этих кругов и пропорциональны квадратам описываемых в одинаковое время дуг, разделенным*[37] *на радиусы кругов.*

По предложению II и следствию 2 предложения I силы направлены к центрам кругов и относятся друг к другу, как синусы верзусы[38] (предл. I, след. 4) дуг, описываемых в весьма малые равные промежутки времени, т. е. как квадраты этих дуг, разделенные на диаметры кругов (лем. VIII); а так как эти дуги пропорциональны любым дугам, описываемым в равные промежутки времени, диаметры же пропорциональны радиусам, то и силы относятся между собою, как квадраты одновременно описываемых дуг, разделенные на радиусы кругов.

*Следствие 1.* Так как эти дуги пропорциональны скоростям тел, то центростремительные силы прямо пропорциональны квадратам скоростей и обратно пропорциональны радиусам кругов.

*Следствие 2.* Так как времена обращения пропорциональны: прямо радиусам и обратно скоростям, то центростремительные силы прямо про-

---

[37] В «Началах» везде применена старинная геометрическая терминология, т. е. не говорится про умножение двух отрезков, а про «площадь прямоугольника, получаемого проведением одного из них по другому»; когда же надо произведение двух отрезков разделить на третий, то говорится: «приложить (applicare) данную площадь к заданной длине»; в переводе принята общеупотребительная теперь терминология.

[38] Во времена Ньютона и более 150 лет еще после него рассматривались *тригонометрические линии*, а не функции, т. е. не отвлеченные числа, показывающие отношения этих линий к радиусу, как теперь.

порциональны радиусам и обратно пропорциональны квадратам времен обращения.

*Следствие 3.* Поэтому, если времена обращения равны и, следовательно, скорости пропорциональны радиусам, то и силы им пропорциональны, и наоборот.

*Следствие 4.* Если времена обращения и скорости пропорциональны корням квадратным радиусов, то центростремительные силы равны, и наоборот.

*Следствие 5.* Если времена обращения пропорциональны радиусам и, следовательно, скорости равны, то силы обратно пропорциональны радиусам, и наоборот.

*Следствие 6.* Если времена обращения находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов, и наоборот.

*Следствие 7.* Вообще, если времена обращения пропорциональны какой-либо $n$-ой степени радиусов $R$, т. е. $R^n$, и следовательно, скорости обратно пропорциональны степени $R^{n-1}$, то центростремительные силы обратно пропорциональны $R^{2n-1}$, и наоборот.

*Следствие 8.* Все сказанное выше о скоростях, временах и силах относится и к тому случаю, когда тела описывают подобные части каких-либо подобных фигур около центров, расположенных в сходственных их точках. Это следует из предыдущего доказательства, распространенного на этот случай; надо лишь при этом вместо равномерного движения принимать равномерное описание площадей и вместо радиусов брать расстояния тел до цетров.

*Следствие 9.* Из того же доказательства вытекает, что длина дуги, описываемой в какой-либо промежуток времени телом, равномерно обращающимся по кругу под действием заданной центростремительной силы, есть среднее пропорциональное между диаметром круга и путем, проходимым тем же телом в то же время при свободном его падении под действием этой силы.[39]

---

[39] Обозначая через: $R$ — радиус круга, $s$ — длину дуги, $\tau$ — рассматриваемый промежуток времени и $\varphi$ — центростремительную силу, т. е. ее ускорение, имеем по доказанной теореме:

$$\varphi = k\frac{s^2}{R} \qquad (*)$$

где $k$ — некоторая постоянная.

Заметив, что

$$s = V \cdot \tau$$

где $V$ — скорость тела и

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

*ПОУЧЕНИЕ*

Случай, указанный в следствии 6, имеет место для небесных тел (как то независимо друг от друга отметили *Врен, Гук* и *Галлей*), поэтому относящееся к центростремительным силам, убывающим пропорционально квадратам расстояний от центра, я решил изложить в последующем подробнее.

При помощи предыдущих предложений может также быть выведено отношение центростремительной силы к какой-либо известной силе, напр. к силе тяжести. Ибо если тело обращается около Земли по кругу под действием силы тяжести, то эта сила и есть центростремительная. Ее можно определить, на основании следствия 9, по падению тел и по времени оборота и величине дуги, описываемой в заданное время. Такого рода предложениями *Гюйгенс* в превосходном своем сочинении: «De Horologio oscillatorio», и сопоставил силу тяжести с центробежными силами обращающихся тел.

Все предыдущее может быть доказано и следующим образом: вообразим, что в круг вписан правильный многоугольник с любым числом сторон. Тело, при своем движении с данною скоростью по сторонам многоугольника при каждом из углов будет претерпевать отражение от круга; сила, с которою оно будет давить на круг при каждом отдельном отражении, пропорциональна скорости, следовательно сумма сил в течение заданного времени будет пропорциональна скорости и числу отражений,[40] т. е. (при данном числе сторон многоугольника) сила будет пропорциональна длине, описанной в вышеуказанное время, умноженной на отношение этой длины к радиусу, т. е. будет пропорциональна отношению квадрата этой длины к радиусу; следовательно, при бесконечном уменьшении сторон многоугольника, когда он совпадет с кругом, сила станет пропорциональной отношению квадрата

---

где $T$ есть время оборота, из формулы (*) и получим все перечисленные следствия 1—8.

Следствие 9 приведено, чтобы установить постоянную $k$ в формуле (*); для равномерно ускоренного движения имеет место формула $2\delta = \varphi \cdot \tau^2$, кроме того $s^2 = 2R \cdot \delta$ при весьма малом $\delta$; отсюда

$$\varphi = \frac{s^2}{R\tau^2} = \frac{V^2}{R}.$$

Предполагая теперь промежуток времени $\tau$ конечным, для свободного падения под действием силы, коей ускорение $\varphi$, имеем $2h = \varphi \cdot \tau^2$, путь же $S$, пройденный равномерно по кругу в это же время, будет $S = V \cdot \tau$, следовательно будет вообще

$$S^2 = 2Rh.$$

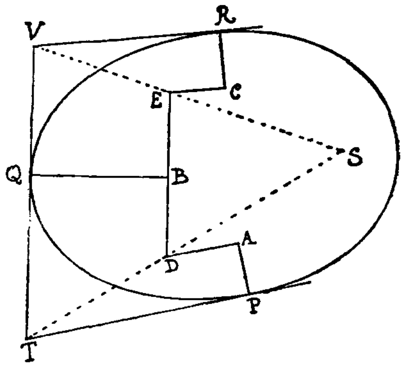
[40] Надо воображать многоугольник с весьма большим числом сторон, в под словами «сумма сил» надо разуметь сумму изменений количества движения тела, происходящих в продолжение данного промежутка времени.

дуги, описанной в заданное время к радиусу. Такова центробежная сила, с которою тело давит на круг; ей равна и противоположна сила, с которою круг отталкивает тело к своему центру.

### Предложение V. Задача I

*При известной в любом месте скорости, с которою тело описывает заданную фигуру под действием сил, направленных к постоянному центру, найти этот центр.*

Пусть три прямые $PT$, $TQV$, $VR$ (фиг. 14), пересекающиеся в точках $T$ и $V$, касаются данной фигуры в точках $P$, $Q$, $R$. К касательным в точках $P$, $Q$, $R$ восставляются перпендикуляры, и по ним откладываются длины $PA$, $QB$, $RC$, обратно пропорциональные соответствующим скоростям, и через точки $A$, $B$ и $C$ проводятся, параллельно касательным прямые $CE$, $DBE$ и $AD$, пересекающиеся в точках $D$ и $E$. Проведя $VE$ и $TD$ в точке их пересечения $S$ и получим требуемый центр.




Фиг. 14.

Действительно, перпендикуляры, опущенные на касательную $PT$ и $QT$ из центра $S$, обратно пропорциональны скоростям, следовательно по построению пропорциональны длинам $PA$ и $QB$, т. е. расстояниям точки $D$ до касательных $PT$ и $QT$. Отсюда легко заключить, что точки $T$, $D$, $S$ лежат на одной прямой. Подобно этому и точки $V$, $E$, $S$ должны лежать на одной прямой, следовательно искомый центр $S$ находится в пересечении прямых $TD$ и $VE$.[41]

---

[41] Аналитическое решение этой задачи сводится к следующему: пусть скорости в точках $P$, $Q$, $R$ соответственно суть $v_1$, $v_2$, $v_3$ и уравнения касательных

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

тогда координаты центра $S(\xi, \eta)$ и постоянная площадей $\sigma$ определяются из уравнений

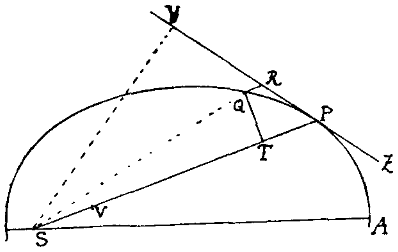
$$(a_i \xi + b_i \eta + c_i) \cdot v_i = \sigma \cdot \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

выражающих условие, что постоянная площадей $\sigma$ равна произведению из скорости на расстояние от центра до касательной к траектории. Как видно, эти уравнения первой степени относительно неизвестных $\xi$, $\eta$ и $\sigma$; следовательно, их решение не представляет затруднений.

**Предложение VI. Теорема V**

*Если тело, обращаясь по какой бы то ни было орбите около неподвижного центра в пространстве, не оказывающем сопротивления, описывает в течение какого-либо весьма малого промежутка времени весьма малую дугу, и через середину этой дуги проведена стрелка, направленная к неподвижному центру, то центростремительная сила по середине дуги пропорциональна этой стрелке и обратно пропорциональна квадрату времени ее описания.*

Действительно (след. 4 предл. I), стрелка дуги, описанной в течение заданиого промежутка времени, пропорциональна силе, а так как при увеличении промежутка времени в какомнибудь отношении пройденная дуга увеличится в том же отношении, стрелка же увеличится в этом отношении, возвышенном во вторую степень (след. 2 и 3 лем. X), следовательно стрелка пропорциональна силе и квадрату времени. Отсюда следует, что сила пропорциональна стрелке и обратно пропорциональна квадрату времени.



Фиг. 15.

То же самое легко доказывается пользуясь следствием 4 леммы X.

*Следствие 1.* Если тело $P$ (фиг. 15), обращаясь вокруг центра $S$, описывает кривую $APQ$ и прямая $ZPR$ касается этой кривой в точке $P$, и из какой-либо точки $Q$ этой кривой, весьма близкой к $P$, проводится прямая $QR$, параллельная $SP$, и на $SP$ опускается перпендикуляр $QT$, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна предельной величине, к которой приближается количество $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$, когда точки $P$ и $Q$ сливаются между собою. Ибо $QR$ равно стрелке удвоенной дуги $QP$, коей середина есть $P$, удвоенная же площадь треугольника $SQP$, т. е. $SP \cdot QT$, пропорциональна времени, в течение которого эта двойная дуга описывается; следовательно, это произведение можно ввести в пропорцию вместо времени.

*Следствие 2.* Центростремительная сила обратно пропорциональна пределу количества $\frac{SY^2 \cdot PQ^2}{QR}$, где $SY$ есть перпендикуляр, опущенный из центра сил на касательную $PR$ к орбите, ибо произведения

$$SY \cdot QP = SP \cdot QT.$$

*Следствие 3.* Если сама орбита круговая или если в точке $P$ проведен к этой орбите круг, имеющий с нею в этой точке одинаковую кривизну и образующий с нею наименьший угол соприкосновения (см. прим. 32), и если $PV$ есть хорда этого круга, проведенная через центр сил, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна объему $SY^2 \cdot PV$, ибо

$$PV = \frac{QP^2}{QR}$$

по свойству круга кривизны.

*Следствие 4.* При тех же предположениях центростремительная сила прямо пропорциональна квадрату скорости и обратно пропорциональна сказанной хорде, ибо скорость обратно пропорциональна перпендикуляру $SY$ (след. 1 предл. I).

*Следствие 5.* Таким образом, если дана какая-либо кривизна $APQ$ и внутри ее точка $S$, к которой постоянно направляется центростремительная сила, то можно найти закон этой силы, действием которой тело $P$ отклоняется от прямолинейного пути, удерживается на кривой и вынуждается описывать ее. Для этого надо вычислить или объем $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$, или же объем $SY^2 \cdot PV$, обратно пропорциональный этой силе.[42] В следующих задачах мы даем примеры такого определения центростремительных сил.

---

[42] Эта теорема и ее следствия приводят к основной формуле, служащей для определения центростремительных сил. Обозначая через $c$ — постоянную площадей, через $\tau$ — весьма малый промежуток времени, в течение которого тело проходит путь $PQ$, и через $\varphi$ — ускорение, будем иметь

$$QR = \frac{1}{2} \varphi \cdot \tau^2$$

и

$$c \cdot \tau = 2SPQ = SP \cdot QT = SY \cdot PQ,$$

откуда

$$\varphi = 2c^2 : \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = 2c^2 : \frac{SY^2 \cdot PQ^2}{QR} = \frac{2c^2}{SY^2 \cdot PV}. \qquad (1)$$

Это и есть формула Ньютона.

Обозначим через $\rho$ — радиус кривизны в точке $P$ и через $\omega$ — угол $PSY$; тогда, полагая

$$SY = p \quad \text{и} \quad SP = r$$

будем иметь:

$$PV = 2\rho \cos \omega; \qquad p = r \cos \omega$$

и следовательно,

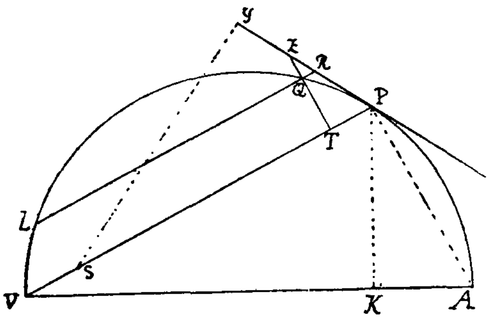
$$\varphi = \frac{2c^2}{p^2 \cdot 2\rho \cos \omega} = \frac{c^2 \cdot r}{\rho \cdot p^3}. \qquad (2)$$

Duhamel в «Méthodes dans les sciences du raisonnements», t. IV, p. 276, обращает внимание, что формула Ньютона равносильна так называемой формуле Бине, которою пользуются

### Предложение VII. Задача II

*Тело обращается по окружности круга; требуется найти закон центростремительной силы, направляющейся к какой-либо заданной точке.*

Пусть $VQPA$ (фиг. 16) есть окружность круга, $S$ — заданная точка, к которой, как к центру, направляется сила, $P$ — движущееся по окружности тело, $Q$ — близкое к нему место, в которое бы оно перешло, $PRZ$ — касательная в точке $P$. Через точку $S$ проводим хорду $PV$; проведя диаметр $VA$, соединяем $PA$, на $SP$ опускаем перпендикуляр $QT$, коего продолжение пересекает касательную в точке $Z$. Через $Q$ проводим хорду $LR$, параллельную $PS$, пересекающую касательную в точке $R$ и круг в точке $L$. Из подобия треугольников $ZQR$, $ZTP$, $VPA$, следует




Фиг. 16.

$$RP^2 : QT^2 = AV^2 : PV^2,$$

по свойству же круга:

$$RP^2 = QR \cdot RL,$$

следовательно

$$QT^2 = \frac{QR \cdot RL \cdot PV^2}{AV^2}.$$

Умножим обе части этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$, и так как $P$ и $Q$ сливаются, то вместо $RL$ напишем $PV$, тогда получим

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = \frac{SP^2 \cdot PV^3}{AV^2}.$$

---

теперь. В самом деле, примем точку $S$ за полюс, какую-нибудь прямую, напр. $SA$, за полярную ось, тогда, полагая угол $ASP = \theta$, будет:

$$p = r\cos\omega = r^2 \cdot \frac{d\theta}{ds}; \quad \rho = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}} = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{r^3\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\}};$$

подставляя в формулу (2), имеем

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\}.$$

Это и есть формула Бине. Но так как Ньютон, при изложении «Начал», не пользуется аналитической геометрией и избегает применений исчисления флюксий, в котором выражение для кривизны у него имеется, то он и ограничивается формулами (1), выражая их пропорциями и не приводя коэффициента пропорциональности $2c^2$.

Следовательно (след. 1 и 5 предл. VI), центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{SP^2 \cdot PV^3}{AV^2}$, а так как $AV^2$ есть величина постоянная, то эта сила обратно пропорциональна произведению квадрата расстояния на куб хорды.

*То же самое иначе*

На продолжение касательной $PR$ опускается перпендикуляр $SY$, тогда, по подобию треугольников $SYP$, $VPA$, будет

$$AV : PV = SP : SY,$$

следовательно

$$SY = \frac{PV \cdot SP}{AV}$$

и

$$SY^2 \cdot PV = \frac{SP^2 \cdot PV^3}{AV^2};$$

центростремительная сила (по след. 3 и 4 предл. VI) обратно пропорциональна $\frac{SP^2 \cdot PV^3}{AV^2}$, а так как $AV^2$ есть величина постоянная, то эта сила обратно пропорциональна[43] $SP^2 \cdot PV^3$.

*Следствие 1.* Если заданная точка $S$, к которой постоянно направляется сила, лежит на окружности этого круга, скажем в $V$, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна пятой степени расстояния $SP$.

*Следствие 2.* Сила, которая может заставить тело $P$ обращаться по кругу $APTV$ (фиг. 17) около центра сил $S$, так относится к другой силе, которая могла бы заставить то же тело обращаться по тому же кругу, но около другого центра сил $R$, как $RP^2 \cdot SP$ относится к $SG^3$, причем $SG$ есть отрезок прямой, параллельной $PR$, заключенный между точкою $S$ и касательной к кругу, проведенной в точке $P$. По построению видно, что первая сила так относится ко второй, как $RP^2 \cdot PT^3 : SP^2 \cdot PV^3$ или как

$$RP^2 \cdot SP : \frac{SP^2 \cdot PV^3}{PT^3},$$

---

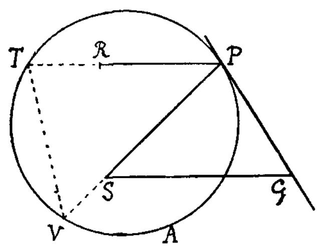
[43] Этот результат непосредственно получается из формулы $\varphi = \frac{c^2 r}{\rho \cdot p^3}$, ибо в данном случае $\rho = R$, $p = r \cos \omega$; $PV = 2R \cos \omega$, следовательно

$$\varphi = \frac{c^2 r}{R \cdot r^3 \cos^3 \omega} = 8c^2 R^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{PV^3}.$$

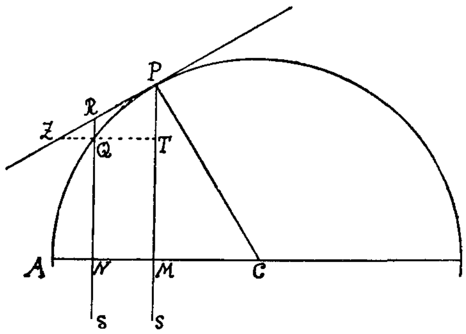
но из подобия треугольников $SPG$ и $TPV$ следует $SG = \frac{PV \cdot SP}{PT}$, и значит, предыдущее отношение равно

$$\frac{RP^2 \cdot SP}{SG^3}.$$

*Следствие 3.* Сила, могущая заставить тело $P$ обращаться по какой-либо орбите вокруг центра сил $S$, так относится к силе, могущей заставить то же тело $P$ в такое же время обращаться по той же орбите около другого центра сил $R$, как $SP \cdot RP^2$ относится к $SG^3$, причем $SG$ параллельно $RP$, ибо силы для сказанной орбиты и для ее круга кривизны во всякой точке $P$ равны.




Фиг. 17.




Фиг. 18.

**Предложение VIII. Задача III**

*Тело движется по полукругу $PQA$; требуется найти закон центростремительной силы, которая могла бы производить такое движение, будучи направленной к столь отдаленной точке $S$, что все прямые $PS$, $QS$ и пр. можно считать между собою параллельными.*

Через центр полукруга $C$ (фиг. 18) проводим диаметр, перпендикулярный к сказанным параллельным и пересекающий их в $M$, $N$, и соединяем $CP$.

Из подобных треугольников $CPM$, $PZT$, $RZQ$ следует

$$CP^2 : PM^2 = RP^2 : QT^2,$$

по свойству же круга: $RP^2 = QR \cdot (RN + QN)$, или в пределе, когда точки $P$ и $Q$ совпадут: $RP^2 = 2PM \cdot QR$.

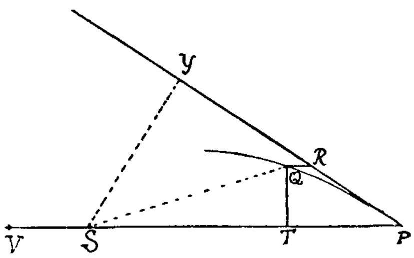
Следовательно, будет $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ и $\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2}$, т. е. (по след. 1 и 5 предл. VI) искомая центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2}$ или, отбрасывая постоянную величину $\frac{2SP^2}{CP^2}$, обратно пропорциональна $PM^3$. То же самое легко получается из предыдущего предложения.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Подобным же образом докажется, что тело может двигаться по эллипсу или даже по гиперболе, или параболе, под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной кубу ординаты, направленной к бесконечно удаленному центру сил.

### Предложение IX. Задача IV

*Тело обращается по спирали PQ, пересекающей все радиусы SP, SQ и т. д. под заданным углом; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к центру спирали.*



Фиг. 19.

Будем брать весьма малый угол $PSQ$ (фиг. 19) постоянно одной величины, тогда, в виду постоянства всех углов, фигура $SPRQT$ при всяком положении точки $P$ будет постоянна по виду (т. е. будет оставаться подобной), и значит, отношение $\frac{QT}{QR}$ будет постоянное, следовательно $\frac{QT^2}{QR}$ будет пропорционально $QT$, а так как отношение $QT$ к $SP$ также постоянное, то $QT$ пропорционально $SP$, следовательно и $\frac{QT^2}{QR}$ пропорционально $SP$. При изменении угла $PSQ$, отрезок $QR$ будет изменяться пропорционально квадрату $PR$ или $QT$ (лем. XI); следовательно, отношение $\frac{QT^2}{QR}$ останется без изменения, т. е. попрежнему пропорциональным $SP$. Поэтому $\frac{QT \cdot SP^2}{QR}$ будет пропорционально $SP^3$, и следовательно (предл. VI, след. 1 и 5), центростремительная сила обратно пропорциональна кубу расстояния $SP$.

### *То же самое иначе*

Перпендикуляр $SY$, опущенный на касательную, и хорда $PV$ круга кривизны спирали в точке $P$ находятся в постоянном отношении к расстоянию $SP$, поэтому $SY^2 \cdot PV$ пропорционально $SP^3$, что обратно пропорционально центростремительной силе (предл. VI, след. 2 и 3).

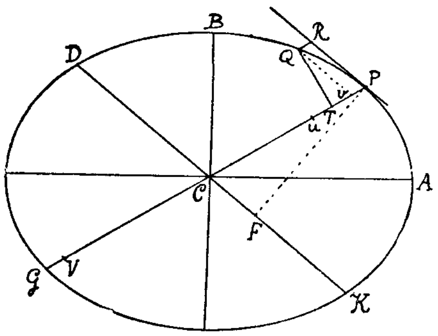
### Лемма XII

*Все параллелограммы, построенные на сопряженных диаметрах заданного эллипса или гиперболы, равны между собою по площади.*

Установлено в учении о конических сечениях.

### Предложение X. Задача V

*Тело обращается по эллипсу; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к центру эллипса.*




Фиг. 20.

Пусть $CA$ и $CB$ (фиг. 20) — полуоси эллипса, $PG$ и $DK$ — два сопряженных его диаметра, $PF$, $QT$ — перпендикуляры к этим диаметрам, $Qv$ — ордината к диаметру $PG$. Дополним параллелограмм $QvPR$; по теории конических сечений имеем

$$Qv^2 = \frac{CD^2}{PC^2} \cdot Pv \cdot vG$$

по подобию треугольников $QvT$ и $PCF$ будет

$$Qv^2 = \frac{QT^2 \cdot PC^2}{PF^2}$$

следовательно будет

$$vG = \frac{QT^2 \cdot PC^4}{PF^2 \cdot CD^2 \cdot Pv}.$$

Вместо $Pv$ можно написать $QR$, вместо $CD \cdot PF$ — равное ему произведение $BC \cdot AC$ (по лемме XII) и в пределе $2PC$ вместо $vG$, тогда получим

$$\frac{QT^2 \cdot PC^2}{\cdot QR} = \frac{2BC^2 \cdot AC^2}{PC}$$

следовательно (предл. VI, след. 5) центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{2BC^2 \cdot AC^2}{PC}$, а так как $2BC^2 \cdot AC^2$ есть величина постоянная, то центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{1}{PC}$, т. е. прямо пропорциональна расстоянию[44] до центра $PC$.

*То же самое иначе*

На прямой $PG$, по другую сторону от точки $T$, возьми точку $u$ так, чтобы было $Tu = Tv$, затем возьми $uV$ так, чтобы было $uV : vG = DC^2 : PC^2$; а так как по свойствам конических сечений

$$Qv^2 : Pv \cdot vG = DC^2 : PC^2$$

то будет

$$Qv^2 = Pv \cdot uV.$$

Сложив почленно это равенство с следующим

$$(Pv + 2vT)\,Pv = Pv \cdot uP$$

получим

$$PQ^2 = Pv \cdot PV.$$

Следовательно, круг, касающийся конического сечения в точке $P$ и проходящий через точку $Q$, пройдет и через точку $V$. При совпадении точек $P$ и $Q$, отношение $uV : vG$, равное отношению $DC^2 : PC^2$, обратится в отношение $PV : PG$, т. е. $PV : 2PC$, и следовательно, будет $PV = \frac{2DC^2}{PC}$. Поэтому сила, заставляющая тело обращаться по эллипсу, будет обратно пропорциональна $\frac{2DC^2 \cdot PF^2}{PC}$, а так как произведение $2DC^2 \cdot PF^2$ постоянное, то эта сила прямо пропорциональна $PC$.

---

[44] Отнесем эллипс к его сопряженным диаметрам $CP$ и $CD$, длины коих обозначим через $a_1$ и $b_1$ и угол между ними — через $\alpha$, тогда будет:

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2); \qquad QT^2 = Qv^2 \cdot \sin^2\alpha; \qquad QR = a_1 - x$$

и тогда выражение $\varphi = \frac{2c^2 \cdot QR}{QT^2 \cdot PC^2}$ дает

$$\varphi = \frac{2c^2 \cdot (a_1 - x)}{a_1^2 \cdot y^2 \sin^2\alpha} = \frac{2c^2 (a_1 - x)}{b_1^2 (a_1^2 - x^2) \cdot \sin^2\alpha} = \frac{2c^2}{b_1^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (a_1 + x)} = \frac{2c^2 \cdot a_1^2}{a_1^2 b_1^2 \sin^2\alpha \cdot (a_1 + x)}.$$

Но $a_1^2 b_1^2 \cdot \sin^2\alpha = a^2 b^2$, где $a$ и $b$ — полуоси эллипса; вместе с тем и пределе будет $x = a_1 = CP$, поэтому в пределе:

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot a_1 = \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot CP.$$

Обозначая через $2p = \frac{2b^2}{a}$ — параметр эллипса, можем написать

$$\varphi = \frac{c^2}{pa^3} \cdot CP \qquad (*)$$

*Следствие 1.* Итак, в этом случае сила пропорциональна расстоянию до центра эллипса, и наоборот, если сила пропорциональна расстоянию, то тело будет двигаться по эллипсу, коего центр совпадает с центром сил, или же в частном случае по кругу, в который эллипс может обратиться.

*Следствие 2.* Времена обращений, совершающихся около того же центра по любым эллипсам, между собою равны. Действительно, эти времена обращения равны между собою для эллипсов подобных (предл. IV, след. 3 и 8); для эллипсов же, имеющих общую большую ось, эти времена прямо пропорциональны площадям эллипсов и обратно пропорциональны площадям, описываемым в одинаковые постоянные промежутки времени, иначе — прямо пропорциональны малым осям и обратно пропорциональны скоростям при проходе через главные вершины, т. е. прямо пропорциональны малым полуосям и обратно пропорциональны ординатам, проведенным через ту же самую точку общей большой оси их; частное же от деления этих отношений, равных между собою, равно единице.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Если эллипс, при бесконечном удалении центра, обратится в параболу и тело будет двигаться по этой параболе, то сила, направленная к бесконечно удаленному центру, станет постоянною. Это есть теорема *Галлилея.*

Если (при изменении наклонения секущей конус плоскости) параболическое сечение превратится в гиперболическое, то тело будет двигаться по этой гиперболе, если заменить центростремительную силу центробежною. Подобно тому как для круга или эллипса, если сохранять времена оборота, силы, направленные к его центру, остаются пропорциональными расстоянию, в каком бы отношении ни увеличивались или ни уменьшались ординаты, или ни менялся угол их наклонения к оси абсцисс, проходящей через центр, точно так же и для всяких кривых вообще, если ординаты увеличиваются или уменьшаются в каком угодно отношении, или изменяется угол их наклонения, но время оборота сохраняется, силы, направленные к центру, лежащему на оси абсцисс, будут пропорциональны расстояниям до него для всех точек, лежащих на той же самой ординате.

## ОТДЕЛ III

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПО ЭКСЦЕНТРИЧНЫМ КОНИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЯМ

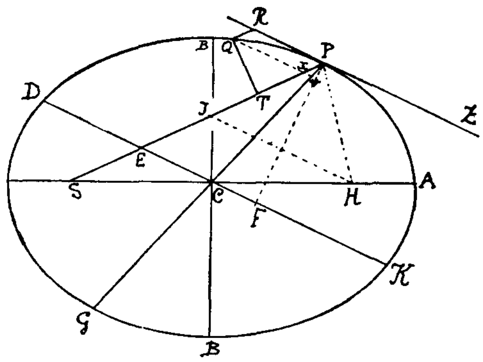
### Предложение XI. Задача VI

*Тело обращается по эллипсу; требуется определить закон центростремительной силы, направленной к фокусу эллипса.*

Пусть $S$ (фиг. 21) есть фокус эллипса. Проводим $SP$, пересекающую диаметр $DK$ в точке $E$ и ординату $Qv$ в точке $x$, и дополняем параллелограмм $QxPR$; тогда окажется, что $EP$ равно большой полуоси $AC$ эллипса, ибо если провести из другого фокуса $H$ прямую $HJ$ параллельно $EC$, то по равенству $CS$ и $CH$ будут равны $ES$ и $EJ$, следовательно

$$PE = \frac{1}{2}(PS + PJ),$$

но так как $HJ$ параллельно $PR$ и углы $JPR$ и $HPZ$ равны, то $PJ = PH$, сумма же $PS + PH = 2AC$.



Фиг. 21.

На $SP$ опустим перпендикуляр $QT$ и обозначим параметр эллипса через $L$ так, что $L = 2\frac{BC^2}{AC}$, имеем

$$L \cdot QR : L \cdot Pv = QR : Pv \tag{1}$$

но $QR = Px$, из подобия же треугольников $Pxv$ и $PCE$ следует

$$Px : Pv = PE : PC,$$

значит

$$QR : Pv = AC : PC,$$

но

$$L \cdot Pv : Gv \cdot Pv = L : Gv \tag{2}$$

и

$$Gv \cdot vP : Qv^2 = PC^2 : CD^2. \tag{3}$$

При совмещении точек $Q$ и $P$ будет (лем. VII, след. 2)

$$Qx = Qv$$

и следовательно, в пределе будет

$$Qx^2 : QT^2 = Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2 \text{ (лем. XII)}.$$

Итак,

$$Qv^2 : QT^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2. \tag{4}$$

По перемножении пропорций (1), (2), (3) и (4) получится

$$L \cdot QR : QT^2 = AC \cdot L \cdot PC^2 \cdot CD^2 : PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2 =$$
$$= 2CB^2 \cdot PC^2 \cdot CD^2 : PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2 = 2PC : Gv,$$

следовательно в пределе, при совпадении точек $Q$ и $P$, будет

$$L \cdot QR = QT^2. \tag{5}$$

По умножении этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ получим

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2. \tag{6}$$

Следовательно (предл. VI, след. 1 и 5), центростремительная сила обратно пропорциональна $L \cdot SP^2$, т. е. обратно пропорциональна[45] квадрату расстояния $SP$.

[45] Пользуясь обычным теперь обозначением, эту часть доказательства можно провести так:

$$QR = Px = \frac{a}{a_1} \cdot Pv = \frac{a}{a_1}(a_1 - x),$$

где

$$AC = a, \quad CP = a_1, \quad CD = b_1, \quad Cv = x, \quad RP = Qv = y, \quad PCZ = \alpha.$$

Затем из подобия треугольников $QxT$ и $EPF$:

$$QT = \frac{Qx \cdot PF}{PE} = \frac{Qv \cdot PT}{a} = y \cdot \frac{a_1 \sin \alpha}{a}.$$

Но по уравнению эллипса, отнесенному к сопряженным диаметрам $CD$ и $CP$,

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2),$$

следовательно

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{b_1^2 \sin^2\alpha}{a^2} \cdot \frac{a_1^2 - x^2}{a_1 - x} \cdot \frac{a_1}{a} = \frac{a_1 b_1^2 \sin^2 \alpha}{a^3}(a_1 + x).$$

В пределе, когда точка $Q$ совместится с точкою $P$, будет

$$a_1 + x = 2a_1$$

кроме того, по свойству сопряженных диаметров,

$$a_1^2 b_1^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2$$

следовательно

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{2b^2}{a} = \text{постоянной} = 2p$$

и получится

$$\frac{\varphi}{2c^2} = \frac{QR}{QT^2 \cdot SP^2} = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{SP^2}$$

т. е.

$$\varphi = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{SP^2}$$

где $c$ есть постоянная площадей и $2p$ параметр эллипса.

*То же самое иначе*

Сила, направленная к центру эллипса и такая, что под ее действием тело $P$ описывало бы этот эллипс, пропорциональна $CP$ — расстоянию тела до центра. Проведем $CE$ параллельно касательной $PR$; сила, под действием которой тело могло бы описывать эллипс, направленная в какую-либо точку $S$, будет пропорциональна $\frac{PE^3}{SP^2}$ (лем. VII, след. 3), где $E$ есть пересечение $CE$ и $SP$.

Когда $S$ есть фокус эллипса, то длина $PE$ есть величина постоянная, следовательно сила будет тогда обратно пропорциональна $SP^2$.

Для гиперболы и параболы можно бы было и здесь поступить с тою же краткостью, с которою рассмотрена задача V, но, в виду важности настоящей задачи для дальнейших приложений, не мешает эти два случая подтвердить отдельными самостоятельными доказательствами.

**Предложение XII. Задача VII**

*Тело движется по гиперболе; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу этой кривой.*

Пусть $CA$ и $CB$ (фиг. 22) — полуоси гиперболы, $PG$ и $KD$ — два сопряженных диаметра, $PF$ — перпендикуляр к диаметру $KD$ и $Qv$ — ордината к диаметру $PG$. Проводим $SP$, пересекающую диаметр $DK$ в $E$ и ординату $Qv$ в $x$, и дополняем параллелограмм $QRPx$. Длина $PE$ оказывается равной действительной полуоси $AC$ гиперболы, ибо если провести из другого фокуса гиперболы прямую $HJ$, параллельную $CE$, то по равенству $SC$ и $CH$ будут равны $ES$ и $EJ$, следовательно

$$PE = \frac{1}{2}(PJ - PS) = \frac{1}{2}(PH - PS) = AC$$

так как по параллельности $HJ$ и $PR$ и равенству углов $JPR$ и $HPZ$ расстояние $PJ = PH$.

На $SP$ опускается перпендикуляр $QT$; обозначив через $L$ — параметр гиперболы, т. е. величину $2\frac{BC^2}{AC}$, имеем

$$L \cdot QR : L \cdot Pv = QR : Pv = Px : Pv. \qquad (1)$$

По подобию же треугольников $Pxv$ и $PEC$ будет

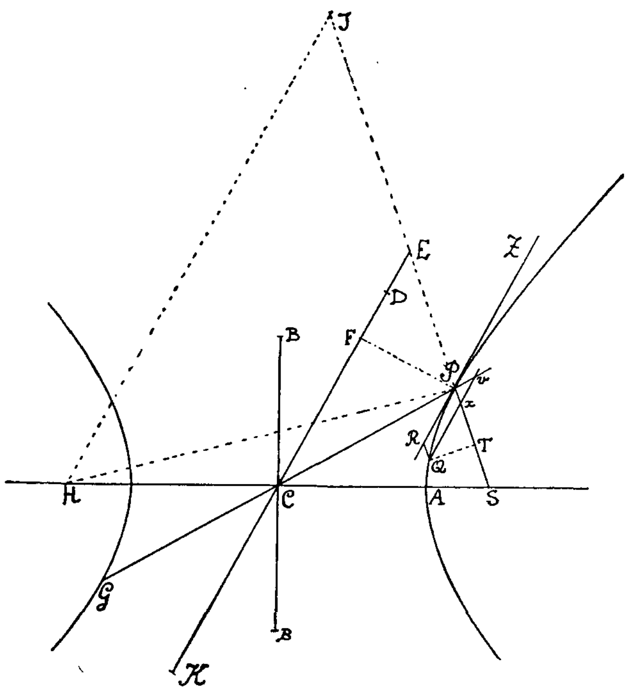
$$Px : Pv = PE : PC = AC : PC.$$

Точно так же будет

$$L \cdot Pv : Gv \cdot Pv = L : Gv \qquad (2)$$

и по свойству гиперболы:

$$Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2. \qquad (3)$$




Фиг. 22.

В пределе (лем. VII, след. 2), когда точки $P$ и $Q$ совместятся, будет

$$Qv^2 : Qx^2 = 1,$$

и, вследствие пропорции $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2$, будет

$$Qv^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : BC^2 \text{ (лем. XII)}. \qquad (4)$$

По перемножении пропорций 1, 2, 3, 4 получится

$$L \cdot QR : QT^2 = AC \cdot L \cdot PC^2 \cdot CD^2 : PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot BC^2,$$

но

$$L \cdot AC = 2BC^2$$

следовательно будет

$$L \cdot QR : QT^2 = 2PC : Gv.$$

Но в пределе, при совпадении точек $Q$ и $P$, величины $Gv$ и $2PC$ станут равными, значит будет

$$L \cdot QR = QT^2. \tag{5}$$

Умножив это равенство на $\frac{SP^2}{QR}$, получим

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = L \cdot SP^2$$

которое показывает (предл. VI, след. 1 и 5), что центростремительная сила обратно пропорциональна $L \cdot SP^2$, т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния[46] $SP$.

*То же самое иначе*

Уже была найдена сила, направленная к центру гиперболы; она оказалась пропорциональной расстоянию $PC$, следовательно (лем. VII, след. 3) сила, направленная к фокусу $S$, будет пропорциональна $\frac{PE^3}{SP^2}$; так как $PE$ постоянная, то сила обратно пропорциональна $SP^2$.

Подобным же образом найдется, что тело под действием такой же силы, но центробежной, будет описывать другую ветвь гиперболы.

### Лемма XIII

*Параметр параболы, относящийся к какой-либо вершине, равен учетверенному расстоянию этой вершины до фокуса.*

Следует из теории конических сечений.[47]

### Лемма XIV

*Перпендикуляр, опущенный из фокуса параболы на касательную к ней, есть среднее пропорциональное между расстояниями от фокуса до точки касания и до главной вершины параболы.*

---

[46] Сохраняя обозначения примечания 45, увидим, что для гиперболы выкладка остается совершенно такою же, как для эллипса, с тою лишь разницею, что будет

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(x^2 - a_1^2)$$

и

$$Pv = x - a_1.$$

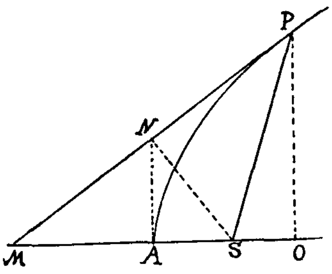
[47] Уравнение параболы, отнесенной к касательной и диаметру, с ней сопряженному, есть

$$y^2 = 2p_1 x.$$

Входящая в это уравнение величина $2p_1$ и есть «параметр, относящийся к вершине, совпадающей с точкою касания». Чтобы получить геометрическое представление этой линии, стоит только заметить, что параметр есть длина хорды, проведенной через фокус параллельно оси ординат. Так как для фокуса $S$ (фиг. 23) абсцисса $MS = SP$ по свойству касательной, то, полагая $SP = r$, имеем для соответствующей ординаты:

$$y^2 = 2p_1 r = p_1^2$$

Пусть $AP$ (фиг. 23) есть парабола, $S$ — ее фокус, $A$ — главная вершина, $P$ — точка касания, $PO$ — ордината этой точки, $PM$ — касательная, пересекающая ось в точке $M$, и $SN$ — перпендикуляр, опущенный из фокуса на касательную. Проведем $AN$, тогда вследствие равенств $MS = SP$, $NP = MN$, $MA = AO$, прямые $AN$ и $OP$ между собою параллельны и треугольник $SAN$ прямоугольный при $A$ и подобен равным треугольникам $SNM$ и $SNP$, следовательно



Фиг. 23.

$$SP : SN = SN : SA,$$

что и требовалось доказать.

*Следствие 1.* $SP^2 : SN^2 = SP : SA$.

*Следствие 2.* Так как $SA$ постоянное, то $SN^2$ пропорционально $PS$.

*Следствие 3.* Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные к параболе, есть прямая $AN$ — касательная к параболе в главной вершине.

### Предложение XIII. Задача VIII

*Тело движется по параболе; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу этой кривой.*

Сохраним построение предыдущей леммы, и пусть $P$ (фиг. 24) — место тела на параболе; из $Q$, его места, куда бы оно перешло в ближайшее время, проводятся: прямые $QR$ параллельно и $QT$ перпендикулярно к $SP$ и $Qv$, параллельная касательной в точке $P$ и пересекающая диаметр $PG$ в точке $v$ и радиус $SP$ в точке $x$. Так как треугольник $xPv$ подобен треугольнику $SPM$, в последнем же стороны $SP$ и $SM$ равны, то и в первом

$$Px = Pv = QR.$$

---

значит,

$$p_1 = 2r$$

и следовательно, параметр

$$2p_1 = 4r = 4SP.$$

Если через точку $P$ провести прямую параллельно оси до пересечения ее с направляющей параболы, то эта длина равна $SP$, т. е. составит $\frac{1}{4}$ параметра, соответствующего этой побочной вершине, совершенно так же, как $SA$ составляет $\frac{1}{4}$ главного параметра.

По свойству параболы:

$$Qv^2 = 4PS \cdot Pv = 4PS \cdot QR,$$

ибо, по лемме XIII, $4PS$ равно параметру, относящемуся к вершине $P$ **или** диаметру $Pv$. При совмещении точек $P$ и $Q$, отношение длин $Qv$ и $Qx$ в пределе равно единице (лем. VII, след. 2), и следовательно, в этом случае будет

$$Qx^2 = 4PS \cdot QR.$$

По подобию же треугольников $QxT$ и $SPN$ будет

$$Qx^2 : QT^2 = PS^2 : SN^2 = PS : SA \text{ (лем. XIV, след. 1)}$$

или

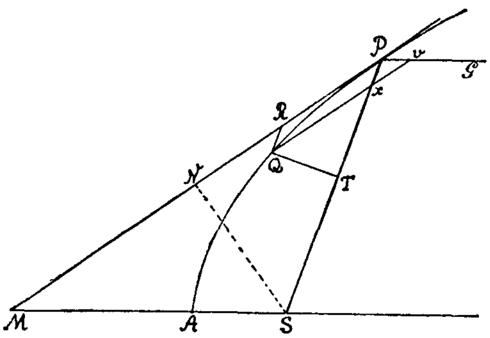
$$Qx^2 : QT^2 = 4PS \cdot QR : 4SA \cdot QR,$$

и значит,

$$QT^2 = 4SA \cdot QR \text{ (Эвкл. Элем., кн. V, пр. IX). (5)}$$

По умножении этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ получится[48]

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = 4SA \cdot SP^2,$$




Фиг. 24.

следовательно (предл. VI, след. 1 и 5) центростремительная сила обратно пропорциональна $4SA \cdot SP^2$, т. е. по постоянству $4SA$ обратно пропорциональна квадрату расстояния.

---

[48] Для параболы эта часть доказательства может быть проведена так: в пределе

$$Qx^2 = Qv^2 = \frac{QT}{\sin^2\alpha} = 4PS \cdot QR$$

следовательно

$$\frac{QT^2}{QR} = 4PS \sin^2\alpha,$$

где $\alpha$ есть угол между касательной в точке $P$ и осью. Из треугольников $PSN$ и $ASN$ имеем:

$$SN = PS \cdot \sin\alpha; \quad AS = SN \cdot \sin\alpha = PS \cdot \sin\alpha = \frac{p}{2}$$

где $2p$ — главный параметр, значит

$$\frac{QT^2}{QR} = 2p = L$$

и

$$\frac{QT^2}{QR} \cdot SP^2 = 2p \cdot SP^2 = 4AS \cdot SP^2.$$

*Следствие 1.* Из последних трех предложений следует, что если какое-нибудь тело $P$ выходит из места $P$ по направлению прямой $PR$ с какою-либо скоростью и находится под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной квадратам расстояний до центра $S$, то это тело будет двигаться по коническому сечению, коего фокус лежит в центре сил, и наоборот; ибо при заданных: фокусе, точке касания и положении касательной можно построить лишь одно коническое сечение, имеющее в этой точке заданную кривизну. Кривизна же найдется по заданной скорости и известной центростремительной силе: под действием той же центростремительной силы и при той же скорости не могут быть описываемы две различные орбиты, касающиеся друг друга.

*Следствие 2.* Если скорость, с которою тело выходит из места $P$, такова, что в течение весьма малого промежутка времени оно прошло бы отрезок $PR$, центростремительная же сила в течение того же времени могла бы заставить тело пройти путь $QR$, то сказанное тело будет двигаться по такому коническому сечению, коего главный параметр равен пределу отношения $\frac{QT^2}{QR}$ при бесконечном уменьшении длин $QT$ и $RR$ [см. форм. (5) доказательств предложений XI, XII и XIII]. В этом следствии я отношу круг к эллипсам и исключаю тот случай, когда тело падает к центру по прямой линии.

### Предложение XIV. Теорема VI

*Если несколько тел обращаются около общего центра сил, причем центростремительные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния до центра, то главные параметры орбит пропорциональны квадратам площадей, описываемых проведенными к телам радиусами в одно и то же время.* [49]

---

[49] Теоремы предложений XIV, XV и XVI непосредственно вытекают из выражений:

$$\varphi = \frac{2c^2}{SP^2} \cdot \frac{QR}{QT^2}; \quad \frac{QT^2}{QR} = 2p = \frac{2b^2}{a}; \quad c = \frac{2\pi ab}{\tau}$$

в которых $c$ есть постоянная площадей, $2p = L$ — параметр, $a$ — большая и $b$ — малая полуоси эллипса, $\tau$ — время оборота.

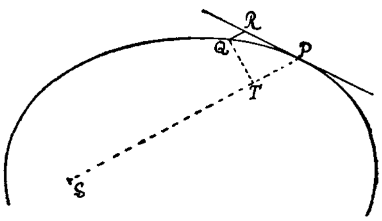
Из этих формул следует

$$\varphi = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{PS^2}$$

следовательно

$$\frac{c^2}{p} = K = \text{постоянной},$$

Параметр $L = \frac{QT^2}{QR}$, предполагая, что точки $P$ и $Q$ (фиг. 25) сливаются (предл. XIII, след. 2). Но отрезочек $QR$ пропорционален центростремительной силе, т. е. обратно пропорционален $SP^2$, следовательно $\frac{QT^2}{QR}$ будет пропорционально $QT^2 \cdot SP^2$, т. е. параметр $L$ пропорционален квадрату площади $QT \cdot SP$.



Фиг. 25.

*Следствие.* Так как полная площадь эллипса пропорциональна произведению его полуосей, то она пропорциональна произведению корня квадратного из параметра, умноженному на время оборота, ибо эта площадь пропорциональна площади $QS \cdot SP$, описываемой в заданный промежуток времени, умноженной на время оборота.

### Предложение XV. Теорема VII

*При тех же предположениях утверждаю, что времена оборотов по эллипсам относятся между собою, как большие полуоси в степени* $\frac{3}{2}$.

Так как малая ось есть среднее пропорциональное между большою осью и параметром, то произведение осей пропорционально корню из параметра и большой оси в степени $\frac{3}{2}$, но это же произведение пропорционально (XIV, след.) корню квадратному из параметра, умноженному на

---

отсюда:

$$c = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \sqrt{2p} \quad (\text{предл. XIV}),$$

$$K = \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{\tau^2 \cdot \frac{b^2}{a}} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{\tau^2}$$

следовательно

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad (\text{предл. XV}).$$

Наконец,

$$c = v \cdot SY$$

значит

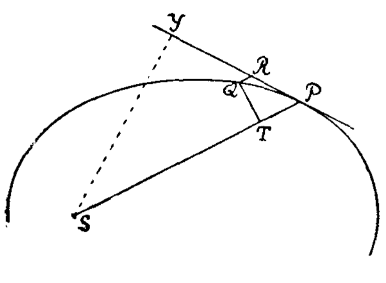
$$v = \frac{c}{SY} = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{SY} \quad (\text{предл. XVI}).$$

время оборота; по сокращении корня из параметра останется, что время оборота пропорционально степени $\frac{3}{2}$ большой оси.

*Следствие.* Отсюда следует, что времена оборотов по эллипсам равны временам оборотов по кругам, коих диаметры равны большим осям эллипсов.

### Предложение XVI. Теорема VIII

*При тех же предположениях, если через место тела на его орбите провести к ней касательную и опустить на нее из фокуса перпендикуляр, то скорость тела прямо пропорциональна корню квадратному из параметра орбиты и обратно пропорциональна этому перпендикуляру.*




Фиг. 26.

Если из фокуса опущен перпендикуляр $SY$ (фиг. 26) на касательную $PR$ к орбите, то надо доказать, что скорость тела будет обратно пропорциональна корню квадратному из величины $\frac{SY^2}{L}$.

Скорость эта пропорциональна весьма малой дуге $PQ$, описываемой в заданный весьма малый промежуток времени, т. е. (лем. VII) пропорциональна касательной $PR$, а так как

$$PR : QT = SP : SY$$

то скорость пропорциональна величине $\frac{QT \cdot SP}{SY}$, но $QT \cdot SP$ пропорционально площади, описываемой в заданный промежуток времени, которая (предл. XIV) пропорциональна корню квадратному из параметра.

*Следствие 1.* Главные параметры пропорциональны квадрату произведения скорости на перпендикуляр $SY$.

*Следствие 2.* Скорости тел в их наименьшем и наибольшем расстояниях от фокуса находятся в обратном отношении расстояний до фокуса и в прямом отношении корней квадратных из параметров, ибо при этих положениях тел перпендикуляры на касательные и суть самые расстояния тел до фокуса.

*Следствие 3.* Следовательно, при движении тела по коническому сечению, скорость в наибольшем или наименьшем расстоянии от фокуса относится к скорости движения по кругу, радиус коего равен этому расстоянию, как корень квадратный из параметра относится к корню из диаметра круга, т. е. к корню из удвоенного расстояния, упомянутого выше.[50]

*Следствие 4.* Для тела, обращающегося по эллипсу, скорость в среднем расстоянии от фокуса та же самая, как и для тела, обращающегося по кругу того же радиуса, т. е. (предл. IV, след. 6) обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния, ибо для этих положений перпендикуляры равны длине малой полуоси, которая есть среднее пропорциональное между большою полуосью и полупараметром; произведение корня из параметра на обратную величину перпендикуляра и дает величину, обратную корню из расстояния.[51]

*Следствие 5.* Для той же кривой или даже для различных кривых, но у которых параметры равны, скорость тела обратно пропорциональна расстоянию от фокуса до касательной.

*Следствие 6.* Для параболы скорость обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния тела до фокуса, для эллипса она изменяется более, для гиперболы — менее, нежели в этом отношении. Ибо (лем. XIV, след. 2) для параболы перпендикуляр, опущенный из фокуса на касательную, пропорционален корню квадратному из расстояния. Для гиперболы перпендикуляр изменяется менее, для эллипса — более, нежели этот корень.[52]

---

50 Так как $\varphi = \frac{K}{r^2}$, где $r$ есть расстояние тела до центра, при движении же по кругу в том же расстоянии должно быть

$$\varphi = \frac{V_0^2}{r}$$

то

$$V_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}}.$$

При прохождении через главные вершины, скорость $v$, при движении по коническому сечению, есть

$$v = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{r}$$

отсюда

$$v : V_0 = \sqrt{2p} : \sqrt{2r}.$$

51 В этом случае $SY = b$, следовательно

$$= \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{b} = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2b^2}{a}}}{b} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{a}} = V_0 \quad (\text{при } r = a).$$

52 В лемме XIV показано, что перпендикуляр на касательную к параболе

$$SN = \sqrt{SA \cdot SP} = \frac{1}{2}\sqrt{2p} \cdot \sqrt{r},$$

где $2p$ — параметр и $r = SP$. Для эллипса перпендикуляр изменяется между пределами $a + c$ и $a - c$ или между пределами $a(1 + e)$ и $a(1 - e)$, и значит, отношение наибольшего его

*Следствие 7.* Для параболы скорость тела в каком-либо расстоянии от фокуса относится к скорости тела, обращающегося в том же расстоянии по кругу, как $\sqrt{2}$ относится к 1. Для эллипса это отношение менее, для гиперболы — более. Ибо по следствию 2 этой теоремы скорость в вершине параболы находится в этом отношении, по 6-му же следствию этой теоремы и по предложению IV это отношение сохраняется для всех расстояний. Таким образом для параболы скорость повсюду равна скорости на круге половинного расстояния, для эллипса скорость менее, для гиперболы — более.[53]

*Следствие 8.* Скорость тела, обращающегося по любому коническому сечению, так относится к скорости обращения по кругу, радиус которого равен половине параметра сечения, как этот радиус относится к перпендикуляру, опущенному из фокуса на касательную к сечению. Явствует из следствия 5.

*Следствие 9.* Так как (предл. IV, след. 6) скорость обращения по упомянутому в предыдущем следствии кругу находится к скорости обращения по

---

значения к наименьшему есть $\frac{1+e}{1-e}$, где $c = ae$ — эксцентриситет эллипса. Это есть вместе с тем и отношение наибольшего расстояния к наименьшему, и очевидно, что $\frac{1+e}{1-e} > \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, т. е. перпендикуляр изменяется в более широких пределах, нежели корень из расстояния.

Для гиперболы перпендикуляр остается всегда конечным, расстояние же может изменяться до бесконечности.

[53] Скорость при движении по коническому сечению выражается (прим. 49) формулою

$$v = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{SY}.$$

Для параболы:

$$SY = SN = \frac{1}{2}\sqrt{2p} \cdot \sqrt{r},$$

и следовательно, скорость

$$v = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}} = \sqrt{2} \cdot V_0$$

где $V_0$ — скорость движения по кругу в расстоянии $r$.

Скорость движения при параболе более скорости движения по эллипсу и менее, нежели по гиперболе (см. доказательство предл. XVII), следовательно критерии орбит суть:

$$\text{Эллипс} \quad \frac{v}{V_0} < \sqrt{2}$$

$$\text{Парабола} \quad \frac{v}{V_0} = \sqrt{2}$$

$$\text{Гипербола} \quad \frac{v}{V_0} > \sqrt{2}$$

причем

$$V_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}}.$$

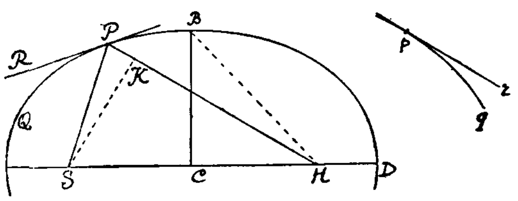
$K$ — постоянная, определяющая «абсолютную силу центра».

какому-либо кругу в обратном отношении корней квадратных из расстояний, то отношение скорости обращения по коническому сечению к скорости обращения по кругу в том же расстоянии равно отношению средней пропорциональной между этим общим расстоянием и половиною параметра к перпендикуляру, опущенному из фокуса на касательную к коническому сечению.

### Предложение XVII. Задача IX

*Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра и что абсолютная величина этой силы известна, требуется найти кривую, которую опишет тело, выходящее из заданного места с заданною скоростью.*

Пусть центростремительная сила, направленная к точке $S$ (фиг. 27), такова, что тело $p$, обращаясь по заданной орбите $pq$, имеет известную скорость в заданной точке $p$. Из места $P$ по направлению $PR$ выходит другое тело $P$, имея заданную скорость. Центростремительная сила уклоняет его от прямой $PR$ и заставляет двигаться по коническому сечению $PQ$, которое касается прямой $PR$ в точке $P$.




Фиг. 27.

Пусть прямая $pr$ касается орбиты $pq$ в точке $p$; если вообразить перпендикуляры, опущенные из точки $S$ на касательную $pr$ и $PR$, то (предл. XVI, след. 1) параметр искомого сечения находится к параметру заданной орбиты в отношении квадратов произведений скоростей и перпендикуляров, следовательно этот параметр определится.[54]

Пусть $L$ есть параметр искомого сечения; сверх того, для этого сечения известен и фокус $S$. Дополнение угла $RPS$ до двух прямых будет

---

[54] Задание орбиты, описываемой телом, точки на ней и скорости в этой точке определяет «абсолютную силу центра», как то следует из формул, приведенных в примечании 49 и выражающих уравнениями высказанное в «Началах» пропорциями и словами. Как показано в примечании 49, величина $\frac{c^2}{p}$, где $c$ есть постоянная площадей и $2p$—параметр орбиты, есть величина постоянная, поэтому, обозначая, как в тексте, через $L$—параметр искомой орбиты, через $V$ и $H$—скорость и длину перпендикуляра из фокуса на касательную и через $l$, $v$, $h$—соответствующие величины для данной орбиты, будем иметь пропорцию $\frac{V^2H^2}{L}=\frac{v^2h^2}{l}$, из которой и найдется $L$.

угол $RPH$, следовательно будет известно положение прямой $PH$, на которой находится второй фокус $H$. Опустив из фокуса $S$ на $PH$ перпендикуляр $SK$, вообразим, что построена малая полуось $BC$.

Кроме того, будет

$$SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = SP^2 - 2KP \cdot PH + PH^2 =$$
$$= (SP + PH)^2 - L(SP + PH) = SP^2 + 2SP \cdot PH + PH^2 - L(SP + PH).$$

Отсюда следует

$$L \cdot (SP + PH) = 2SP \cdot PH + 2KP \cdot PH$$

иначе

$$(SP + PH) : PH = 2(SP + KP) : L$$

следовательно $PH$ будет известно как по величине, так и по положению.

Затем, если окажется, что скорость тела в точке $P$ будет такова, что параметр $L$ будет меньше, нежели $2(SP + KP)$, то $PH$ расположится по ту же сторону от касательной $PR$, как и прямая $PS$, и значит, искомая кривая будет эллипс, который и определится по фокусам $S$ и $H$ и по большой оси $SP + PH$. Если же скорость тела будет такова, что параметр $L$ окажется равным $2(SP + KP)$, то длина $PH$ будет бесконечной, и следовательно, кривая будет параболой, которой ось $SH$ параллельна $PK$ и, следовательно, известна. Если же тело выходит из точки $P$ с еще бо́льшею скоростью, то длину $PH$ придется откладывать по другую сторону касательной, и тогда окажется, что касательная проходит между фокусами, т. е. кривая будет гиперболой, коей действительная ось равна разности $SP - PH$ и, значит, будет известна. Если тело будет двигаться по коническому сечению, определяемому как здесь показано, то в предложениях XI, XII и XIII доказано, что центростремительная сила будет обратно пропорциональна квадратам расстояний тела до центра сил $S$ и, следовательно, кривая $PR$ представит действительно ту, которую тело будет описывать под действием сказанной силы, выйдя из заданной точки с заданной скоростью.

*Следствие 1.* Таким образом для всякого конического сечения по заданной главной вершине $D$, параметру $L$ и фокусу $S$ второй фокус $H$ найдется взяв

$$DH : DS = L : (4DS - L)$$

ибо пропорция

$$(SP + PH) : PH = 2(SP + KP) : L$$

в рассматриваемом случае, т. е. когда точка $P$ находится в $D$, будет

$$(DS + DH) : DH = 4DS : L$$

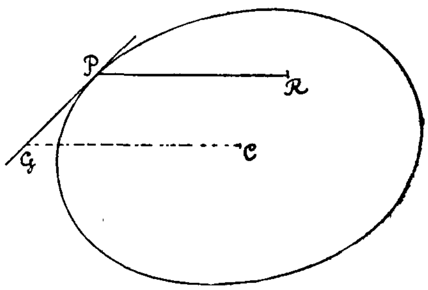
из которой следует

$$DS:DH=(4DS-L):L.$$

*Следствие 2.* Отсюда следует, что если задается скорость в главной вершине $D$, то орбита находится проще, а именно взяв параметр так, чтобы его отношение к удвоенному расстоянию $DS$ было равно квадрату отношения заданной скорости к скорости обращения по кругу в расстоянии $DS$ (предл. XVI, след. 3), затем определив $DH$ по пропорции

$$DH:DS=L:(4DS-L).$$

*Следствие 3.* Если тело, движущееся по коническому сечению, будет сбито с своей орбиты каким-либо натиском, то можно определить ту орбиту,[55] по которой оно будет затем продолжать свой путь. Ибо, совокупив количество движения, которое тело имело, с тем, которое ему сообщено натиском, получим количество движения, которым тело после натиска будет обладать в данном месте по направлению заданной по своему положению прямой.




Фиг. 28.

*Следствие 4.* Если же тело непрерывно возмущается какою-либо внешнею силою, то его путь может быть найден приближенно, определяя те изменения, которые производит сила в каких-либо точках и рассчитывая изменения для промежуточных мест по ряду пропорций.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Если тело $P$ под действием центростремительной силы, направленной в данную точку $R$ (фиг. 28), движется по периметру какого-либо заданного конического сечения, коего центр есть $C$, и требуется найти закон центростремительной силы, то надо провести прямую $CG$, параллельную радиусу $RP$ и пересекающую касательную $PG$ в $G$, тогда искомая сила (X, 1 и поуч. и VII, 3) будет пропорциональна $\frac{CG^2}{RP^2}$.

[55] В этом следствии и в следующем указывается общий ход расчета (по крайней мере числового) возмущения, производимого, напр., планетой на комету, т. е. каким образом по производимому изменению скорости по величине и направлению и изменениям положения тела определять изменения элементов орбиты.

Дальнейшее развитие этого расчета дано в примечании 116 в конце первой книги.

## ОТДЕЛ IV

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ, ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОРБИТ ПРИ ЗАДАННОМ ФОКУСЕ [56]

### Лемма XV

*Если из обоих фокусов $S$ и $H$ эллипса или гиперболы провести к какой-либо точке $V$ две прямые $SV$ и $HV$, из коих вторая равна главной оси кривой, т. е. той, на которой расположены фокусы, и из середины $T$ первой прямой $SV$ восставить к ней перпендикуляр $TR$, то он будет касаться кривой, и наоборот, если этот перпендикуляр касается кривой, то $HV$ равно главной оси.* [57]

Пусть пересечение перпендикуляра с прямою $HV$ (фиг. 29) или ее продолжением есть $R$, проведем $SR$; по равенству $TS = TV$ будут равны и длины $SR$ и $RV$ и углы $TRS$ и $TRV$, следовательно точка $R$ лежит на коническом сечении и перпендикуляр $TR$ касается этого сечения, и обратно.

### Предложение XVIII. Задача X

*При заданных фокусе и длине главной оси построить эллипсы и гиперболы, проходящие через данные точки и касающиеся данных прямых.*

Пусть $S$ (фиг. 30) есть данный фокус, $AB$ — длина главной оси, $P$ — точка, через которую кривая должна проходить, и $TR$ — прямая, которой она должна касаться. Центром $P$ и радиусом, равным $AB - SP$ для эллипса и $AB + SP$

---

[56] Этот отдел и следующий — чисто геометрические и заключают в себе решение задач об определении конических сечений по данным их точкам или касательным. В предложении XLI третьей книги, в котором изложен способ определения орбит комет, Ньютон говорит: «я пробовал решать разными способами эту задачу, которая весьма трудна, для этого я и решил задачи, приведенные в первой книге, но затем я пришел к более простому решению, излагаемому ниже». Таким образом все содержащееся в отделах IV и V не находит дальнейших непосредственных приложений в «Началах», и эти два вводные отдела, представляя интерес с точки зрения геометрии, не представляют такового для механики или физики.

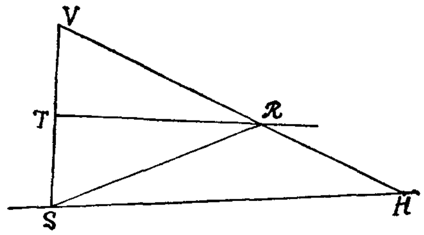
Приводя решение этих задач, Ньютон всегда поступает так: он описывает то построение, которое для решения задачи следует выполнить, и затем, предпослав фразу: «dico factum» — «утверждаю сделанное», доказывает справедливость даваемого им решения. Анализа задачи, приводящего к описываемому построению, не дается.

[57] Эта лемма включена, повидимому, потому, что у Аполлония дается совершенно иной способ построения касательной, не пользуясь свойствами фокусов и направляющего круга.

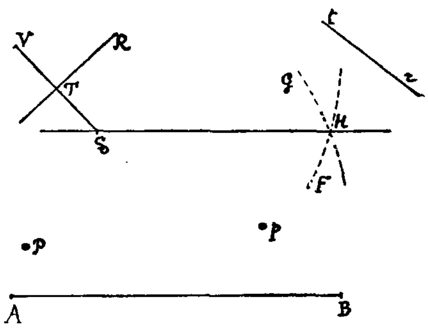
Для дальнейших задач необходимо постоянно иметь в виду, что геометрическое место точек $V$ для эллипса и гиперболы есть круг, описанный из другого фокуса $H$, как из центра, радиусом, равным длине главной оси (направляющий круг). Геометрическое место точек $T$ есть также круг, описанный на главной оси, как на диаметре; это последнее свойство указано в теоремах 49 и 50 книги III Аполлония.

для гиперболы, проводится круг $HG$. На касательную $TR$ опускается перпендикуляр $ST$ и продолжается до $V$ так, чтобы было $TV = ST$. Точкою $V$, как центром, и радиусом $AB$ описывается круг $FH$. Таким образом, когда задано две точки $P$ и $p$ или две касательные $TR$ и $tr$, или же точка $P$ и касательная $TR$, то будет проведено два круга.

Пусть $H$ — их пересечение; по фокусам $S$ и $H$ и длине $AB$ главной оси и строится кривая, которая




Фиг. 29




Фиг. 30.

и есть искомая. Ибо эта кривая (так как $SP + PH$ для эллипса и $HP - SP$ для гиперболы равно оси) проходит через точку $P$, по предыдущей же лемме она касается прямой $TR$.

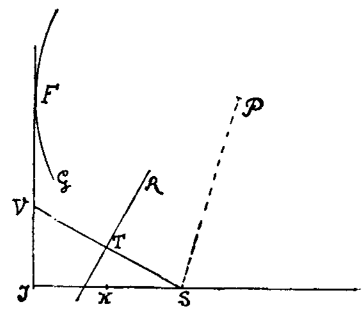
Рассуждая подобным же образом, покажем, что она проходит или через обе точки $P$ и $p$, или будет касаться двух прямых $TR$ и $tr$.

### Предложение XIX. Задача XI

*При данном фокусе определить параболу, проходящую через заданные точки или касающуюся заданных прямых.*

Пусть $S$ (фиг. 31) — фокус, $P$ — точка, $TR$ — касательная к искомой кривой. Центром $P$ и радиусом $PS$ описывается круг $FG$, из фокуса на касательную опускается перпендикуляр и продолжается до $V$ так, чтобы было

$$TV = ST.$$



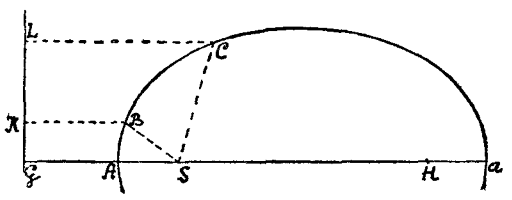

Фиг. 31.

Подобным же образом надо построить и второй круг $fg$, когда дана другая точка $p$, или вторую точку $v$, когда дана другая касательная $tr$. Затем надо провести прямую $JF$,[58] которая или касается обоих кругов $FG$ и $fg$, когда даны две точки $P$ и $p$, или проходит через точки $V$ и $v$, когда даны две касательных $TR$ и $tr$, или которая проходит через точку $V$ и касается круга $FG$, когда даны точка $P$ и касательная $TR$. На прямую $FJ$ опускается перпендикуляр $SJ$ и разделяется в точке $K$ пополам. По оси $SK$ и вершине $K$ строится парабола, которая и есть искомая. Ибо такая парабола по равенству $SK$ и $JK$, $SP$ и $FP$ проходит через точку $P$, и по равенству $ST$ и $TV$ и по перпендикулярности $ST$ и $TR$ касается (лем. XIV, след. 3) до прямой $TR$.

### Предложение XX. Задача XII

*При заданном фокусе построить коническое сечение, проходящее через заданные точки или касающееся данных по положению прямых и подобное данному.*

*Случай 1.* При данном фокусе $S$ (фиг. 32) требуется построить кривую $ABC$, проходящую через две данные точки $B$ и $C$. Так как эта кривая должна быть подобна данной, то известно отношение ее главной оси к расстоянию между фокусами. В этом отношении возьми длины $KB$ к $BS$ и $LC$ к $CS$, опиши два круга, и к общей к ним касательной[59] $KL$ проведи через $S$ перпендикуляр $SG$ и рассеки его в точках $A$ и $a$ так, чтобы было




Фиг. 32.

$$GA:AS = Ga:aS = KB:BS;$$

по оси $Aa$ и вершинам $A$, $a$ строй кривую, она и есть искомая. Пусть $H$ есть второй фокус построенной кривой; так как

$$GA:AS = Ga:aS$$

то будет и

$$(Ga - GA):(aS - AS) = GA:AS,$$

т. е.

$$Aa:SH = GA:AS$$

[58] В лемме XIV показано, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные к параболе, есть касательная в ее вершине, отсюда следует, что геометрическое место точек $V$, симметричных с фокусом, относительно касательной есть направляющая параболы.

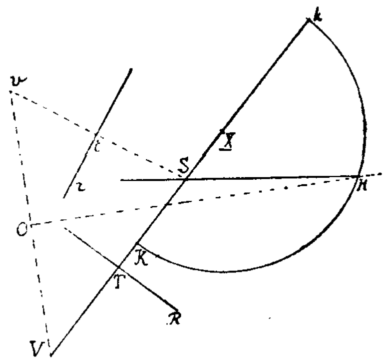
[59] Эта прямая есть направляющая эллипса или гиперболы. Зная фокус и направляющую, и получим кривую.

т. е. отношение большой оси к расстоянию между фокусами будет заданное, и следовательно, построенная кривая будет подобна данной, и так как отношения $KB:BS$ и $LC:CS$ равны предыдущему, то эта кривая пройдет через точки $B$ и $C$, как это следует из учения о конических сечениях.

*Случай 2.* При заданном фокусе $S$ (фиг. 33) требуется построить кривую, касающуюся прямых $TR$ и $tr$ и подобную данной. Из фокуса на касательные опускаются перпендикуляры $ST$ и $St$ и продолжаются до $V$ и $v$ так, чтобы было $TV = ST$ и $tv = St$. Через середину $O$ прямой $Vv$ проводится к ней перпендикуляр $OH$, неопределенно продолженный, продолженная прямая $VS$ рассекается в точках $K$ и $k$ так, чтобы было

$$VK:KS = Vk:kS = a:c$$

где $a$ есть длина главной оси искомой кривой и $c$—расстояние между фокусами ее. На диаметре $Kk$ строится круг,[60] пересекающий $OH$ в точке $H$, после чего по фокусам $S$ и $H$ и главной оси $VH$ строится кривая, которая и будет искомой. Ибо, если разделить $Kk$ в точке $X$ пополам, и провести $HX$, $HS$, $HV$, $Hv$ и так как по построению




Фиг. 33.

$$VK:KS = Vk:kS$$

следовательно и

$$(VK + Vk):(KS + kS) = (Vk - VK):(kS - KS)$$

т. е.

$$2VX:2KX = 2KX:2SX$$

иначе

$$VX:HX = HX:SX$$

то треугольники $VXH$ и $HXS$ подобны, и следовательно, будет

$$VH:SH = VX:XH = VK:KS$$

т. е. отношение главной оси искомой кривой к расстоянию между фокусами как раз требуемое, а так как, кроме того, $VH$ и $vH$ равны между собою

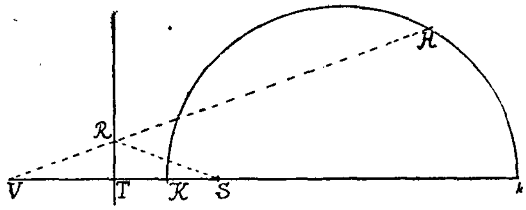
[60] Точки $v$ и $V$ принадлежат направляющему кругу, следовательно фокус $H$ лежит на перпендикуляре, восстановленном из средины хорды $vV$. Кроме того, так как отношение расстояний точки $H$ до точек $S$ и $V$ должно быть равно отношению $c:a$, т. е. задано, то точка $H$ должна лежать на круге, построенном на $Kk$, как на диаметре, ибо этот круг есть геометрическое место таких точек; отсюда и следует построение, данное в тексте.

и главной оси, прямые же $VS$ и $vS$ разделяются перпендикулярами к ним $TR$ и $tr$ пополам, то проведенная кривая касается этих последних (лем. XV).

*Случай 3.* При заданном фокусе надо построить такую кривую, которая касалась бы прямой $TR$ в данной точке $R$ (фиг. 34) и была бы подобна данной кривой. На прямую $TR$ опускается перпендикуляр $ST$ и продолжается до $V$ так, чтобы было $TV = ST$. Неопределенно продолженная прямая $VS$ рассекается в точках $k$ и $K$ так, чтобы было

$$VK : SK = Vk : Sk = a : c. \qquad (*)$$

На диаметре $Kk$ описывается круг,[61] пересекающий продолженную прямую $VR$ в точке $H$. По фокусам $S$ и $H$ и по главной оси $VH$ строится кривая, которая и будет искомой. Ибо из пропорции (*), подобно тому как при доказательстве второго случая, следует пропорция




Фиг. 34.

$$VH : SH = VK : SK = a : c$$

показывающая, что кривая подобна заданной, и так как прямая $TR$ разделяет угол $VRS$ пополам, то она касается кривой в точке $R$.

*Случай 4.* При заданном фокусе $S$ (фиг. 35) требуется построить кривую $APB$, которая касается прямой $TR$, проходит через точку $P$, не лежащую на этой прямой, и подобна данной кривой $apb$, коей главная ось $ab$ и фокусы $s$ и $h$.

На касательную опускается перпендикуляр $ST$ и продолжается до точки $V$ так, чтобы было $TV = ST$, и строятся углы $hsq$ и $shq$, соответственно равные углам $VSP$ и $SVP$. Центром $q$ и радиусом, который так относится к $ab$, как $SP$ к $VS$, описывается круг, пересекающий кривую $apb$ в $p$. Соединив $sp$, проводят $SH$ так, чтобы было

$$SH : sh = SP : sp$$

[61] Точка $V$ принадлежит направляющему кругу, значит второй фокус $H$ лежит на прямой $VR$. Кроме того, отношение

$$VH : SH = a : c,$$

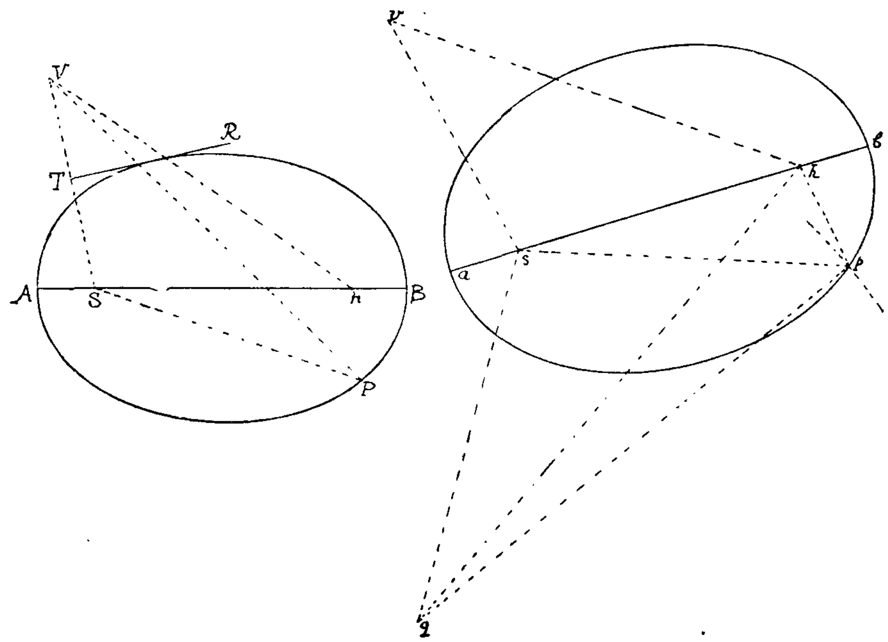
т. е. постоянное, следовательно точка $H$ лежит и на круге $Kk$, отсюда и следует построение, данное в тексте.

и чтобы угол $PSH = psh$ и $VSH = psq$, после чего по фокусам $S$ и $H$ и главной оси $AB$, равной $VH$, и строится кривая, которая и есть искомая. Ибо, если провести $sv$ так, чтобы было

$$sv : sp = sh : sq$$

и чтобы угол $vsp = hsq$ и $vsh = psq$, тогда треугольники $svh$ и $spq$ и $VSP$ и $hsq$ будут подобны и будет

$$vh : pq = sh : sq = VS : SP = ab : pq,$$




Фиг. 35.

следовательно

$$vh = ab.$$

Далее по подобию треугольников $VSH$ и $vsh$ будет

$$VH : SH = vh : sh = ab : sh,$$

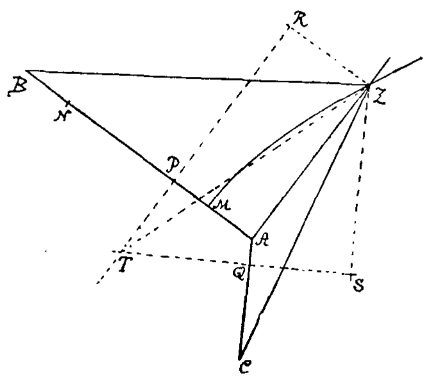
т. е. отношение оси $VH$ к фокусному расстоянию $SH$ построенной кривой равно таковому же отношению для заданной $apb$, следовательно эти кривые подобны. Кроме того, кривая $APB$ пройдет через точку $P$, ибо треугольник $PSH$ подобен треугольнику $psh$, а так как $VH$ равно главной оси и $VS$

перпендикулярною к ней $TR$ разделяется пополам, то $TR$ касается построенной кривой.[62]

## Лемма XVI

*Из трех заданных точек провести к четвертой незаданной три прямые так, чтобы их разности были или заданные, или равны нулю.*

*Случай 1.* Пусть $A$, $B$, $C$ (фиг. 36) — три заданные точки и $Z$ — искомая четвертая. Так как разность $BZ - AZ$ задана, то точка $Z$ будет находиться на гиперболе, коей фокусы суть $A$ и $B$ и коей ось равна сказанной разности. Пусть эта ось есть $MN$. Возьмем точку $P$ так, чтобы было



Фиг. 36.

$$PM : MA = MN : AB;$$

восставь перпендикуляр $PR$ и проведи $ZR$ перпендикулярно к $PR$, тогда по свойству гиперболы будет

$$ZR : AZ = MN : AB.$$

Кроме того, точка $Z$ лежит и на другой гиперболе, коей фокусы суть $A$ и $C$ и главная ось коей равна разности $CZ - AZ$; следовательно, можно провести прямую $QS$ перпендикулярно к $AC$, подобно тому как проведена прямая $PR$, т. е. что расстояние точки $Z$ гиперболы до этой прямой $QS$ будет находиться в постоянном отношении к расстоянию этой точки до фокуса, т. е. будет

$$ZS : AZ = (CZ - AZ) : AC;$$

---

[62] Точка $V$ принадлежит направляющему кругу, следовательно второй фокус $H$ лежит на круге, описанном из точки $V$, как центра. Если вообразить, что построен треугольник $SQP$, подобный $VSH$, так, чтобы угол при $P$ был равен углу при $V$ и, значит,

$$SQ : SH = SP : SV = QP : VH$$

то в этом треугольнике стороны $SQ$ и $QP$ будут оставаться постоянными, когда точка $H$ будет перемещаться по кругу, вместе с тем угол $VSH$ будет равен углу $QSP$; следовательно, если точку $Q$ соединить с $H$, то полученный треугольник $HSQ$ будет подобен треугольнику $VSP$.

Ньютон и строит сперва треугольник $shq$, подобный $SHQ$, тогда точка $p$, сходственная с точкою $P$, должна лежать на круге, описанном из $q$, как из центра, радиусом

$$qp = ab \cdot \frac{SP}{SV}$$

и на заданной кривой. После того как эта точка $p$, сходственная с точкою $P$, найдена, искомая кривая строится без всяких затруднений.

Как видно, решение этой задачи выполняется при помощи пересечения круга и кривой второго порядка, т. е. вообще циркулем и линейкой невыполнимо.

но величина $CZ - AZ$ заданная. Следовательно, будут известны отношения $ZR$ и $ZS$ к $AZ$, а значит, и друг к другу. Пусть прямые $RP$ и $SQ$ пересекаются в точке $T$, тогда, проведя $TZ$ и $TA$, получим фигуру $TRZS$, известную по своему виду, и прямую $TZ$, определенную по своему положению; кроме того, будут известны длина $TA$ и угол $ATZ$, а так как известно отношение $AZ$, а значит, и $TZ$, к $ZS$, то будет известно и отношение $AZ$ к $TZ$, следовательно будет известен и треугольник $ATZ$, коего вершина $Z$ и есть искомая точка.

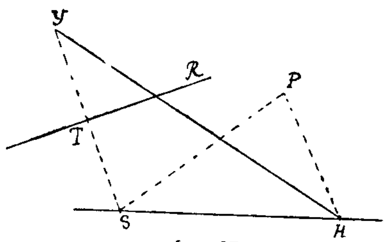
*Случай 2.* Если две из трех линий, скажем $AZ$ и $BZ$, равны, то прямую $TZ$ надо провести так, чтобы она разделяла $AB$ пополам, и затем разыскать треугольник $ATZ$ как и раньше.

*Случай 3.* Если все три расстояния равны, то точка $Z$ лежит в центре круга, проведенного через точки $A$, $B$ и $C$.

Эта задача решена в книге *Аполлония:* «О касаниях», восстановленной *Виетом.* [63]

### Предложение XXI. Задача XIII

*При заданном фокусе провести коническое сечение, проходящее через заданные точки и касающееся заданных прямых.*



Фиг. 37.

Пусть заданы фокус $S$, точка $P$, касательная $TR$; требуется найти второй фокус $H$ (фиг. 37). На касательную опускается перпендикуляр $ST$ и продолжается до $Y$ так, чтобы было $TY = ST$; тогда $YH$ будет равно главной оси. Длина $SP$ будет равна разности между расстоянием $HP$ и главной осью. Таким образом, если будет задано несколько

[63] Эта лемма заключает знаменитую задачу о построении круга касательного к трем данным кругам. Задача эта была предложена Виетом Адриану Римлянину в ответ на задачу последнего о решении некоторого уравнения 45-й степени. Виет сразу заметил происхождение уравнения, именно, что оно относилось к определению хорды угла, составляющего $\frac{1}{45}$ данного, на основании чего и дал полное решение. Адриан, решая предложенную ему задачу, определял положение центра искомого круга при помощи пересечения двух гипербол, на что Виет ему написал: «Dum circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis». Ньютон в своем *анализе* задачи также пользуется свойствами гиперболы, но заметив, что эти гиперболы имеют попарно общий фокус, он приводит разыскание точек их пересечения к построениям, выполнимым при помощи циркуля и линейки, и этим как бы показывает, что можно «rem acu tangere», пользуясь и гиперболами. Прямые $RP$ и $SQ$, которые строятся как вспомогательные в ньютоновом решении, суть направляющие гипербол, и все сводится к определению точки пересечения $T$ этих направляющих.

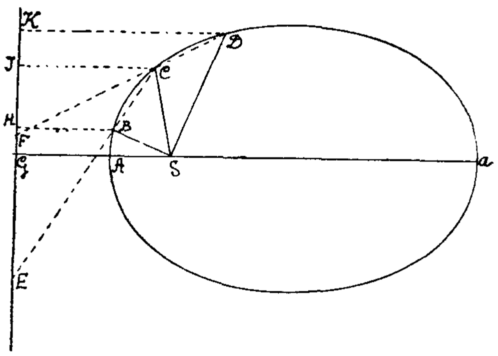
касательных или несколько точек, то получатся или такие расстояния, как $YH$, или такие, как $PH$, проведенные от таких точек, как $Y$ или $P$, к искомой точке $H$; эти расстояния или должны быть равны главной оси, или же должны отличаться от нее на известные длины, как $SP$, и которые поэтому или равны между собою, или же известны разности их попарно. По предыдущей лемме, следовательно, найдется второй фокус $H$, и после того как этот второй фокус найден, то станет известной и длина главной оси, которая будет $YH$ или

$$SP + PH$$

для эллипса, или же $SP - PH$ для гиперболы, и кривая будет определена.

*ПОУЧЕНИЕ*

Когда кривая — гипербола, то так как она должна служить траекторией движущегося тела, то вторую ее ветвь я не включаю, ибо тело на эту вторую ветвь при своем движении перейти не может.




Фиг. 38.

Случай, когда задаются три точки, решается проще так: пусть даны точки $B$, $C$, $D$ (фиг. 38). Продолжаем прямые $BC$ и $CD$ до $E$ и $F$ так, чтобы было:

$$BE : CE = SB : SC$$
$$CF : DF = SC : SD;$$

на прямую $EF$, если нужно продолженную, опускаются перпендикуляры $SG$, $BH$, и на неопределенно продолженной $SG$ берутся точки $A$ и $a$ так, чтобы было

$$GA : AS = Ga : aS = HB : BS;$$

тогда $A$ и $a$ будут главными вершинами и $Aa$—главною осью кривой, которая, в случае если $GA$ будет больше, равна или меньше, нежели $AS$, будет эллипс, парабола или гипербола, и тогда точка $a$ в первом случае должна лежать по ту же сторону от прямой $GF$ с точкою $A$, во втором случае эта точка удаляется в бесконечность, в третьем она лежит по другую сторону $GF$.

Действительно, если на $GF$ опустить перпендикуляры $CJ$, $DK$, то будет

$$CJ:HB = CE:BE = SC:SB$$

следовательно

$$CJ:SC = HB:SB = GA:SA.$$

Точно так же докажется, что $KD$ к $SD$ находится в том же отношении. Следовательно, точки $B$, $C$, $D$ лежат на коническом сечении, построенном при фокусе $S$ так, что расстояния его точек до фокуса и до прямой $GF$ находятся в постоянном отношении.

Знаменитейший геометр De la Hire в своем сочинении о конических сечениях, в книге VIII, предложение XXV, дает решение этой задачи, почти не отличающееся от изложенного.[64]

---

64 Задача, общий ход решения которой указан в этом предложении, заключает в себе в сущности четыре задачи. Построить коническое сечение, когда даны фокус и

1⁰) три касательных;

2⁰) две касательных и точка вне их;

3⁰) одна касательная и две точки вне ее;

4⁰) три точки.

Решение первой, очевидно, — круг, проходящий через основания перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные, описан на главной оси, как диаметре. Стоит его провести и задача решена. Или, следуя общему приему: круг, проходящий через три точки такие, как $Y$, т. е. симметричные с фокусом относительно касательных, есть направляющий круг, его центр есть второй фокус и радиус — большая ось. Этот случай как раз и указан в случае 3 леммы XVI, т. е. когда все три расстояния равны.

Вторая задача представляет также простой частный случай общей. Заметив, что две точки такие, как $Y$, — обозначим их $Y_1$ и $Y_2$, — принадлежат направляющему кругу, проводим к прямой $Y_1 Y_2$ перпендикуляр из ее середины — второй фокус $H$ лежит на этом перпендикуляре. Взяв расстояние $SP$ данной точки до заданного фокуса и описав точкою $Y_1$, как центром, и радиусом $SP$ круг, заключаем, что точка $H$ лежит в равном расстоянии от этого круга и точки $P$, т. е. она лежит в центре круга, проходящего через $P$ и касающегося данного. Таким образом задача сведена к построению круга, имеющего свой центр на данной прямой, проходящего через данную точку и касающегося данного круга, что решается весьма просто

Третья задача требует применения леммы XVI в общем виде.

Четвертая решается по второму приему более просто, нежели по общему способу; причем для получения точки $F$ можно заметить, что в силу пропорции

$$CF:FD = SC:SD$$

эта точка лежит в пересечении хорды $DC$ и равноделящей внешнего противолежащего стороне $CD$ угла треугольника $CSD$.

## ОТДЕЛ V

## О НАХОЖДЕНИИ ОРБИТ, КОГДА НИ ОДНОГО ФОКУСА НЕ ЗАДАНО [65]

### Лемма XVII

*Если из произвольной точки $P$ конического сечения провести к сторонам любого четырехугольника $ABCD$, вписанного в это сечение, четыре прямые $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ под заданными углами к сторонам $AB$, $CD$, $AC$, $DB$ четырехугольника, если надо продолженным, то произведения $PQ \cdot PR$ и $PS \cdot PT$ отрезков, проведенных к противоположным сторонам, находятся в постоянном отношении.* [66]

---

[65] Этот отдел, подобно предыдущему, имеет исключительно геометрическое значение в нем даются решения следующих задач о построении конических сечений по данным:

1⁰) пяти точкам;

2⁰) четырем точкам и одной касательиой;

3⁰) трем точкам и двум касательным;

4⁰) двум точкам и трем касательным;

5⁰) одной точке и четырем касательным;

6⁰) пяти касательным.

Эти шесть случаев являются исчерпывающими по отношению к заданию только точек и касательных. При решении этих задач, Ньютон не пользуется ни теоремою Паскаля, ни теоремою Дезарга, хотя эти теоремы были в то время уже известны.

Кроме этих шести, решаются еще две задачи, а именно:

а) построить коническое сечение, равное и подобное данному, так, чтобы тремя заданными прямыми от него отсекались заданные смежные сегменты;

б) построить коническое сечение, подобное данному, так, чтобы оно четырьмя данными прямыми рассекалось на части, подобные данным и подобным образом с ними расположенные.

Для решения этих двух задач дается сперва решение двух вспомогательных задач, именно:

в) построить треугольник, равный и подобный данному, так, чтобы его вершины лежали на трех заданных по положению прямых;

г) построить четырехугольник, подобный данному так, чтобы его вершины лежали на четырех заданных по положению прямых.

[66] Аналитически это свойство конических сечений доказывается, как известно, весьма просто. Обозначая через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — первые части уравнений прямых $AB$, $BC$, $CD$, $AD$, написанных в нормальном виде, имеем общее уравнение конических сечений, проходящих через точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$$

где $k$ есть постоянная. Это и доказывает леммы XVII и XVIII.

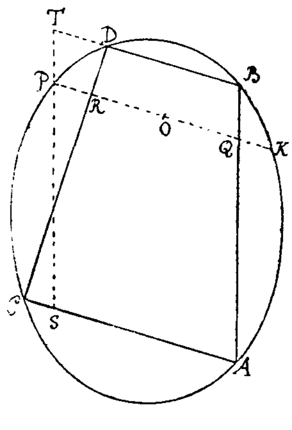
Но Ньютон намеренно не пользуется аналитической геометрией, и в конце леммы XIX прямо говорит, что он дает решение задачи древних «о четырех линиях» — «non calculus sed compositio geometrica». По поводу этой задачи надо заметить, что именно ее Декарт взял как пример, чтобы показать приложение своего способа решения геометрических задач «вычислением», причем он добавляет, что «древние не написали бы столько толстых книг, если бы знали изложенные им начала аналитического решения геометрических задач».

*Случай 1.* Положим сперва, что прямые, проводимые к противоположным сторонам, параллельны другим сторонам четырехугольника, т. е. $PQ$ и $PR$ параллельны $AC$ (фиг. 39), $PS$ и $PT$ параллельны $AB$, и, сверх того, пусть и стороны $AC$ и $BD$ параллельны между собою.

Прямая, разделяющая пополам эти параллельные стороны, разделит пополам и $RQ$; пусть $O$ есть середина $RQ$, тогда $PO$ будет ординатою при этом диаметре. Если продолжить $PO$ до точки $K$ так, чтобы было

$$OK = OP$$

то $OK$ будет также ординатою при том же диаметре. Так как точки $A$, $B$, $P$, $K$ находятся на коническом сечении и $PK$ пересекает $AB$ под постоянным углом, то, по предложениям 17, 19, 21 и 23 книги III Аполлониевых конических сечений, отношение $PQ \cdot QK$ к $AQ \cdot QB$ будет постоянное.[67] Но $QK = PR$, ибо взяв почленно разность равенств




Фиг. 39.

$$OK = OP \quad \text{и} \quad OQ = OR$$

получим

$$OK - OQ = OP - OR$$

т. е.

$$QK = PR,$$

[67] Для круга эти произведения, как отрезков хорд, будут между собою равны; спроектируем этот круг на плоскость, получится эллипс, отрезки хорд умножатся на постоянные множители, значит отношение произведений, бывших для круга равными, станет постоянным. Если вместо проекций взять перспективу, то легко убедиться в справедливости этого свойства и для любого конического сечения.

Аналитически это свойство доказывается также весьма просто: пусть

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коническое сечение, отнесенное, напр., к осям $AB$ и $PQ$. Делая

$$y = 0$$

получим

$$x_1 x_2 = AQ \cdot QB = \frac{F}{A}.$$

Делая

$$x = 0$$

получим

$$y_1 y_2 = PQ \cdot QK = \frac{F}{C}$$

отношение

$$y_1 y_2 : x_1 x_2 = A : C.$$

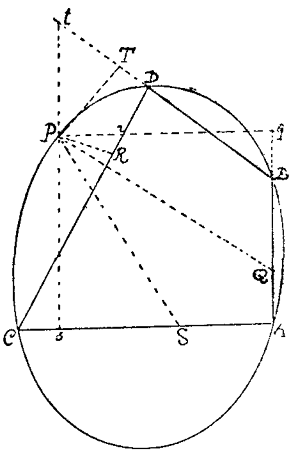
Если переносить оси параллельно, то ни $A$, ни $C$ не меняются, и значит, отношение рассматриваемых произведений отрезков остается постоянным.

следовательно произведения

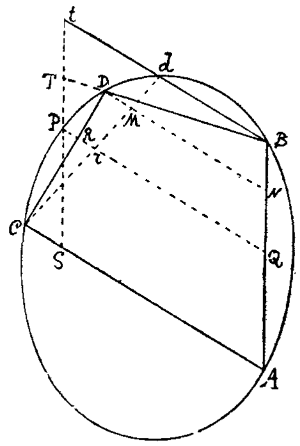
$$FQ \cdot QK = FQ \cdot PR,$$

поэтому произведение $PQ \cdot PR$ находится в постоянном отношении к произведению $AQ \cdot QB$, это же последнее равно $PS \cdot PT$.

*Случай 2.* Когда противоположные стороны четырехугольника $AC$ и $BD$ (фиг. 40) между собою не параллельны, проведи $Bd$ параллельно $AC$, и пусть точки ее пересечения с прямою $ST$ и с кривою суть $t$ и $d$. Про-




Фиг. 40




Фиг. 41.

веди: $Cd$, пересекающую $PQ$ в $r$, и $DM$, параллельную $PQ$ и пересекающую $Cd$ в $M$ и $AB$ в $N$. Тогда, по подобию трехугольников $BTt$ и $BDN$. будет по замене $Bt$ равной ей $PQ$:

$$PQ : Tt = DN : NB;$$

также, заменив $AQ$ равной ему $PS$, будет

$$Rr : PS = DM : AN.$$

По перемножении этих пропорций, получится

$$PQ \cdot Rr : Tt \cdot PS = DN \cdot DM : NB \cdot AN.$$

По доказанному для случая (1) будет

$$PQ \cdot Pr : PS \cdot Pt = DN \cdot DM : NB \cdot AN.$$

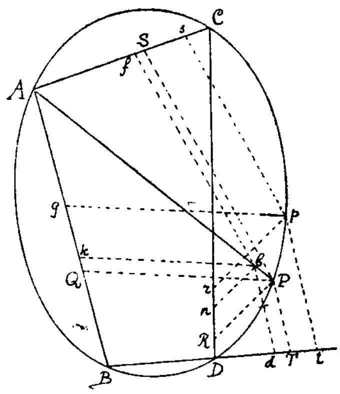
Вычитая, получим

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT = DN \cdot DM : NB \cdot AN = \text{постоянной}.$$

*Случай 3.* Наконец, если все четыре прямые $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ (фиг. 41) не параллельны сторонам $AC$ и $AB$, но наклонены к ним под каким-либо углом, проведи $Pq$, $Pr$ параллельно $AC$ и $Ps$, $Pt$ параллельно $AB$; так как в треугольниках $PQq$, $PRr$, $PSs$, $PTt$ углы будут постоянные, то и отношения сторон $PQ$ к $Pq$, $PR$ к $Pr$, $PS$ к $Ps$ и $PT$ к $Pt$ будут постоянны, следовательно будут постоянны и отношения $PQ \cdot PR$ к $Pq \cdot Pr$ и $PS \cdot PT$ к $Ps \cdot Pt$, но доказанному же выше отношение $Pq \cdot Pr : Ps \cdot Pt$ постоянное, следовательно постоянно и отношение $PQ \cdot PR$ к $PS \cdot PT$.

### Лемма XVIII

*При тех же предположениях, если произведения отрезков $PQ \cdot PR$ и $PS \cdot PT$, заключенных между точкою $P$ и сторонами четырехугольника $ABCD$, находятся в постоянном отношении, то точка $P$ лежит на коническом сечении, описанном около этого четырехугольника.*




Фиг. 42.

Вообрази, что через точки $A$, $B$, $C$, $D$ (фиг. 42) и какое-нибудь одно из бесчисленного множества положений точек $P$, скажем $p$, проведено коническое сечение; я утверждаю, что точка $P$ лежит на нем. Если отрицаешь, соедини $AP$, которая тогда пересечет это коническое сечение в какой-либо другой точке, а не в $P$, скажем в $b$. Следовательно, если из точек $p$ и $b$ провести к сторонам четырехугольника под заданными углами прямые $pq$, $pr$, $ps$, $pt$ и $bk$, $bn$, $bf$, $bd$, то будет

$$bk \cdot bn : bf \cdot bd = pq \cdot pr : ps \cdot pt = PQ \cdot PR : PS \cdot PT.$$

По подобию же четырехугольников $bkAf$ и $PQAS$:

$$bk : bf = PQ : PS$$

и следовательно, по разделении предыдущей пропорции на эту, будет

$$bn : bd = PR : PT$$

следовательно четырехугольники $Dnbd$ и $DRPT$, коих углы равны, будут подобны, и поэтому их диагонали $Db$ и $DP$ должны совпадать. Следовательно, точка $b$ упадет в пересечение прямых $AP$ и $DP$, т. е. совпадает с точкою $P$. Таким образом, где бы ни была взята точка $P$, удовлетворяющая условиям теоремы, она упадет на проведенное коническое сечение.

*Следствие.* Если три прямых $PQ$, $PR$, $PS$, проведенные из какой-либо точки $P$ к заданным по положению прямым $AB$, $CD$ и $AC$ под данными углами, каждая к каждой таковы, что отношение произведения $PQ \cdot QR$ к $PS^2$ постоянное, то точка $P$, из которой прямые проводятся, находится на коническом сечении, касающемся прямых $AB$ и $CD$ в точках $A$ и $C$, и обратно.

Ибо если прямая $BD$ будет приближаться к совпадению с $AC$, причем положение трех прочих прямых $AB$, $CD$, $AC$ сохраняется, то отрезок $PT$ будет приближаться к совпадению с $PS$, и произведение $PS \cdot PT$ обратится в $PS^2$, прямые же $AB$ и $CD$, которые пересекали кривую в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$, при совпадении этих точек уже не будут секущими, а обратятся в касательные.

### *ПОУЧЕНИЕ*

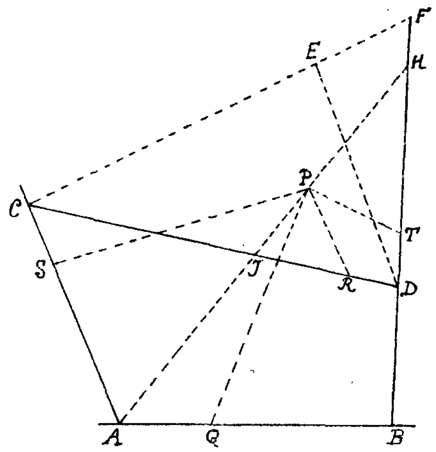
Словам «коническое сечение» в предыдущей лемме придается широкий смысл, т. е. в них включаются как прямолинейные сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину его, так и круговые его сечения плоскостью, параллельною основанию. Действительно, если точку $p$ взять на прямой, проходящей через $A$ и $D$ или $C$ и $B$, то коническое сечение обратится в две прямые, из которых одна есть та, на которой берется точка $p$, другая же есть та, которая проходит через прочие две точки. Если сумма двух противоположных углов четырехугольника равна двум прямым углам и линии $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ проводятся или перпендикулярно, или, вообще, под одним и тем же углом к сторонам, и произведения $PQ \cdot PR$ и $PS \cdot PT$ равны, то сечение будет круг.

То же самое будет и в том случае, когда эти четыре прямые проводятся под какими угодно углами и произведение двух отрезков $PQ$ и $PR$ так относится к произведению $PS$ и $PT$ двух других отрезков, как произведение синусов углов $S$ и $T$, ими составляемых с соответствующими сторонам, относится к произведению синусов углов $R$ и $Q$, составляемых первыми. В остальных случаях местом точек $P$ будет служить одна из тех трех кривых, которые обыкновенно называются коническими сечениями. Вместо четырехугольника $ABCD$ можно брать и такой четырехугольник, коего стороны между собою пересекаются на манер диагоналей. Наконец, из четырех точек $A$, $B$, $C$, $D$ одна или две могут удаляться в бесконечность; в этом случае стороны фигуры, сходившиеся в этих точках, становятся между собою параллельными и коническое сечение, проходя через прочие точки, удаляется в бесконечность в направлении параллельных сторон четырехугольника.

### Лемма XIX

*Найти такую точку $P$, из которой если провести четыре прямых $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ каждую соответственно под заданным углом к одной из четырех данных по положению прямых $AB$, $CD$, $AC$, $BD$, то произведения $PQ \cdot PR$ и $PS \cdot PT$ находились бы в данном отношении.*

Пусть прямые $AB$ и $CD$ (фиг. 43), к которым проводятся отрезки $PQ$ и $PR$, образующие одно из произведений, пересекаются с двумя другими данными прямыми в точках $A$, $B$, $C$, $D$. Через которую-нибудь из этих точек $A$ проводится произвольно прямая $AH$, на которой желательно чтобы лежала точка $P$; пусть эта прямая пересекает соответственно $BD$ в $H$, $CD$ в $J$; так как все углы фигуры заданы, то будут известны отношения $PQ$ к $PA$ и $PA$ к $PS$, следовательно и отношение $PQ$ к $PS$. Разделяя на это отношение заданное отношение произведений $PQ \cdot PR$ к $PS \cdot PT$, получим отношение $PR$ к $PT$; тогда, зная отношение $PJ$ к $PR$, $PT$ к $PH$, найдем отношение $PJ$ к $PH$, а следовательно, и точку $P$.

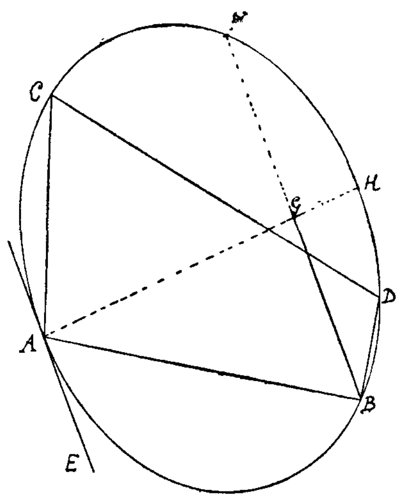



Фиг. 43.

*Следствие 1.* К геометрическому месту точек $P$ можно построить и касательную в какой-нибудь данной точке, напр. $D$. Ибо, когда точки $P$ и $D$, по приближении друг к другу, сливаются, т. е. когда прямая $AH$ проходит через точку $D$, то хорда $PD$ обращается в касательную. Предельное отношение исчезающих длин $JP$ и $PH$ найдется для этого случая попрежнему, поэтому если провести прямую $CF$ параллельно $AD$ и расстояние $CF$ разделить точкою $E$ в вышенайденном предельном отношении, то $DE$ и будет требуемой касательной, ибо $CF$ и предельное положение $JH$ параллельны и разделяются в точках $P$ и $E$ на части пропорциональные.

*Следствие 2.* Поэтому геометрическое место точек $P$ может быть определено следующим образом: через которую-нибудь из точек $A$, $B$, $C$, $D$, напр. $A$ (фиг. 44), проводится касательная $AE$ к искомому месту и через другую точку $B$ проводится прямая $BF$, параллельная касательной, и по лемме XIX находится точка $F$, в которой она пересекает место. Если, разделив $BF$ в точке $G$ пополам, провести прямую $AG$, то $BF$ будет хордою, сопряженною с диаметром $AG$.

Пусть прямая $AG$ пересекает место в точке $H$, тогда длина $AH$ будет длиною диаметра. соответствующий ему параметр есть $\frac{BG^2 \cdot AH}{AG \cdot GH}$. Если $AG$ не пересекает места, т. е. длина $AH$ бесконечна, то место точек $P$ есть парабола, и ее параметр при диаметре $AG$ будет $\frac{BG^2}{AG}$.




Фиг. 44.

Когда же прямая $AG$ пересекает место, то оно будет гиперболою, если точки $A$ и $H$ располагаются по одну сторону от $BG$, и эллипсом, если точка $G$ лежит между $A$ и $H$. Если, кроме того, угол $AGB$ прямой и

$$BG^2 = AG \cdot GH,$$

то получится круг.

В этой лемме, как видно, изложено решение задачи древних о четырех линиях. Задача эта была предложена *Эвклидом*, продолжена *Аполлонием*, и такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое геометрическими сопоставлениями, а не аналитическим расчетом, и изыскивалось древними.[63]

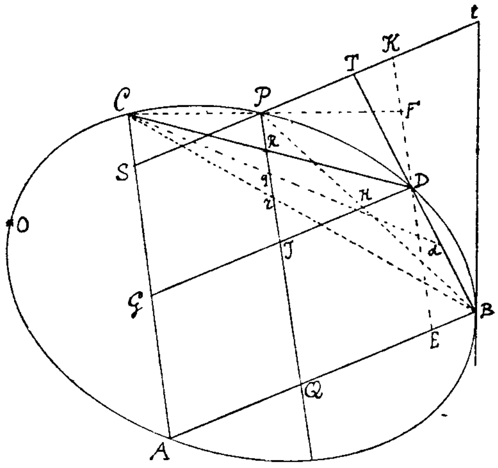
## Лемма XX

***Если две противоположные вершины $A$ и $P$ параллелограмма $ASPQ$ лежат на коническом сечении и стороны его $AQ$ и $AS$, сходящиеся в одной***

68 Как уже упомянуто в примечании 66, именно эту задачу взял Декарт как пример приложения алгебраического способа решения геометрических вопросов. Объяснив построение корней квадратного уравнения, он говорит: «все задачи элементарной геометрии могут быть решены, делая лишь эти немногие построения, объясненные в предыдущих четырех примерах. Мне кажется, что это не было замечено древними, ибо они не стали бы затрачивать труд на писание стольких толстых книг, в которых самый порядок предложений показывает, что они не имели истинного способа, чтобы их все находить, а что они собирали лишь те предложения, на которые случайно нападали». Ньютон ставил геометрическое рассуждение гораздо выше алгебраического, и весьма возможно, что его замечание относится к этим словам Декарта, хотя сам Ньютон большую часть своего сочинения «Arithmetica Universalis» посвящает решению геометрических вопросов при помощи алгебры.

*из этих вершин A, по продолжении пересекают это коническое сечение в точках B и C; если затем эти точки соединить с какою-либо пятою точкою D, лежащей на сечении, прямыми CD и BD и продолжить эти прямые до пересечения в точках R и T с двумя другими сторонами PQ и PS параллелограмма, то отрезки PR и PT будут находиться в постоянном отношении. И обратно, если эти отрезки находятся в постоянном отношении, то точка D лежит на коническом сечении, проходящем через точки A, B, C, P.*

*Случай 1.* Соединив $BP$ и $CP$ (фиг. 45), проводят из точки $D$ прямую $DG$ параллельно $AB$ и $DE$ параллельно $AC$; пусть первая пересекает прямые $PB$, $PQ$, $CA$ в точках $H$, $J$, $G$, вторая пересекает $PC$, $PS$, $AB$ в точках $F$, $K$, $E$. По лемме XVII отношение произведений $DE \cdot DF$ к $DG \cdot DH$ постоянное.




Фиг. 45.

Но

$$PQ : DE = PQ : JQ = PB : HB = PT : DH$$

следовательно

$$PQ : PT = DE : DH. \tag{1}$$

Также

$$PR : DF = RC : DC = PS : DG$$

откуда

$$PR : PS = DF : DG; \tag{2}$$

перемножая пропорции (1) и (2), имеем

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT = DE \cdot DF : DG \cdot DH = \text{постоянной},$$

но длины $PQ$ и $PS$ заданы, следовательно отношение $PR$ к $PT$ постоянное.

*Случай 2.* Если положить, что отрезки $PR$ и $PT$ находятся в заданном отношении, то восходя в рассуждении, подобном предыдущему, получим, что отношение произведения $DE \cdot DF$ к $DG \cdot DH$ будет постоянное, следовательно (лем. XVIII) точка $D$ лежит на коническом сечении, проходящем через $A$, $B$, $C$, $P$.

*Следствие 1.* Если провести прямую $BC$, пересекающую $PQ$ в $r$, и на $PT$ взять $Pt$ так, чтобы было

$$Pt : Pr = PT : PR$$

то прямая $Bt$ будет касательной к коническому сечению в точке $B$. Ибо, если вообразить, что точка $D$, приближаясь, сливается с $B$, т. е. что исчезающая хорда $BD$ обращается в касательную $BT$, то $CD$ и $BT$ совпадут с $CB$ и $Bt$.

*Следствие 2.* Обратно, если $Bt$ — касательная и если в точке $D$ конического сечения сходятся прямые $BD$ и $CD$, то будет

$$PR : PT = Pr : Pt$$

и наоборот, если

$$PR : PT = Pr : Pt$$

то $BD$ и $CD$ сходятся в точке $D$, лежащей на коническом сечении.

*Следствие 3.* Два конических сечения не могут пересекаться друг с другом в большем числе точек, нежели четыре. Ибо, если бы это было возможно и два конических сечения проходили бы через пять точек $A$, $B$, $C$, $P$, $O$, тогда, если прямая $BD$ пересекает эти кривые в точках $D$ и $d$ и прямая $PQ$ пересекает прямую $Cd$ в $q$, будет

$$PR : PT = Pq : PT$$

т. е.

$$PR = Pq$$

что противно предположению.

## Лемма XXI

*Если около данных точек $B$ и $C$, как центров, вращаются две подвижные и неограниченные прямые $BM$ и $CM$ так, что точка их пересечения $M$ описывает прямую линию, и две другие также неограниченные прямые $BD$ и $CD$ проводятся так, что они составляют при точках $B$ и $C$ с первыми постоянные углы $MBD$ и $MCD$, то точка их пересечения $D$ описывает коническое сечение, проходящее через точки $B$ и $C$. Обратно, если точка $D$ пересечения прямых $BD$ и $CD$ лежит на коническом сечении, проходящем через заданные точки $A$, $B$, $C$, и угол $DBM$ постоянно равен заданному углу $ABC$, угол же $DCM$ постоянно равен углу $ACB$, то точка $M$ лежит на постоянной прямой.*

Положим, что на прямой $MN$ (фиг. 46) взята точка $N$, и когда подвижная точка $M$ совпадает с $N$, то точка $D$ совпадает с неподвижною точкою $P$. Соединив $CN$, $BN$, $CP$, $BP$, проводят из точки $P$ прямые $PT$ и $PR$, пересекающие $BC$ и $CD$ в точках $T$ и $R$ и составляющие угол $BPT$, равный углу $BNM$, и угол $CPR$, равный углу $CNM$. Так как по условию угол

$$MBD = NBP \quad \text{и} \quad MCD = NCP$$

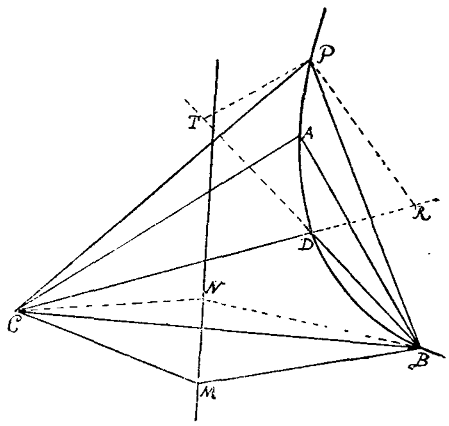
то по отнятии общих углов $NBD$ и $NCD$ останутся углы

$$NBM = PBT \quad \text{и} \quad NCM = PCR$$

вследствие чего треугольник $NBM$ с $BPT$ и треугольник $NCM$ с $PCR$ подобны. Следовательно, будет:

$$PT : NM = PB : NB$$
$$PR : NM = PC : NC$$

точки же $B$, $C$, $N$, $P$ неподвижны. Отсюда следует, что отрезки $PT$ и $PR$ находятся в постоянном отношении и точка $D$ пересечения подвижных прямых $BT$ и $CR$ лежит на коническом[69] сечении (лем. XX), проходящем через точки $B$, $C$, $P$.




Фиг. 46.

---

[69] На ньютоновом чертеже нет того параллелограмма, к которому относится лемма XX, или, лучше сказать, есть лишь его вершина $P$, лежащая на коническом сечении. Противоположная вершина $S$ получается вообразив, что точка $M$ удаляется в бесконечность и стороны $BM$ и $CM$ становятся параллельными прямой $MN$, а значит, и между собою; тогда сторона $BS$ примет положение, параллельное прямой $PT$, и сторона $CS$ — положение, параллельное прямой $PR$, в чем легко убедиться, рассчитав углы, составляемые направлениями этих линий с каким-нибудь заданным направлением, напр. $NM$. Пусть, напр., $NB$ составляет угол $\alpha$, направление $BP$ составит угол

$$\alpha + 180^\circ - \beta$$

где

$$\beta = NBP$$

и направление $PT$ — угол

$$\alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \alpha = 360^\circ - \beta$$

т. е. угол

$$NLT = \beta$$

и следовательно, $BS$ параллельно $PT$.

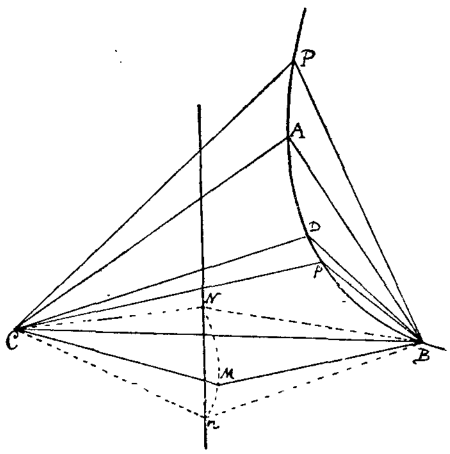
Также увидим, что $CS$ параллельно $PR$.

Обратно, пусть подвижная точка $D$ (фиг. 47) лежит на коническом сечении, проходящем через заданные точки $B$, $C$, $A$, и угол

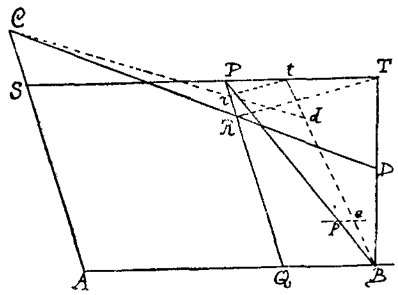
$$DBM = ABC \quad \text{и} \quad DCM = ACB$$

при всяком положении точки $D$. Пусть точка $D$ последовательно совпадает с двумя неподвижными точками $P$ и $p$, причем точка $M$ соответственно занимает положение $N$ и $n$. Проведем через $N$ и $n$ прямую, эта прямая будет геометрическим местом точек $M$.

Ибо, если допустить, что точка $M$ упала вне этой прямой и двигалась бы по какой-либо кривой, то точка $D$ описывала бы коническое сечение, проходящее через пять данных точек $A$, $B$, $C$, $p$, $P$. Но по только что доказанному точка $D$ описывает коническое сечение, про-




Фиг. 47




Фиг. 48.

ходящее через те же пять точек, когда точка $M$ перемещается по прямой. Таким образом оказалось бы, что два конических сечения проходят через те же самые пять точек, что противоречит следствию 3 леммы XX. Следовательно, допущение, что точка $M$ перемещается по кривой, нелепо.

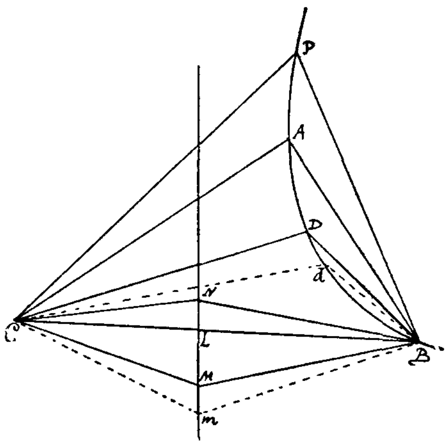
### Предложение XXII. Задача XIV

*Провести коническое сечение через пять заданных точек.*

Пусть даны пять точек $A$, $B$, $C$, $P$, $D$ (фиг. 48). Из одной из них $A$ к двум другим $B$ и $C$, принимаемым за полюсы, проведи прямые $AB$ и $AC$, и через четвертую точку $P$ проведи прямые $TPS$ и $PRQ$, им параллельные. Из обоих полюсов $B$ и $C$ проведи к точке $D$ неограниченные прямые $BDT$ и $CRD$, пересекающие соответственно предыдущие две в точках $T$ и $R$, после чего, проводя прямую $tr$, параллельную $TR$, отсекай длины $Pt$ и $Pr$, пропорциональные $PT$ и $PR$. Проводя через их концы $t$ и $r$ прямые $Bt$ и $Cr$ к полюсам $B$ и $C$ и будешь получать в их пересечении точки $d$, лежащие на искомой кривой. Ибо по лемме XX точка $d$ лежит на коническом сечении, проходящем через $A$, $B$, $C$, $P$, и когда линии $Rr$ и $Tt$ исчезают, то точка $d$ совпадает с $D$, следовательно это коническое сечение проходит через пять заданных точек $A$, $B$, $C$, $P$, $D$.

*То же самое иначе*

Из заданных точек соедини три которые-нибудь $A$, $B$, $C$ попарно прямыми, и около двух из них $B$ и $C$ (фиг. 49), как центров, вращай углы $ABC$ и $ACB$. Сперва приложи стороны $BA$ и $CA$ к точке $D$, затем к точке $P$, и отметь точки $M$ и $N$ пересечения двух других сторон $BL$, $CL$. Проведи прямую $MN$ и вращай углы около их вершин $B$ и $C$ так, чтобы пересечение сторон $CL$ и $BL$ или $BM$ и $CM$, получающееся, напр., в $m$, постоянно располагалось бы на прямой $MN$; тогда пересечение сторон $BA$, $CA$ или $BD$, $CD$, которое соответственно $m$ будет в $d$, опишет требуемую кривую $PADdB$. Ибо точка $d$ по лемме XXI находится на коническом сечевии, проходящем через $B$ и $C$, когда же точка $m$ будет поочередно совпадать с точками $L$, $M$, $N$, то точка $d$ будет совпадать с точками $A$, $D$, $P$, следовательно и будет описано коническое сечение, проходящее через пять точек $A$, $B$, $C$, $P$, $D$.




Фиг. 49.

*Следствие 1.* Можно провести касательную к искомой кривой в какой-либо заданной точке $B$, вообразив, что точка $d$ приближается к $B$ и сливается с нею; тогда прямая $Bd$ и обратится в искомую касательную.[70]

*Следствие 2.* Затем могут быть найдены центр, диаметры и параметр кривой, как указано в следствии 2 леммы XIX.[71]

[70] Когда точка $d$ в пределе совпадает с $B$, то луч $Cd$ сольется с прямой $CB$, следовательно, построив угол $LCm_1$, равный углу $ACB$, получим положение точки $m_1$ на прямой $MN$; соединив $Bm_1$ и построив угол $m_1Bd$, равный $ABC$, и получим искомую касательную $Bd_1$.

[71] Построив в точке $B$ касательную $Bd_1$, проводим через точку $C$ прямую, этой касательной параллельную, и строим точку, лежащую на этой прямой. Соединив средину полученной

*ПОУЧЕНИЕ*

Первое построение выполняется проще, соединив $BP$ и отложив по ней, а если нужно — по ее продолжению, длину $Bp$ так, чтобы было

$$Bp : BP = PR : PT,$$

и проводя затем через $p$ (фиг. 48) прямую, параллельную $SPT$, надо брать на ней длину $pe$, равную $Pr$, и отмечать точку пересечения $d$ прямых $Be$, $Cr$. Ибо по равенству отношений

$$Pr : Pt = PR : PT = pB : PB = pe : Pt$$

будет

$$Pr = pe.$$

По этому способу точки кривой можно строить весьма быстро, если только не будет предпочтено построить кривую механически по второму способу. [72]

**Предложение XXIII. Задача XV**

***Провести коническое сечение, проходящее через четыре заданные точки и касающееся данной прямой.***

***Случай 1.*** Пусть дана касательная $HB$ (фиг. 50), точка касания $B$ и три другие точки $C$, $D$, $P$. Соедини $BC$, проведи $PS$ параллельно $BH$ и $PQ$ параллельно $BC$ и дополни параллелограмм $BSPQ$. Проведи $BD$, пересекающую $SP$ в $T$, и $CD$, пересекающую $PQ$ в $R$, после чего, проводя какую-либо прямую $tr$ параллельно $TR$, отсекающую от $PQ$ и $PS$ длины $Pr$ и $Pt$, пропорциональные $PR$ и $PT$, соединяй $Cr$ и $Bt$, — в их пересечении $d$ получишь точку, лежащую на искомой кривой (лем. XX).

---

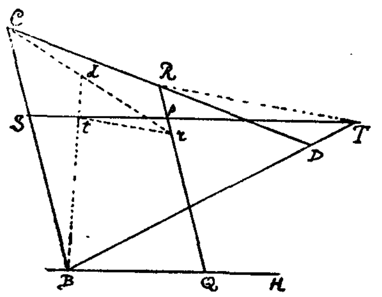
хорды с точкою $B$, будем иметь хорду, сопряженную с диаметром, и один из концов диаметра т. е. будем как раз в условиях леммы XIX.

[72] Построение конического сечения, проходящего через пять данных точек, производится также, как известно, при помощи теоремы Паскаля, которая дает возможность по данным пяти точкам построить искомую шестую, принадлежащую коническому сечению, пользуясь только линейкою. Ньютоновы же построения требуют и циркуля, ибо приходится строить или углы, равные данным, или пропорциональные отрезки, и оно окажется сложнее паскалевского, если не прибегнуть во втором способе к шаблонам, воспроизводящим данные углы, коих вершины находились бы в заданных точках $C$ и $B$. Это, повидимому, и рекомендует Ньютон словами «описать кривую механически». Действительно, если воспользоваться двумя такими шаблонами, вырезанными из картона или твердой бумаги, то построение ряда точек кривой исполняется весьма быстро, в чем каждый может сам убедиться.

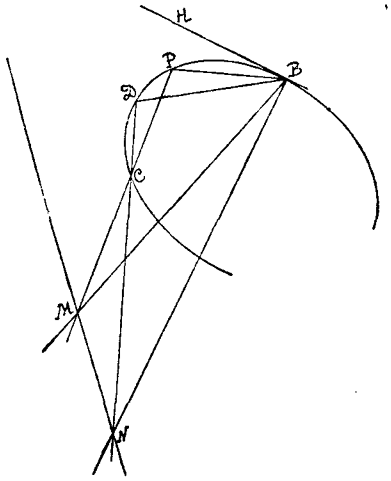
Несколько иное решение этой задачи, основанное на свойстве, доказанном в прим. 67, объясняется Ньютоном в его «Arithmetica Universalis», задача LIX.

*То же самое иначе*

Пусть около точки $B$ (фиг. 51) вращается угол $CBH$ постоянной величины, и около точки $C$ — прямая $CD$, продолженная в обе стороны. Отметь точки $M$ и $N$, в которых сторона $BC$ пересекает сказанную вращающуюся прямую $CD$, когда первая сторона угла $BH$ пересекает ее по очереди в $P$ и в $D$. Если затем вращать сказанный угол и луч $CP$ или $CD$ так, чтобы вторая сторона угла пересекалась с этим лучем на прямой $MN$, то пересечение первой его стороны с этим лучем и будет давать точку $D$, описывающую требуемую кривую. Ибо, если при построении предыдущей задачи точка $A$, приближаясь, достигнет $B$, то линии $CA$ и $CB$ совпадут, и предельное положение $AB$ и будет касательною $BH$, и данное выше общее построение обратится в указанное здесь. Пересечение стороны $BH$ с лучем опишет поэтому коническое сечение, проходящее через точки $C$, $D$, $P$ и касающееся прямой $BH$ в точке $B$.




Фиг. 50.




Фиг. 51.

*Случай 2.* Пусть заданы четыре точки $B$, $C$, $D$, $P$ (фиг. 52), лежащие вне касательной $HJ$. Проведи прямые $BD$ и $CP$, пересекающиеся в $G$ и пересекающие касательную в $H$ и $J$. Пусть точка $A$ разделяет касательвую так, что

$$HA : JA = \sqrt{CG \cdot GP} \cdot \sqrt{BH \cdot HD} : \sqrt{DG \cdot GB} \cdot \sqrt{PJ \cdot JC}$$

тогда точка $A$ будет точкою касания. Ибо, если прямая $HX$, параллельная $PJ$, пересекает кривую в точках $X$ и $Y$, то по свойству конических сечений точка касания $A$ будет так расположена, что[73]

$$HA^2 : AJ^2 = [XH \cdot HY : BH \cdot HD] \cdot [BH \cdot HD : PJ \cdot JC],$$

[73] Это свойство доказано в примечании 67. Стоит только вообразить, что одна из осей касается кривой, то оба корня станут равными, и произведение отрезков секущей заменится квадратом длины касательной.

но отношение

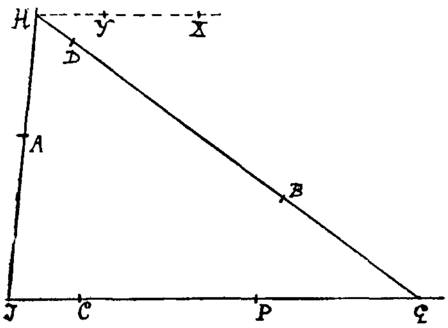
$$XH \cdot HY : BH \cdot HD = CG \cdot GP : DG \cdot GB.$$

После того как точка касания найдена, кривая может быть построена как показано в случае 1. Точку $A$ можно брать или между точками $H$ и $J$, или же снаружи, следовательно искомых кривых может быть построено две.

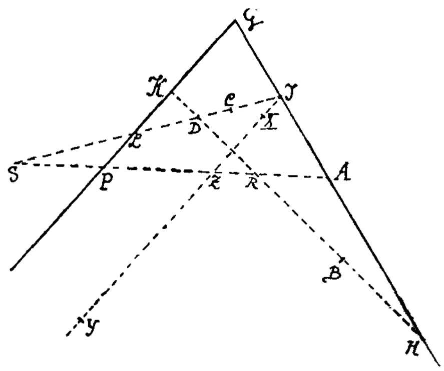
### Предложение XXIV. Задача XVI

*Провести коническое сечение, проходящее через три заданные точки и касающееся двух данных прямых.*

Пусть даны касательные $HJ$ и $KL$ и точки $B$, $C$, $D$ (фиг. 53). Через которые-нибудь две из них $B$ и $D$ проведи прямую, пересекающую каса-




Фиг. 52.




Фиг. 53.

тельные в точках $K$ и $H$. Затем через точки $C$ и $D$ проведи прямую, пересекающую касательные в $J$ и $L$; проведенные прямые рассеки в точках $R$ и $S$ так, чтобы было

$$HR : KR = \sqrt{BH \cdot HD} : \sqrt{BK \cdot KD}$$

и

$$JS : LS = \sqrt{CJ \cdot JD} : \sqrt{CL \cdot LD}$$

причем точки сечения можно брать как между точками $K$ и $H$, $J$ и $L$, так и вне их. Проведи затем $RS$, пересекающую касательные в $A$ и $P$; точки $A$ и $P$ и будут точками касания. Ибо, если предположить, что $A$ и $P$ суть точки касания заданных касательных, что через точку $J$, лежащую на касательной $HJ$, проведена прямая $JY$, параллельная другой касательной, и что эта прямая пересекает кривую в точках $X$ и $Y$ и что на этой прямой взята длина

$$JZ = \sqrt{JX \cdot JY}$$

то по свойству конических сечений[74] будет

$$JX \cdot JY : LP^2 = JZ^2 : LP^2 = CJ \cdot JD : CL \cdot LD = SJ^2 : SL^2$$

следовательно

$$JZ : LP = SJ : SL$$

что показывает, что точки $S$, $P$, $Z$ лежат на одной прямой.

Так как касательные сходятся в точке $G$, то по свойству конических сечений будет

$$JX \cdot JY : JA^2 = JZ^2 : JA^2 = GP^2 : GA^2,$$

т. е.

$$JZ : JA = GP : GA$$

и следовательно, точки $P$, $Z$, $A$ лежат на одной прямой, значит и точки $P$, $S$, $A$ лежат на одной прямой. Подобным же образом докажется, что точки $P$, $R$, $A$ также лежат на одной прямой, следовательно точки касания $P$ и $A$ лежат на прямой $RS$. После того как эти точки будут найдены, кривая может быть построена подобно тому, как в первом случае предыдущей задачи.

В этом предложении и во втором случае предыдущего предложения построения остаются одинаковыми, пересекает ли прямая $XY$ кривую в точках $X$ и $Y$ на самом деле, или нет, ибо эти построения не зависят от этого пересечения. Но доказательство велось в предположении, что сказанная прямая кривую действительно пересекает; в случае, если такого пересечения нет, то, как уже сказано, построение остается без изменения, на подробном же доказательстве я, краткости ради, останавливаться не буду.

### Лемма XXII

*Преобразовать фигуры в другие фигуры такого же рода.*

Пусть преобразуемая фигура есть $HGJ$ (фиг. 54). Проводятся две параллельные прямые $AO$ и $BL$, пересекающие заданную по положению третью $AB$ в точках $A$ и $B$. Из произвольной точки $G$ фигуры проводится ее ордината $GD$, параллельная $AO$, до пересечения с данной прямою $AB$ (осью абсцисс). Затем из какой-либо точки $O$, взятой на прямой $AO$, проводится прямая $OD$, соединяющая точку $O$ с точкою $D$, основанием

[74] См. примечания 67 и 73.

ординаты $GD$. Пусть эта прямая $OD$ пересекает заданную прямую $BL$ в точке $d$. Из этой точки проводится прямая $dg$, составляющая с $BL$ заданный угол, и на ней откладывается такая длина $dg$, что

$$dg : Od = DG : OD,$$

тогда точка $g$ новой фигуры $hgi$ и будет соответствовать точке $G$ старой.

Таким образом каждая отдельная точка первой фигуры дает соответствующую ей точку новой. Если вообразить, что точка $G$, перемещаясь непрерывным образом, проходит последовательно через все точки первой фигуры, то и точка $g$ также непрерывно пройдет через все точки новой фигуры и опишет ее. Будем для различия называть ординаты $DG$ — старыми, ординаты $dg$ — новыми, абсциссы $AD$ — старыми, абсциссы $ad$ — новыми, $O$ — полюсом, $OD$ — секущим лучем, $OA$ — основанием старых ординат и $Oa$ (дополняющую параллелограмм $OABa$) — основанием новых ординат.

Я утверждаю, что когда точка $G$ описывает прямую, то и точка $g$ также описывает прямую, соответствующую первой. Когда точка $G$ описывает коническое сечение, то и точка $g$ также описывает коническое сечение. К коническим сечениям я причисляю и круг. Если точка $G$ описывает кривую третьего порядка, то и точка $g$ описывает кривую третьего же порядка; то же самое относится и до кривых высших порядков — кривые, описываемые точками $G$ и $g$, будут всегда одного и того же порядка. Действительно, имеем

$$ad : OA = Od : OD = dg : DG = AB : AD,$$

следовательно будет: [75]

$$AD = \frac{OA \cdot AB}{ad}$$

и

$$DG = \frac{OA \cdot dg}{ad}.$$

---

[75] При обычных теперь обозначениях преобразование Ньютона выражается следующими формулами.

Пусть будет:

$$AD = x \quad DG = y; \quad OA = a \quad AB = b$$
$$ad = x_1 \quad dg = y_1$$

тогда будет

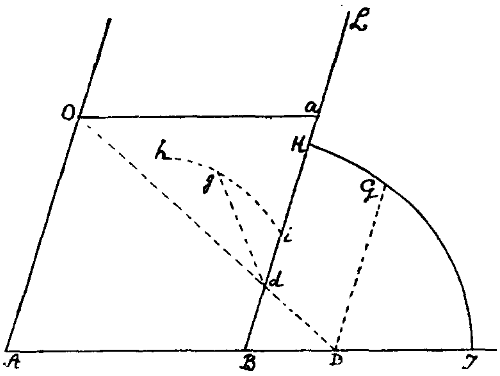
$$x = \frac{ab}{x_1} \quad y = \frac{by_1}{x_1}$$

Эти формулы становятся особенно просты, если взять $a = b$, тогда будет:

$$x = \frac{a^2}{x_1} \quad y = \frac{ay_1}{x_1}.$$

Это есть так называемое теперь *взаимное* преобразование, которое теперь выполняется обыкновенно аналитически, Ньютон же, предлагая его, дал и соответствующее геометрическое истолкование.

Следовательно, если точка $G$ описывает прямую линию и, значит, в уравнении, выражающем зависимость между абсциссою $AD$ и ординатою $DG$, переменные $AD$ и $DG$ заключаются лишь в первой степени, то подставив в это уравнение вместо $AD$ и $DG$ их выражения, приведенные выше, получим новое уравнение, в котором новая абсцисса $ad$ и новая ордината $dg$ будут входить лишь в первой степени и друг на друга не помноженными, поэтому это уравнение будет представлять прямую линию. Если же $AD$ и $DG$ или которая-нибудь одна из этих переменных входят в состав первого уравнения во второй степени, то и степень второго уравнения относительно $ad$ и $dg$ будет также вторая. То же самое относится и до уравнений третьей или вообще любой высшей степени — всегда степень первоначального уравнения относительно переменных $AD$ и $DG$ и степень преобразованного относительно переменных $ad$ и $dg$ будут одинаковы, и следовательно, кривые, представляющие геометрические места точек $G$ и $g$, будут одного и того же порядка.



Фиг. 54.

Я утверждаю, кроме того, что если какая-либо прямая касается первоначальной кривой, то прямая, представляющая преобразование этой прямой, касается преобразованной кривой, и наоборот. Ибо, если две точки первой кривой сближаются и в пределе совпадают, то и соотвествующие им точки на новой кривой также сближаются и совпадают в пределе, следовательно прямые, проходящие через эти точки, одновременно обращаются в касательные к своим кривым.

Можно было бы дать предыдущим утверждениям доказательства более геометрического характера, но я стремлюсь к краткости.[76]

[76] Из этих слов видно, что Ньютон доказательства геометрические при изложении «Начал» предпочитал алгебраическим, и с намерением избегал этих последних, может быть сообразуясь с общим состоянием науки и с приемами преподавания того времени, а также и с состоянием алгебры, в которой тогда еще не утратились громоздкие обозначения словами вместо знаков, особенно для показателей; между тем как геометрия, включавшая учение о конических сечениях и доведенная до высокой степени совершенства еще древними, составляла главнейший и, можно сказать, почти единственный предмет математического образования.

Итак, если надо преобразовать прямолинейную фигуру, то достаточно перенести точки пересечения прямых, ее образующих, и через полученные точки провести прямые, если же надо преобразовать криволинейную фигуру, то надо переносить те точки, касательные и иные прямые, коими кривая линия вполне определяется.

Эта лемма служит для решения трудных геометрических задач, преобразуя заданные фигуры в другие простейшие; так, напр., сходящиеся прямые линии можно преобразовать в параллельные, взяв за ось первоначальных ординат какую-нибудь прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых; при таком выборе преобразование точки их пересечения удалится в бесконечность, прямые же, нигде не встречающиеся, между собою параллельны. После того как для преобразованной фигуры задача будет решена, стоит только преобразовать ее обратно в первоначальную, чтобы получить требуемое решение для этой последней.

Эта лемма полезна также при решении задач, приводящих к уравнениям третьей или четвертой степени, коих решения получаются пересечением конических сечений, ибо если получатся два таких сечения, то задачу следует сперва преобразовать так, чтобы одно из этих сечений было эллипс, который затем легко преобразуется в круг. При решении же задач второй степени, приводящих к пересечению прямой и конического сечения, это последнее преобразуется в круг.[77]

### Предложение XXV. Задача XVII

*Провести коническое сечение, проходящее через две заданные точки и касающееся трех данных по положению прямых.*

Через точку пересечения двух из заданных касательных (фиг. 55) и через точку пересечения третьей касательной с прямою, проходящей через две заданные точки, проведи неограниченную прямую и, приняв ее за ось ординат (старых), преобразуй фигуру в новую по предыдущей лемме. В новой фигуре сказанные две касательные будут между собою параллельны, третья же касательная будет параллельна прямой, проходящей через две заданные точки. Пусть $hi$, $kl$ — сказанные две параллельные касательные, $ik$ — третья касательная, $hl$ — прямая, ей параллельная, проходящая через

[77] Задачи, приводящие к уравнениям второй степени, построение коих выполнимо при помощи пересечений кругов и прямых линий (циркулем и линейкой), назывались «задачами плоскими» — «problemata plana». Задачи же, приводившие к уравнениям третьей и четвертой степени, требовавшие построения конических сечений и определения их пересечений, назывались «задачами пространственными» — «problemata solida». Ньютон пользуется этою терминологиею, в переводе она заменена современною.

те две точки $a$ и $b$, через которые требуется провести коническое сечение на преобразованной фигуре.

Пусть $hi$, $ik$, $kl$ рассекаются точками $c$, $d$, $e$ так, что

$$hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ci : id = ke : kd = (hi + kl) : \left[ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb}\right],$$

тогда точки $c$, $d$, $e$ и будут точки касания.

Действительно, по свойству конических сечений будет

$$hc^2 : ah \cdot hb = ci^2 : di^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \cdot lb$$

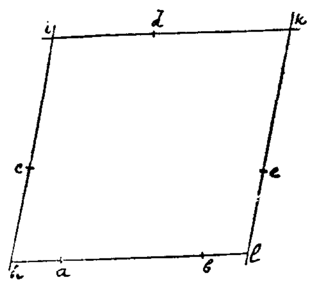
следовательно будет

$$hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ci : di = ke : kd = el : \sqrt{al \cdot lb};$$

взяв отношение суммы предыдущих ($hc + ci + ke + el$) равной ($hi + kl$) к сумме последующих, получим, что рассматриваемые отношения равны отношению

$$(hi + kl) : \left(ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb}\right).$$

Воспользовавшись этою пропорцией, определим положение точек касания на новой фигуре; перенеся их обратным преобразованием на первоначальную, пользуясь задачею XIV и определим искомую кривую.



Фиг. 55.

Необходимо иметь в виду, что когда точки $a$, $b$ лежат обе между точками $h$ и $l$, то точки $c$, $d$, $e$ надо брать между точками $h$, $i$, $k$, $l$; когда же они лежат вне $h$ и $l$, то и $c$, $d$, $e$ надо брать вне. Если же одна из точек $a$ или $b$ лежит между точками $h$ и $l$, другая же — вне, то задача невозможна.

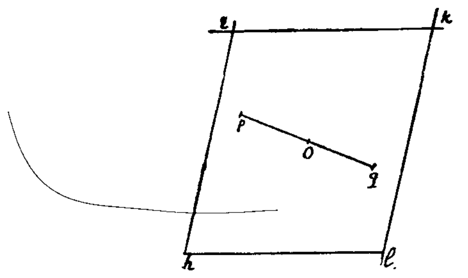
## Предложение XXVI. Задача XVIII

*Провести коническое сечение, проходящее через заданную точку и касающееся четырех заданных по положению прямых.*

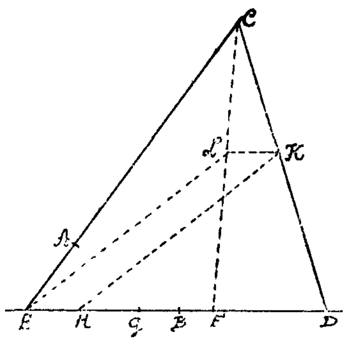
Через точку пересечения любых двух из заданных касательных и через точку пересечения двух других проводится неограниченная прямая, которая и принимается за ось ординат первоначальной фигуры, которая затем и преобразуется в новую. В этой новой касательные, пересекавшиеся на старой в точках, лежащих на оси ординат, станут попарно параллельными; пусть они будут $hi$ и $kl$, $ik$ и $hl$ (фиг. 56), образуя параллелограмм $hikl$, и пусть $p$ есть точка этой новой фигуры, соответствующая заданной точке старой. Через центр параллелограмма $O$ проводится прямая $pq$, и по ней откладывается $oq = op$, точка $q$ будет также лежать на искомом коническом сечении. Обратным преобразованием эта точка переносится на первоначальную фигуру, на которой тогда будут известны две точки, и она определится как показано в задаче XVII.

### Лемма XXIII

*Если по данным по положению прямым $AC$ и $BD$, от заданных на них точек $A$ и $B$, откладывать переменные длины $AC$ и $BD$, находящиеся*




Фиг. 56.




Фиг. 57.

*в постоянном отношении, и соединяющую их прямую $CD$ рассекать точкою $K$ также в постоянном отношении, то геометрическое место точек $K$ есть прямая линия.*

Пусть $E$ (фиг. 57) есть точка встречи прямых $AC$ и $BE$, и на прямой $BE$ берется точка $G$ так, чтобы было

$$BG : AE = BD : AC$$

и откладывается длина $FD$, равная $EG$, т. е. постоянная; тогда по построению будет

$$EC : GD = EC : EF = AC : BD$$

т. е. это отношение постоянное и треугольник $EFC$ сохраняет свой вид.

Пусть $CF$ разделяется точкою $L$ так, что

$$CL : CF = CK : CD;$$

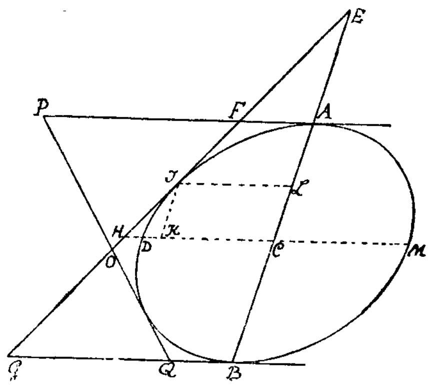
так как последнее отношение задано, то и треугольник $EFL$ сохраняет свой вид, и следовательно, точки $L$ будут располагаться на прямой $EL$, положение которой известно. Соедини $LK$, треугольники $CLK$ и $CFD$ будут подобны, и так как отношение $LK$ к $FD$ и длина $FD$ известны, то найдется и $LK$.

Взяв $EH = LK$, получим параллелограмм $ELKH$, следовательно точка $K$ располагается на постоянной стороне $HK$ этого параллелограмма.[78]

*Следствие.* Так как вид фигуры $EFLC$ сохраняется, то отношение длин $EF$, $EL$, $EC$, иначе, длин $GD$, $HK$, $EC$, друг к другу остается постоянным.

### Лемма XXIV

*Если коническое сечение касается трех прямых, из коих две параллельны и положение их задано, то полудиаметр кривой, параллельный этим двум касательным, есть среднее пропорциональное между отрезками их, заключенными между точками касания и точками пересечения с третьей касательной.*




Фиг. 58.

Пусть $AF$ и $GB$ (фиг. 58) — две параллельные прямые, касающиеся сечения $ADB$ в точках $A$ и $B$; $EF$ — третья касательная в точке $J$, пересекающая первые две в $F$ и $G$, и пусть $CD$ есть полудиаметр, параллельный касательным, тогда

$$AF : CD = CD : BG.$$

[78] Аналитически эта лемма доказывается весьма просто. Примем точку $E$ за начало координат, $BD$ — за ось $x$-ов, $AC$ — за ось $y$-ков, и пусть:

$$AE = a, \quad EB = b, \quad AC : BD = n; \quad KD : CD = k.$$

Возьмем $BD = \xi$, тогда $AC = n\xi$ и координаты точек $C$ и $D$ будут:

$$C \ldots 0 \text{ и } a + \xi; \quad D \ldots b + \xi, \ 0,$$

следовательно координаты $x$ и $y$ точки $K$ суть:

$$x = (b + \xi)(1 - k); \quad y = k(a + n\xi),$$

т. е. $y$ и $x$ — линейные функции произвольного параметра $\xi$, следовательно геометрическое место точек $K$ есть прямая линия.

Ибо, если сопряженные диаметры $AB$ и $DM$ пересекают касательную $FG$ в точках $E$ и $H$ и друг друга в $C$, то дополнив параллелограмм $JKLC$, по свойству конических сечений имеем

$$EC:CA = CA:CL$$

следовательно будет также

$$(EC - CA):(CA - CL) = EA:AL = EC:CA$$

и затем

$$(EA + AL):(EC + CA) = EL:EB = EC:CA.$$

По подобию же треугольников: $EAF$, $ELJ$, $ECH$, $EBG$, будет

$$AF:LJ = CH:BG$$

и по свойству конических сечений:

$$LJ:CD = CD:CH;$$

значит, будет [79]

$$AF:CD = CD:BG.$$

*Следствие 1.* Если две касательные $FG$ и $PQ$ пересекают параллельные касательные $AF$ и $BG$ в $F$ и $G$, $P$ и $Q$ и друг друга в $O$, то будет [80]

$$AF:BQ = AP:BG = FP:QG = OF:OG$$

---

[79] Пусть уравнение конического сечения, отнесенного к его сопряженным диаметрам, есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

и на нем взята точка $x_1 y_1$. Уравнение касательной в этой точке есть

$$\frac{x_1}{a^2}\xi + \frac{y_1}{b^2}\eta - 1 = 0.$$

Делая в этом уравнении сперва $\eta = +b$, затем $\eta = -b$, получим соответствующие отрезки касательных, параллельных оси $x$:

$$\xi_1 \frac{x_1}{a^2} = 1 - \frac{y_1}{b}$$

$$\xi_2 \frac{x_1}{a^2} = 1 + \frac{y_1}{b}.$$

Перемножив эти равенства и заметив, что

$$1 - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2}$$

получим по сокращении:

$$\xi_1 \xi_2 = a^2$$

что и доказывает лемму для эллипса. Совершенно так же она докажется и для гиперболы.

[80] В самом деле,

$$AF = \frac{CD^2}{BG}; \quad BQ = \frac{CD^2}{AP}$$

следовательно

$$AF:BQ = AP:BG = (AP - AF):(BG - BQ) = PF:GQ$$

но

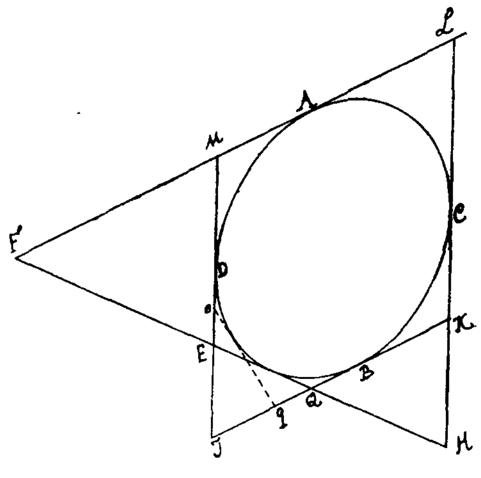
$$PF:GQ = OF:OG,$$

ибо треугольники $POF$ и $GOQ$ подобны.

*Следствие 2.* Отсюда следует, что точка пересечения прямых $PG$ и $FQ$, проведенных через точки $P$ и $G$, $F$ и $Q$, лежит на прямой $ACB$, проходящей через центр кривой и точки касания.

### Лемма XXV

*Если четыре неопределенно продолженные стороны параллелограмма касаются конического сечения и пересекаются какою-либо пятою касательной, то между отрезками двух смежных сторон параллелограмма, заключенными между двумя противоположными вершинами и секущей, имеет место следующее соотношение: отрезок так относится к своей стороне, как часть смежной стороны, заключенная между точкою ее касания и третьей стороной, относится ко второму отрезку.*



Фиг. 59.

Пусть стороны $ML$, $JK$, $KL$, $MJ$ параллелограмма $MLJK$ (фиг. 59) касаются конического сечения в точках $A$, $B$, $C$, $D$ и пятая касательная $FQ$ пересекает эти стороны в точках $F$, $Q$, $H$, $E$. Рассматривая отрезки $ME$ и $KQ$ сторон $MJ$ и $KJ$ или же отрезки $KH$ и $MF$ сторон $KL$ и $ML$, надо доказать, что будет

$$ME : MJ = BK : KQ$$

и

$$KH : KL = AM : MF.$$

По следствию 1 предыдущей леммы будет

$$ME : EJ = AM : BQ = BK : BQ$$

следовательно

$$ME : (ME + EJ) = BK : (BK + BQ),$$

т. е.

$$ME : MJ = BK : KQ$$

точно так же

$$KH : HL = BK : AF = AM : AF$$

следовательно

$$KH:(HL-KH)=AM:(AF-AM)$$

т. е.

$$KH:KL=AM:MF.$$

*Следствие 1.* Если известен параллелограмм $JKLM$, описанный около конического сечения, то будут известны и равные между собою произведения $KQ\cdot ME$ и $KH\cdot MF$. Равенство этих произведений следует из подобия треугольников $KQH$ и $MFE$.

*Следствие 2.* Если провести шестую касательную $eq$, пересекающую касательные $KJ$ и $MJ$ в точках $q$ и $e$, то будет

$$KQ\cdot ME=Kq\cdot Me,$$

следовательно будет

$$KQ:Me=Kq:ME=(KQ-Kq):(ME-Me)=Qq:eE.$$

*Следствие 3.* Отсюда следует, что прямая, проведенная через середины прямых $Eq$ и $eQ$, проходит через центр кривой, ибо, в силу пропорции

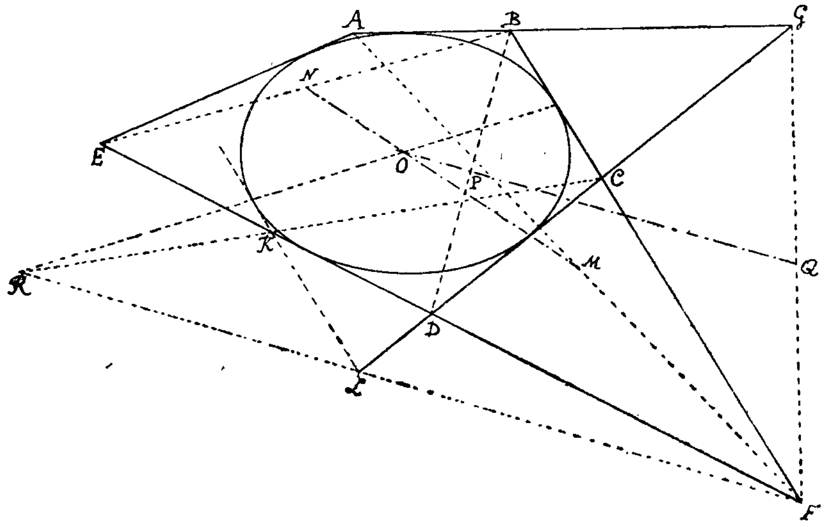
$$Qq:Ee=KQ:Me$$

эта прямая проходит через середины прямых $Eq$, $eQ$ и $MK$ (лем. XXIII). Середина же $MK$ есть центр кривой.

### Предложение XXVII. Задача XIX

*Провести коническое сечение, касающееся пяти данных по положению прямых.*

Пусть даны по положению касательные: $ABG$, $BCF$, $GCD$, $FDE$, $EA$ (фиг. 60). Раздели диагонали $AF$ и $BE$ четырехугольника $ABFE$, образованного какими-нибудь четырьмя из данных касательных, в точках $M$ и $N$ пополам; прямая $MN$ (лем. XXV, след. 3), проведенная через эти середины, пройдет через центр кривой. Раздели затем пополам диагонали $BD$ и $GF$ какого-нибудь другого четырехугольника $BGDF$, образованного другими четырьмя касательными; прямая $PQ$, проходящая через середины $P$ и $Q$ диагоналей, пройдет через центр кривой, который поэтому и получится в пересечении $PQ$ и $MN$. Пусть он будет в $O$. Проведи прямую $KL$ параллельно одной из касательных, напр. $BC$, так, чтобы центр $O$ лежал на середине расстояния между ними, тогда проведенная прямая есть также касательная к кривой. Пусть точки ее пересечения с двумя другими касательными $GCD$ и $FDE$ суть $L$ и $K$. Через точки пересечения $C$ и $K$, $F$ и $L$ этих непараллельных касательных $CL$, $FK$ с параллельными $CF$, $KL$ проведи прямые $CK$ и $FL$, пересекающиеся в $R$; прямая $OR$ пересечет параллельные касательные $CF$ и $KL$ в точках касания. Это следует из леммы XXIV, следствие 3. Таким же способом можно найти точки касания и прочих касательных и затем по построению задачи XIV описать и самую кривую.



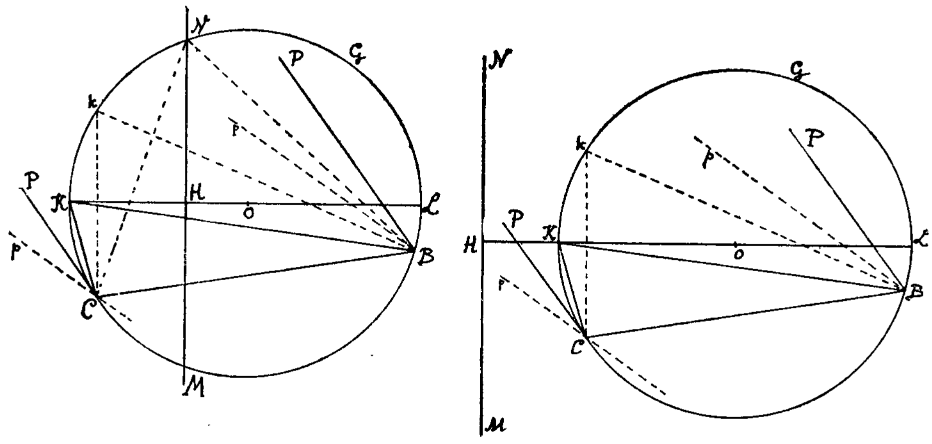

Фиг. 60.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Задачи, в которых задаются или центры, или асимптоты, заключаются в предыдущих. Ибо когда даны точки и касательные вместе с центром, то тем самым задается еще столько же точек или касательных, расположенных в одинаковом расстоянии по другую сторону от центра. Асимптоту можно также считать за касательную и ее бесконечно удаленную точку (если можно так выразиться) — за точку касания. Вообрази, что точка касания какой-либо касательной удаляется в бесконечность, тогда эта касательная и обратится в асимптоту и построения предыдущих задач обратятся в построения при заданной асимптоте.

После того как фигура построена, можно найти ее оси и фокусы следующим образом: в построении и чертеже леммы XXI сделай так, чтобы стороны $BP$ и $CP$ подвижных углов $PBN$ и $PCN$ (фиг. 61), коих пересечением описывается кривая, стали бы между собою параллельны; если, сохраняя такое взаимное расположение этих сторон, вращать углы около их полюсов

$B$ и $C$, то вторые их стороны $CN$ и $BN$ опишут точкою своего пересечения $k$ круг[81] $BGKC$. Пусть центр этого круга есть $O$. Из этого центра опусти на ту прямую $MN$, по которой велась точка пересечения сторон при описании конического сечения, перпендикуляр $OH$, пересекающий круг в точках




Фиг. 61.

[81] Это поучение составляет дополнение к лемме XXI, в которой дано «органическое построение» — «descriptio organica» — конических сечений. Положим сперва, что кривая есть гипербола (ниже будет показано, при каком условии это имеет место), тогда нетрудно построить направления ее асимптот, ибо очевидно, что эти направления суть те, при которых точка пересечения лучей удаляется в бесконечность и лучи становятся параллельными. Положим сперва, что лучи, направляясь параллельно, лежат по ту же сторону хорды $CB$ и что точка $N$ на прямой $MN$ есть точка пересечения ведущих сторон углов при этом их положении; тогда, проведя через $N$ прямую $NH$, параллельную $CP$ и $BP$, видим, что угол

$$CNB = \alpha + \beta$$

следовательно точка $N$ лежит на сегменте, вмещающем этот угол $\gamma = \alpha + \beta$.

Если же второе асимптотическое направление располагается так, что прямые $CP$ и $BP$ идут по разные стороны хорды $BC$, то угол $CMB = \pi - (\alpha + \beta)$, т. е. сегмент $CMB$, дополняет предыдущий до полного круга.

Таким образом точки пересечения $M$ и $N$ ведущей прямой с кругом, вмещающим на хорде $BC$ угол $\alpha + \beta$, дают положения ведущих сторон, соответствующие направлениям асимптот. Так как направления осей разделяют угол между асимптотами пополам, то этим направлениям будут соответствовать на круге середины дуг $MN$, т. е. *концы* $K$ и $L$ *диаметра, перпендикулярного к прямой* $MN$. Направление лучей, соответствующее пересечению ведущих сторон в точке $K$, дает направление одной оси, соответствующее точке $L$ — другой. При этом то направление, которое разделяет пополам тот угол между асимптотами, в котором лежит кривая, дает главную ось, т. е. ту, на которой лежат фокусы.

Когда прямая $MN$ пересекает круг, то кривая есть гипербола, ибо ее асимптоты вещественные. Когда же $MN$ круга не пересекает, то кривая есть эллипс, но так как построение направлений осей *не зависит* от того, пересекается ли $MN$ с кругом, или нет, то оно остается без изменений. Если $MN$ касается круга, то кривая есть парабола.

$K$ и $L$. Когда углы занимают такое положение, что их пересекающиеся стороны $CK$ и $BK$ сходятся в точке $K$, ближайшей к прямой $MN$, то направления $CP$, $BP$ первых сторон углов параллельны большой оси конического сечения, перпендикулярные же им — малой. Обратное имеет место, если взять более отдаленную точку $L$. По известному положению[82] центра кривой найдутся и ее оси, после же того как оси найдены, получаются и фокусы.

Кроме того, отношение квадратов[83] осей друг к другу равно отношению $KH$ к $LH$, следовательно легко построить кривую, подобную данной и проходящую через четыре заданные точки. Ибо, если две из данных точек принять за полюсы, то третья даст подвижные углы $PCK$, $PBK$, когда же эти углы известны, то можно провести круг $BGKC$. Затем, так как вид кривой задан, то будет известно отношение $OH$ к $OK$, т. е. самое $OH$. Если из центра $O$ радиусом $OH$ описать другой круг, то касательная к этому кругу, проведенная через точку пересечения сторон $CK$ и $BK$, при том положении подвижных углов, при котором их первые стороны $CP$ и $BP$ проходят через четвертую из данных точек, и будет тою прямою $MN$, при помощи которой строится кривая.

Обратно, можно в данное коническое сечение вписать четырехугольник, подобный данному (за исключением некоторых случаев невозможности).

Есть и еще леммы, при помощи которых можно строить конические сечения заданного вида по заданным точкам и касательным. Напр., лемма такого рода: если через заданную точку проводить прямую, пересекающую

---

[82] Центр найдется по пересечению двух диаметров; для того же, чтобы построить диаметр, стоит только, взяв какую-нибудь хорду кривой, проходящую через один из полюсов, напр. $C$, провести через точку $B$ луч, ей параллельный, и построить точку кривой, лежащую на этом луче. Прямая, проходящая через середины параллельных хорд, и есть диаметр.

Удобнее всего за направление этих двух диаметров брать определенные, как показано выше, направления, которые параллельны осям, тогда сам собою получается прямоугольник, вписанный в кривую, а так как отношение между длинами осей известно (см. прим. 83), то найдутся и самые оси.

[83] Соединим точку $B$ с точкой $N$, тогда угол $KBN = 2\delta$ есть угол между асимптотами; пусть $R$ есть радиус круга, тогда:

$$KN = 2R \cdot \sin\delta; \qquad KH = KN \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = 2R \cdot \sin^2\delta$$

$$LN = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right); \qquad LH = LN \cdot \cos\delta = 2R \cdot \cos^2\delta,$$

но отношение осей

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\delta$$

следовательно

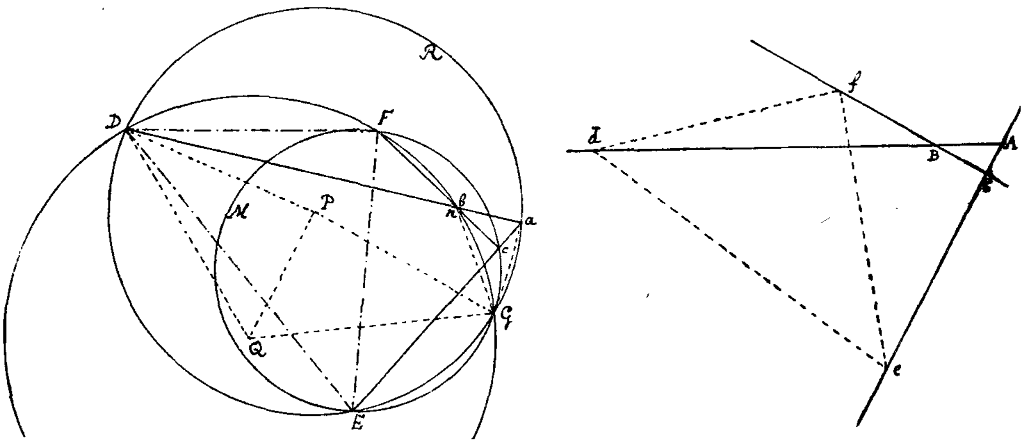
$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{KH}{LH}.$$

данное коническое сечение в двух точках, и расстояние между этими двумя точками разделять пополам, то точка деления опишет коническое сечение, подобное данному, и оси его будут параллельны осям данного.

Но я перейду к более полезным.

### Лемма XXVI

*Расположить вершины треугольника, по виду и величине равного заданному, так, чтобы каждая из них лежала на одной из трех заданных непараллельных прямых.*



Фиг. 62.

Пусть даны по положению три неограниченные прямые $AB$, $AC$, $BC$ (фиг. 62) и требуется расположить заданный треугольник $DEF$ так, чтобы его вершина $D$ лежала на прямой $AB$, вершина $E$ — на прямой $AC$ и вершина $F$ — на $BC$. Опиши около $DE$, $DF$, $EF$ три сегмента $DRE$, $DGF$, $EMF$, вмещающих углы, соответственно равные $BAC$, $ABC$, $ACB$. Эти сегменты надо описывать по такую сторону прямых $DE$, $DF$ и $EF$, чтобы последовательность букв $DRED$ была бы одинаковой с последовательностью $BACB$, $DGFD$—одинаковою с $ABCA$ и $EMFE$ — одинаковою с $ACBA$. Эти сегменты дополняются до полных кругов. Пусть первые два круга пересекаются в точке $G$, и пусть $P$ и $Q$ — центры их. Соединив $PG$, $PQ$, возьми $Ga$ так, чтобы было

$$Ga : AB = FG : PQ$$

и точкою $G$, как центром, и радиусом $Ga$ опиши круг, пересекающий первый круг $DGE$ в точке $a$. Проведи затем $aD$, пересекающую второй круг $DEG$

в $b$, и $aE$, пересекающую третий круг $EMF$ в $c$. Остается построить фигуру $ABCdef$, равную и подобную фигуре $abcDEF$, и задача будет решена.

Действительно, проведем $Fc$, пересекающую $aD$ в $n$, и соедним $aG$, $bG$, $QG$, $QD$, $PD$. По построению углы

$$EaD = CAB \quad acF = ACB$$

поэтому треугольники $anc$ и $ABC$ имеют соответственно равные углы. Следовательно, угол $anc$ или $FnD$ равен $ABC$, значит и углу $FbD$, что показывает, что точка $n$ совпадает с точкою $b$.

Угол $GPQ$, равный половине угла при центре $GPD$, равен углу при окружности $GaD$, и угол $GQP$, равный половине центрального угла $GQD$, равен дополнению до двух прямых угла при вершине $GbD$, значит равен углу $Gba$, и треугольники $GPQ$ и $Gab$ между собою подобны, и

$$Ga : ab = GP : PQ = Ga : AB \text{ (по построению)},$$

следовательно $ab$ равно $AB$, поэтому треугольники $abc$ и $ABC$, о которых доказано, что они подобны, вместе с тем и равны. Так как, сверх сего, вершины $D$, $E$, $F$ треугольника $DEF$ лежат на сторонах $ab$, $ac$, $bc$ треугольника $abc$, то можно построить фигуру $ABCdef$, равную и подобную фигуре $abcDEF$, и задача будет решена.

*Следствие.* Подобным же способом можно провести прямую так, что ее отрезки, заключенные между тремя другими прямыми, будут заданной длины. Вообрази, что вершина $D$ треугольника $DEF$ упадает на сторону $EF$ и что его стороны составляют продолжение одна другой, так что этот треугольник обратился в прямую линию, коей отрезок данной длины $DE$ должен заключаться между заданными прямыми $AB$ и $AC$ и отрезок заданной же длины $DF$ — между прямыми $AB$ и $BC$. Применив к этому случаю указанное построение и получим решение задачи.

### Предложение XXVIII. Задача XX

*Провести коническое сечение заданного вида и величины так, чтобы заданные его части заключались бы между тремя данными по положению прямыми.*

Пусть требуется построить кривую, равную и подобную данной $DEF$, так, чтобы тремя заданными прямыми $AB$, $AC$, $BC$ она рассекалась бы на части, равные и подобные заданным $DE$ и $EF$ (фиг. 63).

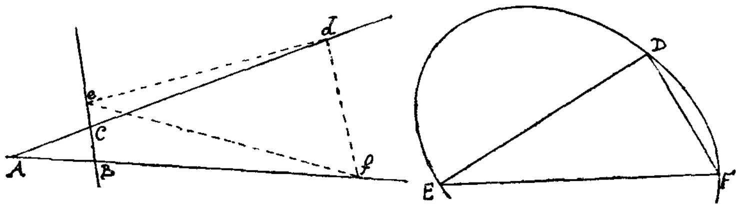
Проведи прямые $DE$, $EF$, $DF$ и построй треугольник, равный и подобный $DEF$, так, чтобы его вершины лежали соответственно на прямых

$AB$, $AC$, $BC$, что выполняется по лемме XXVI, затем опиши около этого треугольника заданную кривую.

### Лемма XXVII

*Построить четырехугольник заданного вида так, чтобы его вершины лежали соответственно на четырех заданных прямых, которые не сходятся в одну точку и не все между собою параллельны.*

Пусть четыре прямые $ABC$, $AD$, $BD$, $CE$ (фиг. 64) заданы по положению, и пусть первая из них пересекает вторую в $A$, третью в $B$, четвертую в $C$; требуется построить четырехугольник $fghi$, подобный $FGHJ$, так,




Фиг. 63.

чтобы вершина угла $f$, равного $F$, лежала на прямой $ABC$, три же остальные вершины углов $g$, $h$, $i$, равных углам $G$, $H$, $J$, лежали бы соответственно на прямых $AD$, $BD$, $CE$.

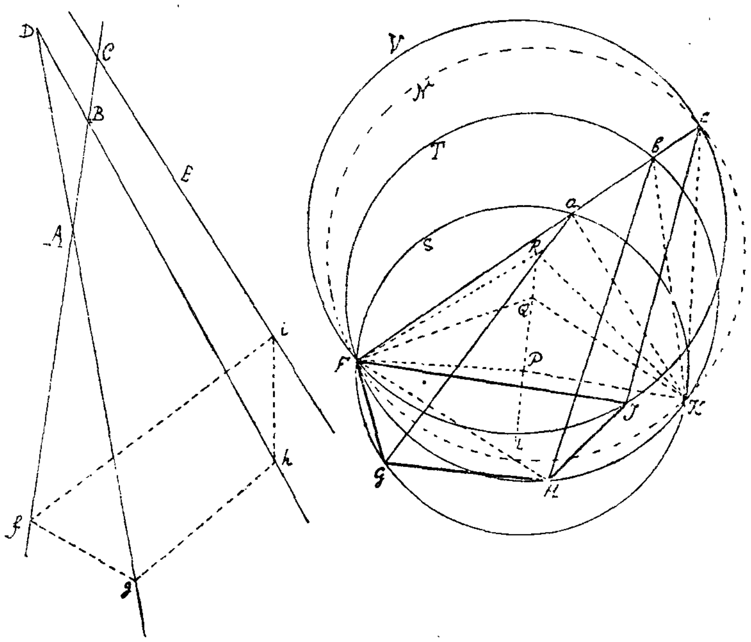
Соедини $FH$ и опиши на $FG$, $FH$, $FJ$ сегменты $FSG$, $FTH$, $FVJ$, которые вмещают углы, соответственно равные углам $BAD$, $CBD$ и $ACE$, образуемым заданными прямыми. Эти сегменты надо описывать с той стороны прямых $FG$, $FH$, $FJ$, чтобы буквы $FSGF$, $FTHF$, $FVJF$ шли соответственно в той же последовательности, как $BADB$, $CBDC$, $ACEA$. Сегменты дополняются до полных кругов; пусть $P$ есть центр первого круга $FSG$ и $Q$ — второго $FTH$. Проведя и продолжив в обе стороны прямую $PQ$, возьми на ней $QR$ так, чтобы было

$$QR : PQ = BC : AB,$$

причем $QR$ надо откладывать в такую сторону от $Q$, чтобы порядок букв $P$, $Q$, $R$ был одинаков с порядком букв $ABC$. Центром $R$ и радиусом $RF$ описывается четвертый круг $FNc$, пересекающий третий $FVJ$ в точке $c$. Соедини $Fc$, пересекающую первый круг в $a$, второй в $b$, проведи $aG$, $bH$, $cJ$, тогда можно построить фигуру $ABCfghi$, подобную фигуре $abcFGHJ$; четырехугольник $fghi$ и будет требуемый.

Пусть первые два круга $FSG$, $FTH$ пересекаются в $K$; соедини $PK$, $QK$, $RK$, $aK$, $bK$, $cK$ и продолжи $QP$ до $L$. Углы $FaK$, $FbK$, $FcK$, имеющие свои вершины на окружностях, равны половинам центральных углов $FPK$, $FQK$, $FRK$, следовательно они равны углам $LPK$, $LQK$, $LRK$, и фигура $PQRK$ равноугольна и подобна фигуре $abcK$, поэтому

$$ab : bc = PQ : QR = AB : BC$$




Фиг. 64.

кроме того, по построению углы $FaG$, $FbH$, $FcJ$ соответственно равны $fAg$, $fBh$, $fCi$. Следовательно, по фигуре $abcFGHJ$ может быть закончена подобная ей фигура $ABCfghi$, после чего и получится четырехугольник $fghi$, подобный $FGHJ$, расположенный так, что его вершины лежат на четырех заданных прямых $ABC$, $AD$, $BD$, $CE$.

*Следствие.* Пользуясь этим построением, можно провести прямую так, что ее отрезки, заключающиеся в определенном порядке между четырьмя заданными прямыми, будут находиться в данном друг к другу отношении. Пусть углы $FGH$, $GHJ$ увеличиваются до тех пор, пока прямые $FG$, $GH$, $HJ$ составят продолжение одна другой; выполнив описанное выше построение для этого случая, получим такую прямую $fghi$, части которой $fg$, $gh$, $hi$, заключенные между заданными по положению прямыми $AB$ и $AD$, $AD$ и $BD$, $BD$ и $CE$, будут относиться друг к другу, как длины $FG$, $GH$, $HJ$, и будут сохранять ту же самую последовательность.

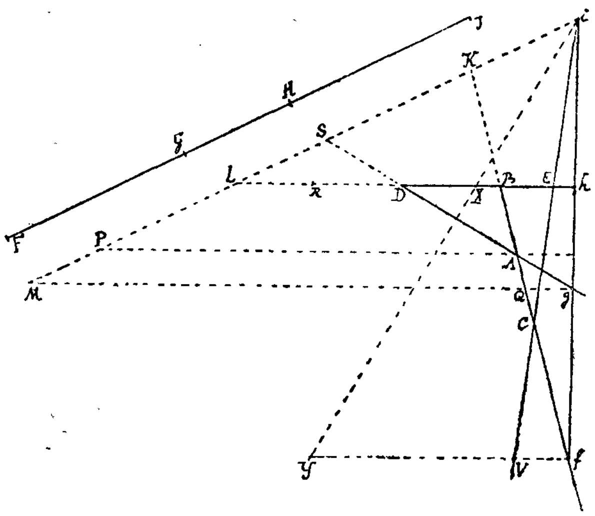
Но эта задача может быть решена проще следующим образом: продолжи $AB$ до $K$ и $BD$ до $L$ (фиг. 65) так, чтобы было

$$BK : AB = HJ : GH$$

и

$$DL : BD = GJ : FG,$$

и проведи $KL$, пересекающую $CE$ в $i$.




Фиг. 65.

Продолжи $iL$ до $M$ так, чтобы было

$$LM : iL = GH : HJ$$

и проведи $MQ$, параллельную $LB$ и пересекающую $AD$ в $g$, затем $gi$, пересекающую $AB$ и $BD$ в $f$ и $h$. Прямая $gi$ и есть искомая. Пусть $Mg$ пересекает прямую $AB$ в $Q$, и $AD$ пересекает прямую $KL$ в $S$, прямая же $AP$ проведена параллельно $BD$ и пересекает $iL$ в $P$, тогда будет

$$gM : Lh = gi : hi = Mi : Li = GJ : HJ = AK : BK = AP : BL.$$

Пусть $DL$ рассекается точкою $R$ так, что отношение $DL : RL$ равно предыдущим; тогда будет

$$DL : RL = gS : gM = AS : AP = DS : DL = AP : BL$$

и следовательно, будет

$$gS : Lh = AS : BL = DS : RL,$$

откуда следует

$$(BL - RL) : (Lh - BL) = (AS - DS) : (gS - AS),$$

т. е.

$$BR : Bh = AD : Ag = BD : gQ$$

вместе с тем

$$BR : BD = Bh : gQ = fh : fg.$$

Но по построению линия $BL$ разделялась точками $D$ и $R$ в том же отношении, как длина $FJ$ точками $G$ и $H$, так что

$$BR : BD = FH : FG$$

следовательно, и

$$fh : fg = FH : FG$$

и так как

$$gi : hi = Mi : Li = GJ : HJ$$

то линии $FJ$ и $fi$ рассекаются точками $G$ и $H$, $g$ и $h$ подобным образом.

При выполнении построения этой задачи, после того как будет проведена прямая $LK$, пересекающая $CE$ в $i$, следует продолжить $iE$ до $V$ так, чтобы было

$$EV : Ei = FH : HJ,$$

и пронести $Vf$ параллельно $BD$. Та же прямая получится, если из центра $i$ радиусом $JH$ описать круг, пересекающий $BD$ в $X$, и продолжить $iX$ до $Y$ так, чтобы было

$$iY = JF$$

и провести $Yf$ параллельно $BD$.

Другие решения этой задачи дали Врен[84] и Уаллис.

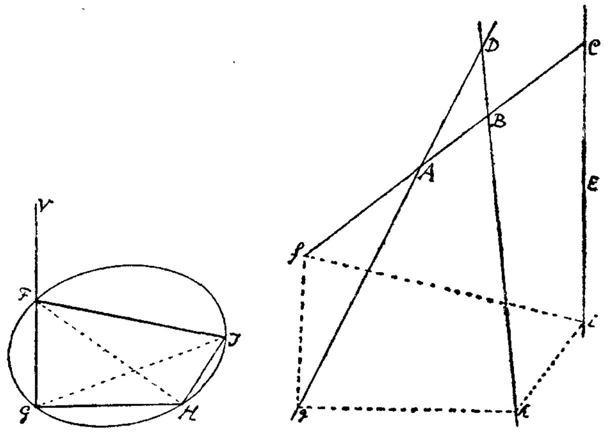
### Предложение XXIX. Задача XXI

*Провести коническое сечение данного вида, которое рассекалось бы четырьмя заданными прямыми на части, заданные по последовательности расположения, виду и пропорции.*

Пусть требуется построить коническое сечение, которое было бы подобно данному $FGHJ$ (фиг. 66) и которого части были бы подобны и пропорциональны частям $FG$, $GH$, $HJ$ и располагались бы в том же порядке

[84] Построение, данное Wrenn'ом, приведено в моей статье: «Определение орбит планет и комет по малому числу наблюдений». (Изв. Морск. Акад., вып. 1). Там же дано весьма простое аналитическое решение этой задачи.

между заданными прямыми $AB$ и $AD$, $AD$ и $BD$, $BD$ и $CE$. После проведения прямых $FG$, $GH$, $HJ$ и $FJ$ построй (лем. XXVII) четырехугольник $fghi$, подобный $FGJHJ$, так, чтобы его вершины лежали на заданных прямых $AB$, $AD$, $BD$, $CE$ в указанном порядке, и около этого четырехугольника опиши коническое сечение, подобное данному. Оно и будет требуемое.




Фиг. 66.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Построение этой задачи может быть выполнено и следующим образом: после проведения $FG$, $GH$, $HJ$, $FJ$ (фиг. 67), продолжи $GF$ в сторону $V$, проведи $FH$, $JG$ и построй угол $CAK = FGH$ и $DAL = VFH$. Пусть прямые $AK$ и $AL$ пересекают прямую $BD$ в $K$ и $L$, проведи $KM$ и $LN$ так, чтобы угол $AKM$ равнялся $GHJ$ и угол $ALN$ равнялся $FHJ$ и чтобы было

$$KM : AK = HJ : GH \quad \text{и} \quad LN : AL = HJ : FH.$$

Прямые $AK$, $KM$, $AL$, $LN$ проводятся в такую сторону от линий $AD$, $AK$, $AL$, чтобы буквы $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ следовали бы в той же круговой последовательности, как буквы $FGHJF$. Прямая $MN$, проходящая через $M$ и $N$, пересекает прямую $CE$ в $i$. Построй угол $iEP$, равный $JGF$, и возьми $PE$ так, чтобы было

$$PE : Ei = FG : GJ.$$

Через точку $P$ проведи $PQf$, составляющую с прямой $ADE$ угол $PQE$, равный $FJG$, и пересекающую прямую $AB$ в $f$. Соедини $fi$, при этом $PE$ и $PQ$ надо проводить в такую сторону от прямых $CE$ и $PE$, чтобы круговая последовательность букв *PEiP* и *PEQP* была одинаковой с последовательностью *FGHJF*. Если на прямой *fi* построить, соблюдая последовательность букв, четырехугольник *fghi*, подобный *FGHJ*, и описать кривую, подобную данной, то задача и будет решена.

Однако достаточно об определении орбит. Остается показать, каким образом определяется движение по найденным орбитам.

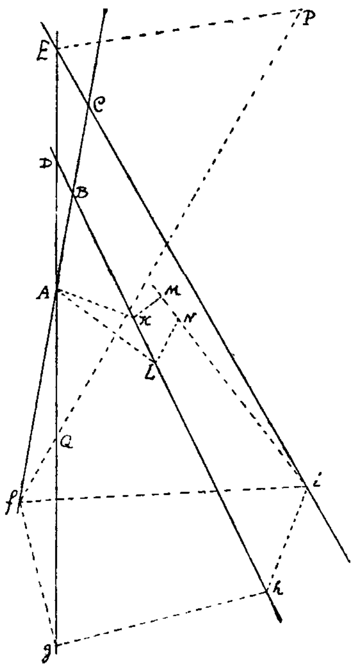
## ОТДЕЛ VI

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ ОРБИТАМ

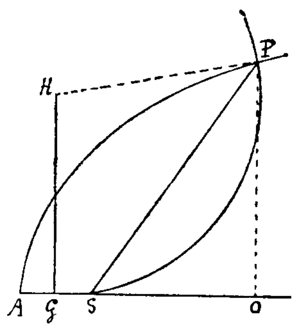
### Предложение XXX. Задача XXII

*Определить место тела, движущегося по заданной параболической траектории в данный момент времени.*

Пусть $S$ — фокус, $A$ (фиг. 68) — главная вершина параболы, и пусть про-




Фиг. 67.




Фиг. 68.

изведение $4AS \cdot M$ равно площади $APS$, описанной радиусом $SP$ после прохождения тела через вершину, или же той площади, которую ему предстоит описать для достижения вершины. Величина этой площади определяется по времени, коему она пропорциональна.

Раздели $AS$ в точке $G$ пополам и восставь перпендикуляр $GH$, равный $3M$, центром $H$ и радиусом $HS$ опиши круг, пересекающий параболу в точке $P$; эта точка и есть искомое место тела. Ибо, если на ось опустить перпендикуляр $PO$ и провести $PH$, то будет

$$PH^2 = AG^2 + GH^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2 =$$
$$= AO^2 + PO^2 - 2AO \cdot AG - 2GH \cdot PO + AG^2 + GH^2.$$

Отсюда

$$2GH \cdot PO = AO^2 + PO^2 - 2AO \cdot AG = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2.$$

Вместо $AO^2$ напиши $AO \cdot \frac{PO^2}{4AS}$; тогда, разделив на $3PO$ и умножив на $2AS$, получишь

$$\frac{4}{3} GH \cdot AS = \frac{1}{6} AO \cdot PO + \frac{1}{2} AS \cdot PO =$$

$$= \frac{AO + 3AS}{6} \cdot PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \cdot PO =$$

$$= \text{площ.}\ (APO - SPO) = \text{площ.}\ APS.$$

Но

$$GH = 3M$$

следовательно

$$\frac{4}{3} GH \cdot AS = 4AS \cdot M$$

т. е. отсеченная площадь и есть как раз требуемая.

*Следствие 1.* Отношение $GH$ к $AS$ равно отношению промежутка времени, в течение которого тело описало дугу $AP$, к промежутку времени, в течение которого оно описывало дугу $AK$, заключенную между вершиною $A$ и перпендикуляром к оси, проведенным через фокус.[85]

*Следствие 2.* Если постоянно проводить круг $ASP$, проходящий через движущееся тело $P$, то скорость точки $H$ так относится к скорости тела при прохождении через вершину $A$, как 3 к 8, и следовательно, в этом же отношении находится длина $GH$ к той длине, которую тело за время своего движения от $A$ к $P$ могло бы пройти, двигаясь равномерно[86] с тою скоростью, которую оно имело в вершине $A$.

---

[85] Пусть время описания дуги $AP$ есть $t_1$, дуги $AK$ ... $t_0$, тогда, обозначая через $2c$ — постоянную площадей, имеем

$$GH = \frac{3ct_1}{4AS}$$

следовательно

$$\frac{GH}{AS} = \frac{3ct_1}{4AS^2}.$$

Но площадь

$$ASK = ct_0 = \frac{2}{3} AS \cdot SK = \frac{4}{3} AS^2.$$

Отсюда следует

$$\frac{GH}{AS} = \frac{t_1}{t_0}.$$

[86] Скорость точки $H$ равна

$$\frac{GH}{t_1} = \frac{3c}{4AS}$$

но

$$2c = v_0 \cdot AS,$$

где $v_0$ есть скорость тела в точке $A$, следовательно

$$\frac{GH}{t_1} = \frac{3}{8} v_0.$$

*Следствие 3.* Обратно, можно найти время, в продолжение которого тело описало какую-либо заданную дугу $AP$; соедини $AP$, и из середины этой прямой восставь перпендикуляр, он пересечет $GH$ в точке $H$.

### Лемма XXVIII

*Не существует такой замкнутой овальной кривой, для которой площадь, отсекаемая произвольно проводимыми прямыми, определялась бы в общем виде уравнениями с конечным числом членов и конечной степени.*

Пусть внутри овала взята какая-нибудь точка, около которой, как около полюса, равномерно вращается прямая линия, и одновременно из полюса выходит точка и движется по этой прямой со скоростью, пропорциональной квадрату длины отрезка этой прямой, заключенного внутри овала, между полюсом и периметром. При таком движении точка описывает спираль из бесчисленного множества оборотов. Если бы часть площади овала, отсекаемая сказанной прямой, могла бы быть найдена при помощи алгебраического уравнения с конечным числом членов, то при помощи того же уравнения нашлось бы и расстояние точки спирали до полюса, которое этой площади пропорционально; следовательно, все точки спирали могли бы быть найдены при помощи конечного алгебраического уравнения, поэтому и точки пересечения с какою угодно заданной по положению прямой определялись бы при помощи алгебраического уравнения конечной степени. Но всякая неопределенно продолженная прямая пересекает спираль в бесконечном числе точек, уравнение же, помощью которого находятся точки пересечения двух линий, доставляет их всеми своими корнями и в том же числе, следовательно степень уравнения должна быть такою же, каково число точек пересечения.

Так, например, два круга пересекаются в двух точках, и каждая из них находится не иначе, как при помощи уравнения второй степени, которым определяется вместе с нею и вторая точка пересечения. Два конических сечения могут пересекаться в четырех точках, и эти точки, вообще, нельзя найти иначе, как при помощи уравнения четвертой степени, которым они все определяются совместно. Это происходит потому, что если бы искать каждое из этих пересечений в отдельности, то так как для них для всех условия одни и те же, то и вычисление для каждого пересечения будет то же самое, поэтому и получится одно и то же окончательное уравнение, которое должно доставлять все пересечения совместно, полно и безразлично. Таким образом пересечения конического сечения и кривой третьего порядка, так как их может быть шесть, доставляются совместно уравнением шестой степени; пересечения двух кривых третьего порядка, которых может быть девять, доставляются уравнением девятой степени. Если бы это могло быть иначе, то все задачи, приводящие к уравнениям третьей степени, можно было бы сводить на задачи плоские, т. е. решаемые при помощи уравнений первой и второй степени. Все же задачи высших степеней — к задачам третьей степени. Здесь я говорю о кривых неприводимых, ибо, если уравнение, определяющее кривую, может быть приведено к уравнению низшей степени, то эта кривая не простая, а составленная из двух или нескольких, которых пересечения и могут быть находимы в отдельности для каждой. Таким образом пересечения двух прямых и конического сечения доставляются всегда уравнениями второй степени, трех прямых и неприводимой кривой третьего порядка — уравнениями третьей степени, четырех прямых и неприводимой кривой четвертого порядка — уравнением четвертой степени и т. д. до бесконечности.

Следовательно, бесчисленное множество точек пересечения прямой и спирали, так как эта кривая простая и неприводимая, потребуют для своего определения уравнения с бесконечным числом корней и бесконечно большой степени, которое могло бы доставить все пересечения совместно, ибо для всех для них один и тот же закон и одно и то же вычисление. Если из полюса опустить на сказанную секущую перпендикуляр и вращать его вместе с секущей около полюса, то пересечения спирали будут переходить одно в другое; то, которое было первым или ближайшим к основанию перпендикуляра, через один оборот станет вторым, после двух оборотов — третьим и т. д., между тем самое уравнение не иначе может измениться, как только от изменения величины тех количеств, которыми определяется положение самой секущей. А так как после каждого полного оборота эти количества принимают свои прежния значения, то и уравнение вновь принимает свой первоначальный вид и, следовательно, будучи единственным и оставаясь неизменным, должно доставить все точки пересечения в бесконечном числе, следовательно оно должно иметь бесчисленное число корней. Итак, нельзя определить, вообще, пересечения прямой и спирали при помощи конечного уравнения, поэтому и не существует замкнутого овала, коего площадь, отсекаемая произвольно взятою прямой, могла бы выражаться в общем виде при помощи таких уравнений.

Подобным же рассуждением, взяв за расстояние между полюсом и подвижною точкою, описывающею спираль, длину, пропорциональную отсекаемой части периметра овала, можно доказать, что длина периметра не может быть найдена вообще при помощи уравнений конечной степени. Под замкнутым овалом я здесь разумею такие кривые, которые не касаются сопряженных с ними кривых, уходящих в бесконечность.

*Следствие.* Таким образом для эллипса площадь, описываемая радиусом, проводимым из фокуса к движущемуся телу, не может быть получена по данному времени при помощи конечного алгебраического уравнения, и поэтому не может быть определена пересечением эллипса с геометрически рациональной (алгебраической) кривой. Я называю геометрически рациональными (алгебраическими) кривыми такие, все точки коих определяются при помощи длин, определяемых, в свою очередь, алгебраическими уравнениями, т. е. при помощи сложных и составных отношений между длинами. Прочие же кривые (как спирали, квадратрисы, трохоиды) я называю геометрически иррациональными (трансцендентными), подобно тому как длины называются арифметически рациональными, если они относятся друг к другу, как целое число к целому, если же такого отношения не существует — то арифметически иррациональными, как о том сказано в книге X «Элементов».

Отсечение же от эллипса площади, пропорциональной времени, при помощи геометрически иррациональной кривой исполняется следующим образом.

**Предложение XXXI. Задача XXIII**

*Найти место, занимаемое движущимся по эллиптической траектории телом в данный момент времени.*

Пусть $A$ (фиг. 69) есть главная вершина эллипса, $S$ — фокус, $O$ — центр. $P$ — искомое место тела.

Продолжи $OA$ до $G$ так, чтобы было

$$OG : OA = OA : OS,$$

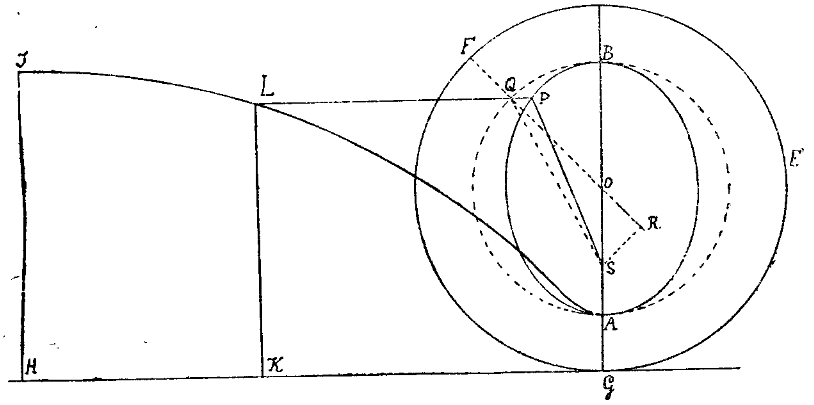
восставь перпендикуляр $GH$ и точкою $O$, как центром, и радиусом $OG$ опиши круг $GEF$ и вообрази, что по линейке $GH$, как по основанию, катится колесо $GEF$, вращаясь при этом около своей оси $O$; точка $A$, взятая внутри его, описывает при этом трохоиду $ALJ$. Возьми длину $GK$, составляющую от длины обода колеса такую же долю, как время, в продолжение которого тело переходит из $A$ в $P$, от времени полного оборота по эллипсу. Восставь перпендикуляр $KL$, пересекающий трохоиду в $L$, и проведи прямую $LP$ параллельно $KG$; в точке $P$ ее пересечения с эллипсом и получится требуемое место тела.

Радиусом $OA$ опиши полукруг из точки $O$, как центра, и пусть его пересечение с прямою $LP$, если нужно продолженной, есть $Q$. Соедини $SQ$

и $OQ$, и пусть $OQ$ пересекает круг $EFG$ в точке $F$; из фокуса опусти на эту же прямую перпендикуляр $SR$. Площадь $APS$ пропорциональна площади $AQS$, т. е. разности площадей сектора $AQO$ и треугольника $OQS$, т. е. пропорциональна разности произведений

$$\frac{1}{2} OQ \cdot (\smile AQ) - \frac{1}{2} OQ \cdot RS$$

т. е. разности $\smile AQ - RS$, ибо $\frac{1}{2} OQ$ есть величина постоянная.




Фиг. 69.

Так как следующие отношения между собою равны:

$$SR : QN = OS : OA = OA : OG = \smile AQ : \smile GF = \\ = (\smile AQ - SR) : (\smile GF - QN),$$

то эта площадь $APS$ пропорциональна $GK$, т. е. разности между дугою $GF$ и длиною $QN$, представляющей синус[87] дуги $AQ$.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Впрочем, в виду трудности построения трохоиды, предпочтительнее на деле применять следующее приближенное решение.

Сперва надо определить угол $B$ и длину $L$ (фиг. 70) так, чтобы было

$$B = 57{,}^\circ 29578 \cdot \frac{SH}{AB} \quad \text{и} \quad L = OA \cdot \frac{AB}{SH},$$

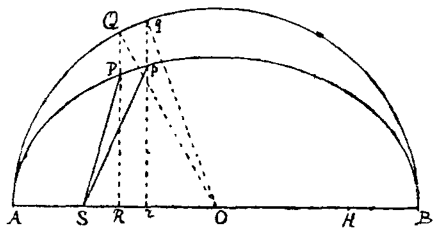
---

87 Пусть $OG = R$, $OA = r$, угол $APQ = \theta$, тогда ординате $LK$ трохоиды соответствует абсцисса

$$GK = R\theta - r \sin \theta = \smile GF - QN.$$

где $AB$ есть большая ось эллипса, $OA$ — большая полуось, $SH$ — расстояние между фокусами.

После того как эти величины найдены, задача решается следующим анализом. При помощи какого-либо построения или же сделав какое-нибудь исходное предположение, находим место $P$ тела, близкое истинному его месту $p$. Проведя ординату $PR$, по пропорциональности осям эллипса находим ординату $RQ$ описанного круга $AQB$. Эта ордината есть синус угла $AOQ$ при радиусе $OA$, она пересекает эллипс в точке $P$. Для угла $AOQ$ достаточно найти приближенное значение грубым вычислением.



Фиг. 70.

Кроме того, известен угол, пропорциональный времени, т. е. такой, который так относится к четырем прямым, как время описания дуги $Ap$ к времени полного обращения по эллипсу. Пусть этот угол есть $N$. Затем надо последовательно брать углы $D$ и $E$ так, чтобы было

$$D = B \cdot \sin AOQ \quad \text{и} \quad E = (N - AOQ + D) \cdot \frac{L}{L - AO \cdot \cos AOQ},$$

углы $F$ и $G$ так, чтобы было

$$F = B \cdot \sin(AOQ + E) \quad \text{и} \quad G = \frac{N - AOQ + E + F}{L - AO \cdot \cos(AOQ + E)} \cdot L,$$

углы $H$ и $J$:

$$H = B \sin(AOQ + E + G) \quad \text{и} \quad J = \frac{N - AOQ - E - G - H}{M - AO \cos(AOQ + E + G)} \cdot L,$$

и продолжать таким образом до бесконечности. Угол $AOq$ определится по формуле

$$AOq = AOQ + E + G + J + \ldots$$

После чего исправленное место $p$ найдется по его абсциссе $Or$ и ординате $pr$, которые суть:

$$Or = OA \cdot \cos AOq; \quad pr = qr \cdot \frac{OC}{OA} = OC \cdot \sin AOq.$$

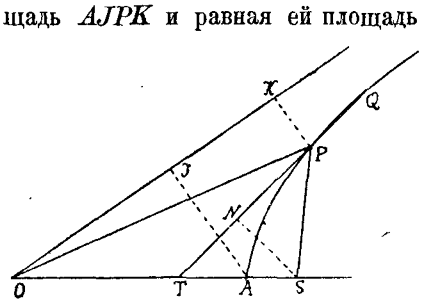
Ряд $AOQ + E + G + J$ сходится настолько быстро, что едва ли когда-нибудь понадобится итти в нем далее второго члена $E$. Это вычисление[88] основано на том, что площадь $APS$ пропорциональна разности между

[88] Прием, применяемый здесь Ньютоном для решения кеплерова уравнения, есть как раз тот, который им предложен для решения численных уравнений вообще, т. е. когда известно

дугою $AQ$ и перпендикуляром, опущенным из фокуса на радиус $OQ$. Подобным же вычислением решается задача и для гиперболы. Пусть ее центр $O$, вершина $A$, фокус $S$, асимптота $OK$.

Известна площадь, пропорциональная времени, которую и требуется отсечь. Пусть эта площадь есть $A$ (фиг. 71).

Делается исходное предположение о положении прямой $SP$, отсекающей площадь $ASP$, близкую к требуемой. Проводят $OP$ и затем $AJ$ и $PK$, параллельные второй асимптоте. По таблице логарифмов находятся площадь $AJPK$ и равная ей площадь $AOP$, вычтя которую из площади треугольника $OPS$ получаем площадь $APS$. Разделив удвоенную разность площади $A$ и площади $APS$, т. е. величину $2(APS - A)$ или $2(A - APS)$, на расстояние $SN$ фокуса до касательной $PT$ в точке $P$, получим длину хорды $PQ$. Вместив эту хорду между $A$ и $P$, если площадь $APS$ больше $A$, и на продолжении дуги $AP$, если меньше, получим в точке $Q$ более точное место. Повторяя это вычисление, будем получать это место все более и более точно.



Фиг. 71.

Вышеприведенными вычислениями задача решается аналитически вообще. Но для целей астрономии удобнее следующий частный прием.

---

приближенное значение $u = u_1$ корня уравнения $f(u) = N$, то более точное значение $u_2 = u_1 + \delta_1$ найдется взяв

$$\delta_1 = \frac{N - f(u_1)}{f'(u_1)}.$$

Для кеплерова уравнения $u - \varepsilon \sin u = N$ будет

$$\delta_1 = \frac{N - u_1 + \varepsilon \sin u_1}{1 - \varepsilon \cos u_1}.$$

Это и есть формула Ньютона, если ее написать при помощи теперешних обозначений, числителя и знаменателя дроби $\frac{L}{L - AO \cos AOQ}$ разделить на $L$ и заметить, что $\frac{AO}{L} = \varepsilon$ и угол $AOQ = u_1$. По поводу этого решения знаменитый Adams говорит: «Если погрешность приближенного значения величины $u_\alpha$ будет порядка $i$ относительно малой величины $\varepsilon$, принимаемой за малую первого порядка, то погрешность величины $u_{\alpha+1}$ будет порядка $i_1 = 2i + 1$, погрешность следующего приближения $u_{\alpha+2}$ будет $2i_1 + 1 = 4i + 3$ и т. д., так что порядок малости погрешности более чем удваивается при каждом приближении. Этим объясняется огромное преимущество (immense advantage) этого способа перед разложением в ряды по степеням $\varepsilon$, когда требуется весьма большая точность результата, ибо при рядах прибавление одного члена повышает порядок погрешности лишь на одну единицу» (J. C. Adams. On Newton's Solution of Kepler's Problem. Scientific Papers, vol. I, p. 290).

Пусть $OA$, $OB$, $OD$ (фиг. 72)—полуоси эллипса, $L$—его параметр и $D$—разность между половиною малой оси и половиною параметра. Сперва надо найти углы $Y$ и $Z$ по формулам:[89]

$$\sin Y = \frac{1}{2}\frac{D(OA + OD)}{AB^2}, \quad \sin Z = \frac{2D \cdot SH}{3AO^2}.$$

---

[89] В «Началах» принята, само собою разумеется, старинная астрономическая терминология, несколько отличающаяся от современной.

Как известно, применяемые теперь основные формулы эллиптического движения планет следующие: пусть $S$ есть центр Солнца, $O$ — центр орбиты, тогда угол $ASP = v$, считаемый в сторону движения планет от перигелия, т. е. ближайшей к Солнцу вершины $A$, называется «истинной аномалией»; описанный из точки $O$ радиусом $OA$ круг — эксцентрическим кругом; угол $AOQ = u$ — эксцентрическою аномалией, наконец пропорциональный времени угол $N = \frac{2\pi t}{\tau}$ — средней аномалией, расстояние $SP = r$ — радиусом вектором, $OA = a$ — большая полуось, отношение $\frac{OS}{OA} = e$ — эксцентриситет (фиг. 70). Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$r = a(1 - e\cos u) \qquad (1)$$

$$u - e\sin u = N = nt \qquad (2$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v \qquad (3)$$

которые разлагаются в ряды по степеням $e$ и дают:

$$u = N - e\sin N + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2N + \frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2}[3^2\sin 2N - 3\sin N] + \ldots$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\cos 2N - \frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 2^2}(3\cos 3N - 3\cos N) - \ldots$$

$$v = N + \left[2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^6\ldots\right]\sin N + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\ldots\right)\sin 2N +$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^2 - \frac{43}{64}e^5 + \ldots\right)\sin 3N + \ldots$$

(Laplace. Mécanique Céleste, livre II, § 22).

Но Ньютон следует старинной астрономической практике, которая удержалась до Лапласа, именно, аномалии считались не от перигелия, а от афелия, т. е. от дальнейшей от Солнца точки $B$, соответственно чему формулы (1), (2) и (3) требуют замены в них углов $u$, $v$ и $N$ через углы $\pi - u_1$, $\pi - v_1$ и $\pi - N_1$ и принимают вид:

$$r = a(1 + e\cos u_1)$$

$$u_1 + e\sin u_1 = N_1$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_1.$$

Разность $v_1 - N_1$ называется уравнением центра. Для приближенного получения истинной аномалии проводили из второго фокуса эллипса луч $BJ$, составляющий угол $BHJ = N_1$; точка $J$ пересечения этого луча с эллипсом и давала приближенное место планеты. Ньютон приводит разложение уравнения центра при старинных обозначениях. Так как эти формулы теперь не применяются, то вывод их не приводится; этот вывод, хотя довольно сложным геометрическим путем, можно найти в «Principia», изд. Le Seur и Jacquier, и более простой в «Miscellaneous Tracts» by Thomas Simpson, p. 46.

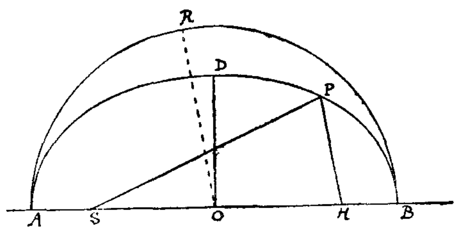
После того как эти углы найдены, место тела определится так: возьми угол $T$, пропорциональный времени описания дуги $BP$, или, как его называют, среднее движение, и рассчитай угол $V$ — первое уравнение среднего движения, так, чтобы было

$$V = Y \cdot \sin 2T$$

и угол $X$ — второе уравнение среднего движения:

$$X = Z \cdot \sin^2 T$$

сумма углов $T + V + X$, если угол $T$ острый, или же разность $T + X - V$, когда угол $T$ тупой, т. е. больше прямого, но меньше двух прямых, представит уравненное среднее движение, коему и возьми равный угол $BHP$; тогда, если $HP$ пересекает эллипс в точке $P$, то прямая $SP$ и отсечет площадь $BSP$, весьма близкую к искомой пропорциональной времени. Такой способ, как видно, достаточно прост, ибо для весьма малых углов $V$ и $X$, выраженных, если угодно, в секундах, достаточно найти первые две или три цифры. Этот способ достаточно точен для теории планет, ибо даже для орбиты Марса, коего наибольшее уравнение центра равно 10°, ошибка едва достигает 1″. После того как найден угол $BHP$ уравненного среднего движения, найдутся тотчас же по известным способам угол истинного движения $BSP$ и расстояние $SP$.




Фиг. 72.

Однако достаточно о движении тел по кривым. Может оказаться, что тело и прямо падает к центру или по прямой удаляется от него; к изложению учения о таких движениях я и перехожу.

## ОТДЕЛ VII

## О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ К ЦЕНТРУ ИЛИ ОТ ЦЕНТРА

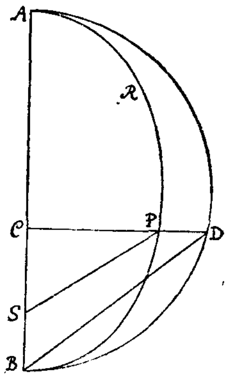
### Предложение XXXII. Задача XXIV

*Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния места до центра, определить простран-*

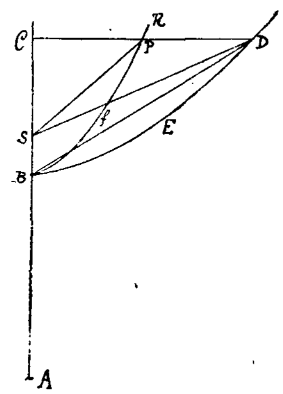
*ства, проходимые телом в заданное время при прямолинейном его падении к центру.*

*Случай 1.* Если тело не падает прямо к центру, то оно описывает (предл. XIII, след. 1) некоторое коническое сечение, коего фокус лежит в центре сил. Пусть это сечение есть $ARPB$ и его фокус $S$ (фиг. 73а).

Во-первых, рассмотрим тот случай, когда эта кривая эллипс. На большой его оси $AB$ опишем полукруг $ADB$, и через падающее тело проведем перпендикуляр $DPC$ к оси и прямые $DS$ и $PS$; площади $ASD$ и $ASP$ пропорциональны и между собою и времени. Сохраняя ось $AB$, будем уменьшать ширину эллипса, площадь $ASD$ будет оставаться пропорциональной



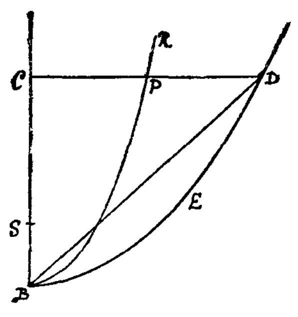

Фиг. 73а.




Фиг. 73b.

времени. Пусть эта ширина уменьшается до бесконечности; тогда орбита $APB$ совпадет с осью $AB$, тело будет падать по прямой $AC$, фокус $S$ совпадет с вершиною $B$ и площадь $ABD$ станет пропорциональной времени. Поэтому пространство $AC$, проходимое в течение заданного времени телом, падающим прямо, получится взяв вместо времени пропорциональную ему площадь $ABD$ и опустив из точки $D$ перпендикуляр на $AB$.

*Случай 2.* Если сказанная кривая гипербола, то на ее оси $BA$ описывается равнобокая гипербола $BED$ (фиг. 73b), и так как площади $CSP$, $CBfP$, $SPfB$ относятся соответственно к площадям $CSD$, $CBED$, $SDEB$, как ординаты $CP$ к $CD$, площадь же $SPfB$ пропорциональна времени, в течение которого тело описывает дугу $BfP$, то и площадь $SDEB$ пропорциональна этому времени. При бесконечном уменьшении параметра гиперболы $RPB$ и сохранении неизменности ее главной оси $AB$, дуга $PB$ совпадет с прямою $CB$, фокус $S$ — с вершиною $B$ и прямая $SD$ — с прямою $BD$, следовательно площадь $BDEB$ будет пропорциональна времени, в продолжение которого тело при прямолинейном падении опишет путь $CB$.




Фиг. 73с.

*Случай 3.* Рассуждая подобным же образом и для т го случая, когда кривая $RPB$ парабола (фиг. 73с), описываем при той же вершине другую параб лу, которая остается постоянной; при уменьшении до нуля параметра той параболы, по которой движется тело $P$, причем это движение обратится в прямолинейное по прямой $CB$, площадь параболического сегмента $BDEB$ будет пропорциональна времени, в продолжение которого тело падает из $C$ в $S$ или в $B$.

### Предложение XXXIII. Теорема IX

***Принимая найденное выше, утверждаю, что скорость падающего тела в любом месте $C$ так относится к скорости тела, описывающего около центра $B$ круг радиуса $BC$, как корень квадратный из расстояния $AC$ тела до второй вершины круга или равнобочной гиперболы относится к корню квадратному из главной полуоси кривой.***

Разделив общую ось $AB$ фигуры $RPB$ и $DEB$ в точке $O$ (фиг. 74) пополам, проводим касательную $PT$ к кривой $RPB$ в точке $P$ и опускаем на эту касательную, пересекающую ось в точке $T$, из фокуса $S$ перпендикуляр $SY$ и проводим $BQ$ перпендикулярно оси.

Пусть параметр кривой $RPB$ есть $L$. Уже установлено (предл. XVI, след. 9), что скорость тела, движущегося вокруг центра сил $S$, при проходе через точку $P$ так относится к скорости тела, описывающего около того же центра круг радиуса $SP$, как $\sqrt{\frac{1}{2}L \cdot SP} : SY$. По свойству конических сечений,

$$AC \cdot CB : CP^2 = 2AO : L,$$

следовательно

$$L = \frac{2CP^2 \cdot AO}{AC \cdot CB}$$

т. е. сказанные скорости относятся друг к другу, как $\sqrt{\frac{CP^2 \cdot AO \cdot SP}{AC \cdot CB}} : SY$. Но, по свойству конических сечений,

$$CO : BO = BO : TO = (CO \pm BO) : (TO \pm BO) = BC : BT.$$

Составив вновь производную пропорцию, имеем

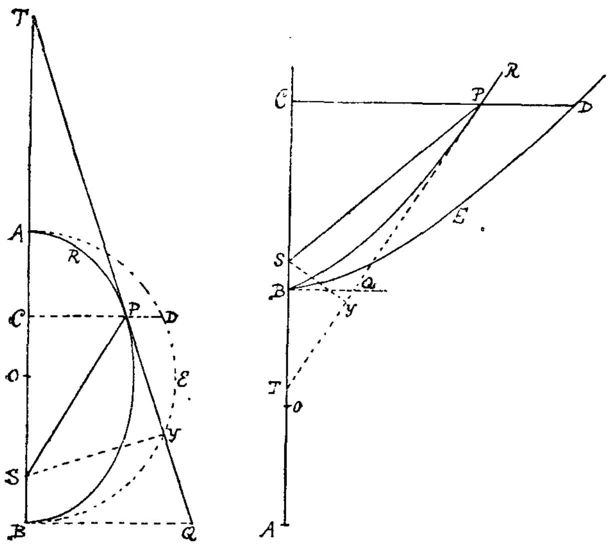
$$(CO \pm BO) : BO = CT : BT$$

или

$$AC : AO = CP : BQ,$$

следовательно

$$\frac{CP^2 \cdot AO \cdot SP}{AC \cdot CB} = \frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}.$$




Фиг. 74.

Пусть ширина $CP$ кривой $RPB$ неопределенно уменьшается, так что в пределе точка $P$ совпадает с $C$, точка $S$ с $B$, прямая $SP$ с $BC$, прямая $SY$ с $BQ$, скорость тела, падающего прямо к центру, будет относиться к скорости тела, описывающего круг радиусом $BC$, как $\sqrt{\frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}} : SY$. Но в пределе отношение $BQ : SY$ и отношение $SP : BC$ равны 1, следовательно в пределе вышеприведенное отношение скорости будет равно

$$\sqrt{\frac{AC}{AO}} = \sqrt{AC} : \sqrt{\frac{1}{2} AB}.$$

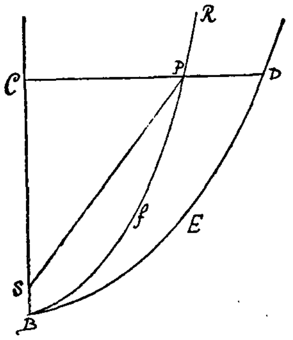
*Следствие 1.* При совпадении точек $B$ и $S$ будет

$$TC : TS = AC : AO.$$

*Следствие 2.* Тело, обращающееся по кругу в заданном расстоянии от центра, при изменении направления его движения прямо от центра, удалится от него до двойного своего расстояния.

### Предложение XXXIV. Теорема X

*Если кривая $BED$ — парабола, то скорость падающего тела в любом месте $C$ равна скорости, с которою тело может описывать около центра $B$ круг радиусом $\frac{1}{2}BC$, двигаясь равномерно.*




Фиг. 75.

В точке $P$ (фиг. 75) скорость тела, движущегося по параболе $RPB$, описанной около центра сил $S$, равна скорости тела, описывающего около $S$ круг, радиус коего $\frac{1}{2}SP$ (предл. XVI, след. 7). При беспредельном уменьшении ширины параболы, ее дуга $PfB$ приближается, и в пределе совпадает с прямою $BC$, радиус $SP$ совпадает с расстоянием $BC$, фокус $S$ — с вершиною $B$, отсюда и следует высказанная теорема.

### Предложение XXXV. Теорема XI

*При тех же предположениях утверждаю, что площадь $DES$, описываемая переменным радиусом $SD$, равна площади, которую описало бы в то же самое время тело, равномерно обращающееся около центра $S$ по кругу, коего радиус равен половине параметра кривой $DES$.*

Вообрази, что тело $C$ (фиг. 76 и 77) в течение весьма малого промежутка времени прошло при своем падении весьма малый путь $Cc$ и в то же самое время другое тело $K$, обращающееся равномерно около центра $S$ по кругу $OKk$, описало дугу $Kk$. Восставь перпендикуляры $CD$, $cd$, пересекающие кривую $DES$ в $D$ и $d$, соедини $SD$, $Sd$, $SK$, $Sk$ и проведи $Dd$, пересекающую ось $AS$ в точке $T$, и опусти на нее перпендикуляр $SY$.

*Случай 1.* Когда описываемая кривая $DES$ есть круг или равнобочная гипербола, то разделив ее ось $AS$ точкою $O$ пополам, получим длину $SO$, равную полупараметру.

Так как

$$TC : TD = Cc : Dd$$

и

$$TD : TS = CD : SY$$

то будет

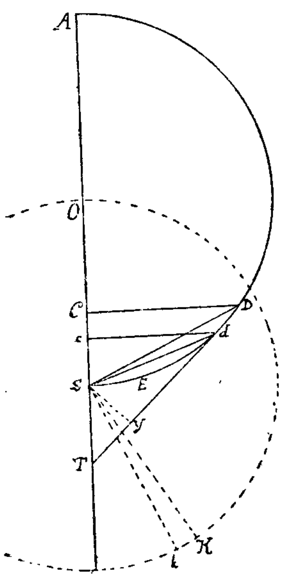
$$TC : TS = CD \cdot Cc : SY \cdot Dd.$$

По предложению XXXIII, следствию 1,

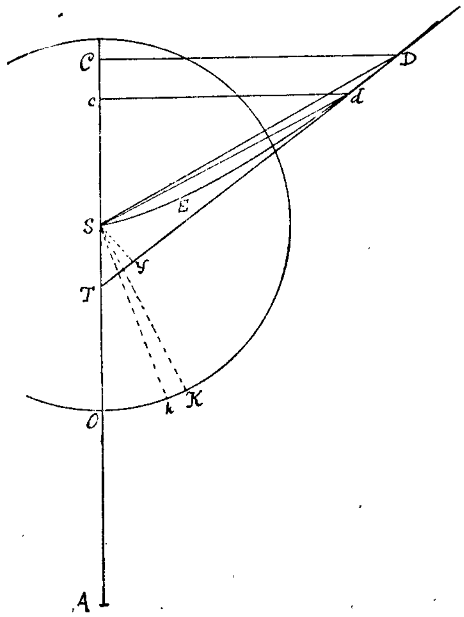
$$TC : TS = AC : AO,$$

предполагая при этом, что берется предельное отношение, когда точки $D$ и $d$ совпадают. Следовательно,

$$AC : SK = CD \cdot Cc : SY \cdot Dd. \qquad (*)$$




Фиг. 76.




Фиг. 77.

Но в точке $C$ отношение скорости падающего тела к скорости тела, описывающего около центра $S$ круг радиуса $SC$, равно $\sqrt{AC} : \sqrt{AO}$, или, что то же, $\sqrt{AC} : \sqrt{SK}$ (предл. XXXIII). Скорость тела, описывающего круг радиуса $SC$, относится к скорости тела, описывающего круг радиуса $SK$, как $\sqrt{SK} : \sqrt{SC}$ (IV, 6). Следовательно, скорость падающего тела относится к скорости движения по кругу $OKk$, как $\sqrt{SK} : \sqrt{SC}$, но это отношение есть вместе с тем отношение отрезочка $Cc$ к весьма малой дуге $Kk$; итак,

$$Cc : Kk = \sqrt{SK} : \sqrt{SC} = \sqrt{AC} : \sqrt{SC} = AC : CD$$

следовательно

$$Cc \cdot CD = AC \cdot Kk$$

и, вследствие пропорции (*),

$$AC : SK = AC \cdot Kk : SY \cdot Dd,$$

отсюда

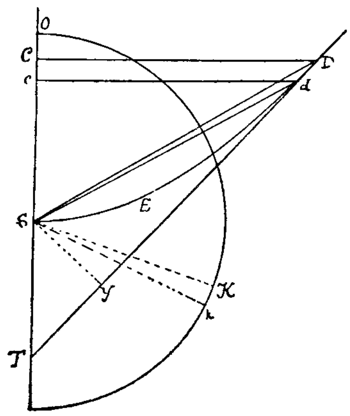
$$SK \cdot Kk = SY \cdot Dd,$$

следовательно и

$$\frac{1}{2} SK \cdot Kk = \frac{1}{2} SY \cdot Dd,$$

т. е. площадка $KSk$ = площадке $SDd$.

Таким образом в отдельные бесконечно малые промежутки времени описываются такие бесконечно малые площадки, что при уменьшении их величины и возрастании числа предел их отношения равен единице, поэтому (лем. IV, след.) и полные площади, совместно образуемые, равны.




Фиг. 78.

*Случай 2.* В том случае, когда кривая $DES$ (фиг. 78) — парабола, получится, как и выше:

$$CD \cdot Cc : SY \cdot Dd = TC : TS = 2 : 1$$

откуда

$$\frac{1}{4} CD \cdot Cc = \frac{1}{2} SY \cdot Dd.$$

Но скорость падающего тела в точке $C$ равна скорости равномерного движения по кругу радиуса $\frac{1}{2}$ $SC$ (предл. XXXIV), отношение же этой последней к скорости движения по кругу радиуса $SK$, т. е. отношение отрезочка $Cc$ к дуге $Kk$ (предл. IV, след. 5), равно отношению

$$\sqrt{SK} : \sqrt{\frac{1}{2} SC} = SK : \frac{1}{2} CD$$

вследствие чего

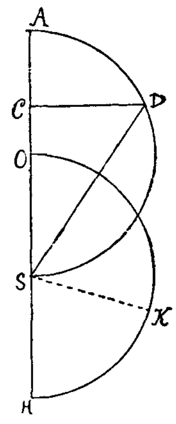
$$\frac{1}{2} SK \cdot Kk = \frac{1}{4} CD \cdot Cc = \frac{1}{2} SY \cdot Dd$$

т. е., как и выше, площадь $KSk$ = площади $SDd$.

### Предложение XXXVI. Задача XXV

*Определить время падения тела из заданной точки $A$.*

На диаметре $AS$ (фиг. 79), представляющем начальное расстояние тела, опиши точкою $S$, как центром, полукруг $ADS$ и другой полукруг, ему равный. Из места тела $C$ в рассматриваемый момент восставь ординату $CD$, соедини $SD$ и построй сектор $OSK$, коего площадь была бы равна площади $ASD$. Из предложения XXXV следует, что при падении тело опишет пространство $AC$ в то же самое время, в какое другое тело, равномерно вращающееся около центра $S$, может описать дугу $OK$.



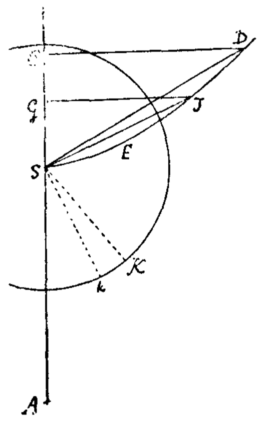

Фиг. 79.

### Предложение XXXVII. Задача XXVI

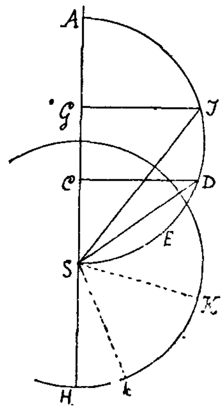
*Определить время восходящего или нисходящего движения тела, брошенного из заданного места вверх или вниз.*

Пусть тело выходит из заданного места $G$ (фиг. 80) по направлению $GS$ с какою-либо заданною скоростью.

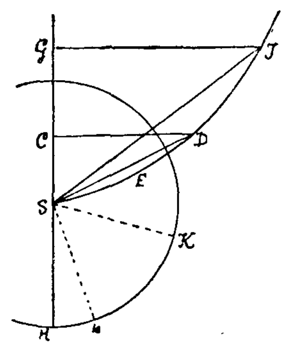
Возьми длину $GA$ в отношении к $\frac{1}{2}AS$, равном отношению квадрата данной скорости к квадрату такой постоянной скорости, с которою тело



Фиг. 80a.



Фиг. 80b.



Фиг. 80c.

могло бы обращаться по кругу данного радиуса $GS$. Если это отношение равно 2, то точка $A$ бесконечно удалена, и надо строить параболу с вершиною $S$, осью $SG$ и произвольным параметром. Это следует из предложения XXXIV. Если это отношение меньше 2, надо строить на оси $SA$ круг, если больше 2, то — равнобочную гиперболу (предл. XXXIII). Затем из центра $S$ радиусом, равным половине параметра, описывается круг $HkK$, и из начального места $G$ движущегося тела и из любого другого его места $C$ восставляются перпендикуляры $GJ$, $CD$, пересекающие коническое сечение или круг в точках $J$ и $D$. Соединив $SJ$, $SD$, построй секторы $HSK$, $HSk$, соответственно равные площадям сегментов $SEJS$ и $SEDS$; по предложению XXXV тело описывает путь $GC$ в то же самое время,[90] как тело $K$ — дугу $Kk$.

---

[90] Задача о прямолинейном движении тела, притягиваемого к неподвижному центру силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния, рассматривается ниже весьма подробно как предельный случай движения по коническому сечению; благодаря этому Ньютон избегает необходимости исполнять аналитически те квадратуры, к которым задача приводит, а получает их геометрическое представление.

В предложении XXXIX дан общий способ решения при помощи квадратур задачи о прямолинейном движении тела под действием какой угодно центральной силы, причем устанавливается и закон живых сил, а в предложении XL дается и общее алгебраическое выражение этого закона.

Чтобы яснее видеть связь решения, даваемого Ньютоном, с теперешним, обозначим через $x$ — расстояние тела до центра в момент $t$, через $a$ — расстояние в момент $t = t_0$, через $v_0$ — скорость в этот момент и через $\mu^2$ — коэффициент притяжения, так что притяжение центром выражается формулой $-\frac{\mu^2}{x^2}$; тогда, по закону живых сил, будет

$$v^2 - v_0^2 = 2\mu^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$$

или

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} + v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a}. \tag{1}$$

Смотря по знаку величины $v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a}$ могут быть три случая:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} < 0 \text{ (движение эллиптическое)} \\ 2) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = 0 \text{ (} \quad \text{»} \quad \text{параболическое)} \\ 3) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} > 0 \text{ (} \quad \text{»} \quad \text{гиперболическое).} \end{array}\right\} \tag{A}$$

Возьмем первый случай, и пусть

$$v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = -\frac{2\mu^2}{b}$$

следовательно

$$b > 0$$

уравнение (1) напишется

$$v^2 = 2\mu^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) = \frac{dx^2}{dt^2}$$

следовательно будет

$$\sqrt{2b} \cdot \mu \cdot dt = \frac{dx}{-\sqrt{\frac{b}{x} - 1}}. \tag{2}$$

Сообразуясь с фигурою (73а), сделаем

$$x = \frac{1}{2} b (1 + \cos 2u) = b \cos^2 u.$$

так что

$$dx = -b \sin 2u \cdot du; \quad \sqrt{\frac{b}{x} - 1} = \operatorname{tg} u$$

и уравнение (2) будет

$$\sqrt{\frac{2}{b}}\, \mu\, dt = \cos^2 u \cdot du = \frac{1}{2} (1 + \cos 2u)\, du;$$

пусть при

$$t = 0: \quad x = b; \quad v = 0; \quad u = 0$$

тогда будет

$$\frac{2\sqrt{2\mu}}{\sqrt{b}} \cdot t = u + \frac{1}{2} \sin 2u$$

или, умножив обе части на $\frac{b^2}{4} = R^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \mu \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot t = R^2 u + \frac{1}{2} R^2 \sin 2u = \text{площади } ABD \tag{3}$$

т. е. время $t$ пропорционально площади $ABD$ и место тела в этот момент есть $C$.

Для параболы будет

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} = \frac{dx^2}{dt^2}$$

т. е.

$$\sqrt{2\mu} \cdot dt = -\sqrt{x}\, dx$$

$$\sqrt{2\mu} \cdot t = \frac{2}{3} (a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}). \tag{4}$$

Делая $x = 0$, получим время падения из точки $C$, расстояние коей до центра $BC = a$:

$$\sqrt{2\mu} \cdot t = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

если уравнение параболы $BED$ есть

$$y^2 = 2px$$

то делая

$$x = a$$

имеем

$$y = CD = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{a}$$

и очевидно, что время $t$ пропорционально площади $BED$.

Для гиперболы будет

$$v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} > 0.$$

Полагая

$$v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = \frac{2\mu^2}{b}$$

получим

$$v^2 = 2\mu^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b}\right)$$

и точка $A$, в которой $v = 0$, соответствует абсциссе $x = -b$ и лежит по другую сторону от центра $O$ гиперболы. Уравнение (2) будет

$$\sqrt{2b}\mu \cdot dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x} + 1}}.$$

Полагая, соответственно тому как для эллипса,

$$x = \frac{b}{2}(\mathrm{Ch}\, 2u - 1)$$

будем иметь:

$$dx = b \cdot \mathrm{Sh}\, 2u \cdot du, \qquad \frac{b}{x} + 1 = \frac{1 + \mathrm{Ch}\, 2u}{\mathrm{Ch}\, 2u - 1} = \frac{\mathrm{Ch}^2 u}{\mathrm{Sh}^2 u}$$

следовательно

$$\sqrt{2b} \cdot \mu \cdot dt = 2b\, \mathrm{Sh}^2 u \cdot du = b(\mathrm{Ch}\, 2u - 1) \cdot du.$$

Отсюда следует

$$\sqrt{2b}\,\mu \cdot t = \frac{b}{2}\, \mathrm{Sh}\, 2u - bu$$

или, по умножении на $\frac{b}{4}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{4} b^{\frac{3}{2}} \mu \cdot t = \frac{b^2}{8} \cdot \mathrm{Sh}\, 2u - \frac{b^2}{4} \cdot u = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \mathrm{Sh}\, 2u\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot 2u = \tag{5}$$

$$= OBD - OBED = BEDB$$

ибо по уравнению гиперболы

$$CD = \frac{b}{2}\, \mathrm{Sh}\, 2u$$

следовательно

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}\, \mathrm{Sh}\, 2u = \frac{1}{2}\, OB \cdot CD = \text{площ. } OBD$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot 2u = \text{площ. } OBED.$$

Критерий различия вида орбит дается в предложении XXXVII в несколько иной форме, нежели указано выше, ибо, вместо коэффициента притяжения, вводится та скорость $V_0$, с которою тело под действием данного центра могло бы описывать круг данного радиуса.

За этот радиус принимается начальное расстояние $a$, так что будет

$$\frac{\mu^2}{a^2} = \frac{V_0^2}{a}$$

т. е.

$$\mu^2 = V_0^2 a$$

и тогда условия A перепишутся так:

$$\frac{v_0^2}{V_0^2} < 2 \quad \text{движение эллиптическое}$$

$$2) \quad \frac{v_0^2}{V_0^2} = 0 \quad \text{» параболическое} \tag{A}$$

$$3) \quad \frac{v_0^2}{V_0^2} > 2 \quad \text{» гиперболическое}$$

Полагая

$$\frac{v_0^2}{V_0^2} = n$$

можем написать формулу

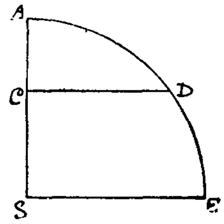
$$v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = -\frac{2\mu^2}{b}$$

так

$$n - 2 = -2\frac{a}{b}$$

### Предложение XXXVIII. Теорема XII

*Предполагая, что центростремительная сила пропорциональна расстоянию места до центра, я утверждаю, что для падающего тела времена, скорости и пройденные пространства соответственно пропорциональны дугам, их синусам и синусам верзугам.*




Фиг. 81.

Пусть тело падает из какого-либо места $A$ (фиг. 81) по прямой $AS$. Из центра сил $S$ радиусом $AS$ описывается четверть круга $AE$; пусть $CD$ есть синус какой-либо дуги $AD$, тогда тело $A$ в продолжение времени $AD$ при своем падении пройдет пространство $AC$ и будет обладать в точке $C$ скоростью $CD$.

Это предложение доказывается на основании предложения X тем же способом, каким предложение XXXII доказано, исходя из предложения XI.

*Следствие 1.* Отсюда видно, что времена, в продолжение которых одно тело, падая из точки $A$, достигает центра $S$, другое же, равномерно обращаясь по кругу, описывает его четверть $ADE$, между собою равны.

---

но

$$SA = b, \quad SG = a, \quad GA = b - a \text{ (фиг. 80)},$$

так что при ньютоновом обозначении действительно будет

$$n = \frac{2GA}{SA} = \frac{GA}{\frac{1}{2}SA} = \frac{v_0^2}{V_0^2}.$$

Это и есть предложение XXXVII.

Имея в виду эти формулы и значение величины $b = SA$ на фиг. 77, 78, 79 и 80 и $b = BA$ на фиг. 73 a, 73 b, 74, нетрудно сопоставить каждое из этих предложений с аналитическим процессом, применяемым при решении этой задачи теперешними способами.

Так, предложение XXXIII выражает закон живых сил; именно, делая $BA = b$, $BC = x$ и $\frac{\mu^2}{x^2} = \frac{V^2}{x}$, где через $V$ обозначена скорость, с которою тело могло бы описывать круг в расстоянии $x$ от центра; из формулы

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} - \frac{2\mu^2}{b}$$

получаем

$$v^2 = 2V^2\left(1 - \frac{x}{b}\right) = 2V^2 \cdot \frac{AC}{BC}$$

что и высказано в этом предложении.

Предложение XXXIV выражает этот закон для параболы ($b = \infty$):

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} = 2V^2.$$

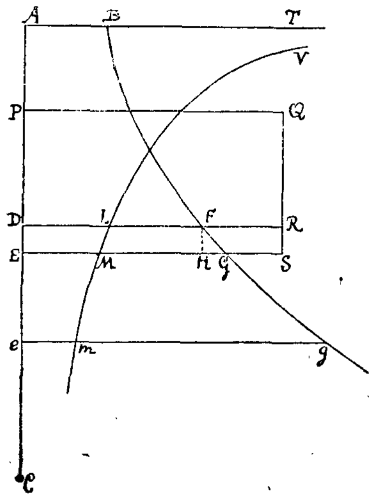
Предложение XXXV дает выражение множителя, стоящего перед временем $t$ в формулах (3)—(5).

7. Зак. 3350

*Следствие 2.* Поэтому времена падения любого тела из любого места на тот же центр равны между собою, ибо времена обращения (предл. IV, след. 3) равны.

### Предложение XXXIX. Задача XXVII

*Предполагая центростремительную силу какою угодно и допуская квадратуру кривых, требуется определить как скорость движущегося прямо к центру или от центра тела в любой точке, так и время, в течение которого оно приходит в какое-либо место и обратно.*




Фиг. 82.

Из какой-либо заданной точки $A$ прямой $ADEC$ падает тело $E$. Из всякой точки $E$ его пути восставляется перпендикуляр $EG$ (фиг. 82), по коему откладывается длина $EG$, пропорциональная величине центростремительной силы, действующей в этой точке $E$ и направленной к центру $C$; пусть кривая $BFG$ проходит через места точек $G$, причем в начале движения $EG$ совпадает с перпендикуляром $AB$; тогда скорость в какой угодно точке $E$ будет пропорциональна стороне квадрата, равномерного с криволинейною площадью $ABGE$.

Беря на прямой $EG$ длину $EM$, обратно пропорциональную стороне сказанного квадрата, строится кривая, на которой постоянно лежит точка $M$. Эта кривая будет иметь прямую $AB$ своею асимптотою. Время, в течение которого падающее тело проходит путь $AE$, будет пропорционально площади $ABTVME$.

В самом деле, возьмем на прямой $AE$ какую-нибудь весьма малую длину $DE$ постоянной величины, и пусть $DLF$ есть положение прямой $EMG$, когда тело проходит через $D$; если центростремительная сила такова, что сторона квадрата, равномерного площади $ABGE$, пропорциональна скорости падающего тела, то сама эта площадь будет пропорциональна квадрату скорости, т. е. если скорость в точках $D$ и $E$ обозначить соответственно через $V$ и $V+J$, то площадь $ABFD$ будет пропорциональна $V^2$, площадь же $ABGE$ будет пропорциональна $V^2+2JV+J^2$, и следовательно, разность этих площадей $DFGE$ пропорциональна $2VJ + J^2$, и длина $\frac{DFGE}{DE}$ пропорциональна $\frac{2VJ + J^2}{DE}$, т. е. рассматривая предельные отношения зарождающихся количеств, длина $DF$ пропорциональна $\frac{2V \cdot J}{DE}$, а значит, и половине этой величины, т. е. $\frac{V \cdot J}{DE}$. Но время, в течение которого тело при своем падении описывает отрезок $DE$, прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально скорости; вместе с тем сила прямо пропорциональна приращению скорости $J$ и обратно пропорциональна времени, т. е. если брать лишь предельные отношения зарождающихся количеств, то сила пропорциональна $J \cdot \frac{V}{DE}$, т. е. длине $DF$. Следовательно, сила, пропорциональная длине $DF$ или $EG$, заставляет тело падать со скоростью, пропорциональной стороне квадрата, равномерного с площадью $ABGE$.

Далее, так как время, в продолжение которого описывается весьма малый отрезочек $DE$ постоянной длины, обратно пропорционально скорости, т. е. обратно пропорционально стороне квадрата, равномерного с $ABFD$, то пусть $DL$, а значит, и зарождающаяся площадь $DLME$, обратно пропорциональна сказанной стороне; тогда промежуток времени на описание отрезочка $DE$ будет пропорционален площадке $DLME$, следовательно сумма всех таких промежутков, т. е. полное время падения от $A$ до $E$, пропорционально[91] сумме всех площадок, т. е. полной площади $ATVME$ (лем. IV след.).

*Следствие 1.* Если $P$ есть то место, из которого тело должно начать падать, чтобы, находясь под действием постоянной и известной центростремительной силы (за которую обыкновенно принимают силу тяжести), приобресть, придя в точку $D$, скорость, равную скорости в той же точке другого тела, падающего как бы то ни было, надо взять по перпендикуляру $DF$ длину $DR$, так относящуюся к $DF$, как сказанная постоянная сила относится

[91] Это предложение заключает закон живых сил для прямолинейного движения. Необходимо также обратить внимание на представление работы площадью диаграммы, а также на выражение «сила пропорциональна $\frac{J \cdot V}{DE}$»; здесь $J$ есть приращение скорости в продолжение бесконечно малого промежутка времени, $DE$ — путь, пройденный в этот промежуток, т. е. при теперешних обозначениях:

$$J = dV, \quad DE = dx = Vdt, \quad \frac{JV}{DE} = \frac{V \cdot dV}{dx} = \frac{dV}{dt}$$

т. е при ньютоновой терминологии сила пропорциональна флюксии скорости, но Ньютон нигде не вводит понятия и термина «ускорение» в теперешнем его смысле, а всегда рассматривает бесконечно малое приращение скорости, которое часто называет «acceleratio».

к переменной, действующей в точке $D$, и дополнить прямоугольник $PDRQ$; отрезав площадь $ABFD$, равную площади этого прямоугольника, и получим в $A$ то место, из которого тело должно начать падать. Ибо если дополнить прямоугольник $DRSE$, то так как площадь $ABFD$ относится к площади $DFGE$, как $V^2$ к $2VJ$, т. е. как $\frac{1}{2}V$ к $J$, т. е. как половина полной скорости к ее приращению при падении тела под действием переменной силы, то и площадь $PQRD$ относится к площади $DRSE$, как половина полной скорости к приращению ее при движении тела под действием постоянной силы. Но эти приращения (по равенству весьма малых промежутков времени, в продолжение коих они происходят) пропорциональны действующим силам, их производящим, т. е. ординатам $DF$ и $DR$, следовательно пропорциональны и бесконечно малым площадкам $DFGE$ и $DRSE$, поэтому и полные площади $ABFD$ и $PQRD$ будут относиться, как половины полных скоростей, и следовательно, по равенству скоростей эти площади между собою равны.

*Следствие 2* Если тело из какой-либо точки $D$ бросается с заданной скоростью вверх или вниз и задается закон центростремительной силы, то скорость этого тела в любой точке $e$ определяется проведя ординату $eg$ и взяв эту скорость в таком отношении к скорости в точке $D$, в каком сторона квадрата, равномерного с площадью прямоугольника $PQRD$, увеличенною или уменьшенною на площадь $DFge$, смотря по тому, место $e$ ниже или выше $D$, находится к стороне квадрата, равномерного просто с прямоугольником $PQRD$.

*Следствие 3.* Соответствующее время найдется проводя ординату $em$, обратно пропорциональную стороне квадрата, равномерного с площадью $PQRD \pm DFge$, и беря искомое время, в течение которого тело пройдет путь $De$ в таком отношении ко времени падения другого тела, движущегося под действием постоянной силы из точки $P$ в точку $D$, в каком криволинейная площадь $DLme$ находится к площади прямоугольника $2PD \cdot DL$.

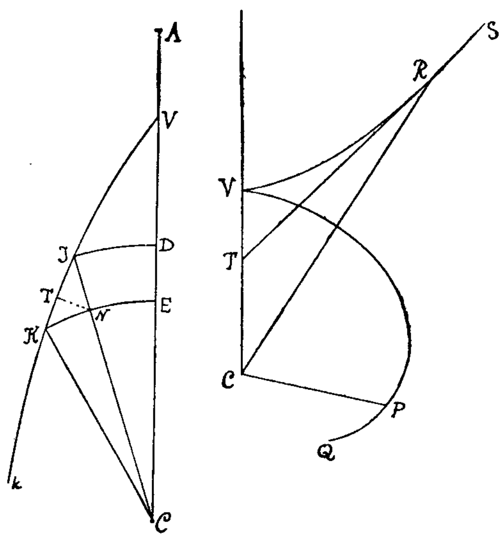
Ибо время падения тела под действием постоянной силы из точки $P$ в точку $D$ так относится ко времени падения из $P$ в $E$, как $\sqrt{PD} : \sqrt{PE}$, т. е. (при бесконечно малой величине отрезочка $DE$) в отношении $PD$ к $PD + \frac{1}{2}DE$ или $2PD$ к $2PD + DE$; или, взяв разностную пропорцию, увидим, что это время так относится ко времени описания отрезочка $DE$, как $2PD$ относится к $DE$ или как прямоугольник $2PD \cdot DL$ относится к площади $DLME$. Вместе с тем время, в продолжение коего второе тело проходит путь $DE$, так относится ко времени, в течении коего под действием переменной силы оно проходит путь $De$, как площадь $DLME$ к площади $DLme$, следовательно первое время относится ко второму, как площадь $2PD \cdot DL$ к площади $DLme$.

## ОТДЕЛ VIII

## О НАХОЖДЕНИИ ОРБИТ, ПО КОТОРЫМ ОБРАЩАЮТСЯ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАКИХ УГОДНО ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫХ СИЛ

### Предложение XL. Теорема XIII

*Если тело под действием какой угодно центростремительной силы движется как бы то ни было, другое же тело движется прямолинейно, прямо к центру или от центра, и скорости обоих тел в некотором их положении, в котором они равно удалены от центра сил, равны, то эти скорости будут равны и во всяких других положениях обоих тел, равно удаленных от центра.*




Фиг. 83.

Пусть одно тело движется из точки $A$ (фиг. 83) к центру $C$ по прямой линии, другое же — из точки $V$ по какой-либо кривой $VJKk$. Опишем из точки $C$ произвольными радиусами $CD$ и $CE$ два концентрических круга $DJ$ и $KE$, пересекающих прямую $AC$ в точках $D$ и $E$, кривую же в точках $J$ и $K$. Проведем $CJ$, и пусть $N$ есть точка пересечения $CJ$ к $EK$; опустим из этой точки нормаль $NT$. Положим теперь, что разность радиусов $CD$ и $CE$, т. е. $ED$ или $JN$, весьма мала и что скорости обоих тел, когда одно из них в $D$, другое в $J$, равны. Так как расстояние $CD = CJ$, то и центростремительные силы в точках $D$ и $J$ равны. Представим эти силы равными отрезочками $DE$ и $JN$. Силу $JN$ разложим (след. II законов) на две $NT$ и $JT$. Сила $NT$, действуя перпендикулярно пути $JTK$ тела, не будет изменять величины скорости тела, а будет лишь уклонять его от прямолинейного пути и заставлять, непрерывно отступая от касательной к орбите, описывать криволинейный путь $JTKk$. Вся эта сила и поглощается на производство этого действия. Вторая же сила $JT$, действующая по направлению движения тела, будет целиком его ускорять, и в течение заданного, весьма малого, промежутка времени произведет приращение[92] скорости, пропорциональное своей величине; поэтому приращения скорости тел в точках $D$ и $J$, происходящие в продолжение равных, весьма малых, промежутков времени, будут пропорциональны длинам $DE$ и $JT$ (при этом предполагается, что берутся лишь начальные предельные отношения длин $DE$, $JN$, $JK$, $JT$, $NT$); при неравных же промежутках времени приращения скорости будут пропорциональны этим длинам и самим промежуткам времени. Но промежутки времени, в продолжение которых проходятся пути $DE$ и $JK$, по равенству скоростей пропорциональны пройденным путям $DE$ и $JK$, следовательно приращения скорости при пробеге телом длин $DE$ и $JK$ относятся между собою, как произведения $DE^2 : JT \cdot JK$. Произведение же $JT \cdot JK = JN^2 = DE^2$, следовательно происходящие при переходе тел от $D$ до $J$ и от $E$ до $K$ приращения скорости равны, значит и скорости в точках $E$ и $K$ будут равны. Рассуждая таким же образом, убедимся, что эти скорости окажутся равными и для всех последующих положений тел, равно отстоящих от центра.

Совершенно так же тела, обладающие равными скоростями и движущиеся от центра, будут при равных расстояниях одинаково замедляться, и скорости их будут оставаться равными.

*Следствие 1.* Поэтому, если одно тело качается, будучи подвешено на нити или же вынуждается каким-нибудь совершенно гладким и скользким препятствием двигаться по кривой линии, другое же тело движется свободно, приближаясь или удаляясь от центра по прямой линии, и скорости обоих тел в каком-либо одинаковом расстоянии их от центра равны, то эти скорости останутся между собою равными и на любых равных расстояниях. Ибо натяжение нити или упор абсолютно скользкого препятствия оказывает то же самое действие, как и поперечная слагающая сила $NT$ — тело от этого действия не ускоряется и не замедляется, а лишь побуждается уклоняться от прямолинейного пути.

*Следствие 2.* Пусть $P$ есть наибольшее расстояние от центра, на которое может удаляться качающееся или обращающееся по какой-либо траектории тело, если бы его в какой-либо ее точке подбросить прямо от центра

92 В тексте «Начал» везде приращения скорости называются «ускорениями» — «acceleratio», но чтобы точно передать смысл, пришлось слово «ускорение», как имеющее теперь совершенно иное значение, заменить современным термином «приращение скорости».

с тою скоростью, которою оно в этой точке обладает; пусть $A$ есть расстояние какой-либо другой точки орбиты, и пусть центростремительная сила пропорциональна какой-либо степени $A^{n-1}$, коей показатель $n-1$ есть любое число $n$, уменьшенное на 1, тогда при всяком расстоянии $A$ скорость тела будет пропорциональна $\sqrt{P^n - A^n}$, т. е. известна, ибо скорость прямолинейного движения к центру или от центра пропорциональна этой величине, как показано в предложении XXXIX.[93]

### Предложение XLI. Задача XXVIII

*Предполагая центростремительную силу какою угодно и допуская квадратуру кривых, требуется найти как траекторию, по которой будет двигаться тело, так и закон его движения по найденной траектории.*

Пусть какая-либо сила направлена к центру $C$ (фиг. 84) и требуется найти траекторию $VJKk$.

Точкою $C$, как центром, и начальным радиусом $CV$ описывается круг $RV$, тем же центром и двумя какими-либо произвольными радиусами $JD$ и $KE$ описываются круги, пересекающие траекторию в точках $J$ и $K$, прямую же $CV$ в точках $D$ и $E$. Проведи прямую $CNJX$, пересекающую круги $KE$, $VR$ в $N$ и $X$, а также прямую $CKY$, пересекающую круг $RV$ в $Y$. Пусть точки $J$ и $K$ весьма близки друг к другу, и пусть тело переходит из $V$ через $J$ и $K$ в $k$. Возьмем точку $A$ так, что если тело начало бы из нее падать к центру, то придя в $D$, оно обладало бы такою же скоростью, какою обладает движущееся по орбите тело в $J$. Сохраняя обозначения предложения XXXIX, получим, что отрезочек $JK$, проходимый в продолжение постоянного, весьма малого, промежутка времени, пропорционален скорости, а следовательно, стороне квадрата, равномерного с площадью $ABFD$. Площадь треугольника $JCK$ пропорциональна тому же промежутку

---

[93] В этой теореме закон живых сил распространен на любое движение под действием центральной силы, и в следствии 2 дается и алгебраическое выражение этого закона для случая притяжения, пропорционального $(n-1)$-ой степени расстояния, причем $n$ может быть *какое угодно*. В самом деле, при современных обозначениях, имеем

$$v^2 = -\frac{2\mu^2}{n} r^n + h$$

где $h$ — произвольная постоянная. Ньютон ее определяет из условия, что при расстоянии $r = r_0$ скорость $v = 0$, значит будет

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{n} (r_0{}^n - r^n),$$

или, делая принятые в тексте обозначения $r_0 = P$, $r = A$ и замечая, что $\sqrt{\frac{2}{n}}\,\mu$ есть постоянный коэффициент, получим, что скорость $v$ пропорциональна $\sqrt{P^n - A^n}$.

времени, следовательно, $KN$ обратно пропорционально расстоянию $CJ$, т. е. если взять какую-либо постоянную величину $Q$ и обозначить длину $CJ$ через $A$, то $KN$ будет пропорционально $\frac{Q}{A}$. Обозначим это количество через $Z$ и положим, что величина $Q$ выбрана так, что при каком-нибудь одном положении тела

$$\sqrt{ABFD} : Z = JK : KN$$

тогда и при всяком его положении будет

$$\sqrt{ABFD} : Z = JK : KN$$

и значит,

$$ABFD : Z^2 = JK^2 : KN^2$$

отсюда

$$(ABFD - Z^2) : Z^2 = JN^2 : KN^2$$

следовательно

$$\sqrt{ABFD - Z^2} : Z = JN : KN$$

и так как

$$Z = \frac{Q}{A}$$

то будет

$$A \cdot KN = \frac{Q \cdot JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}} \cdot$$

Но так как

$$YX \cdot XC : A \cdot KN = CX^2 : A^2$$

то

$$YX \cdot XC = \frac{Q \cdot JN \cdot CX^2}{A^2 \sqrt{ABFD - Z^2}} \cdot$$

Следовательно, éсли по перпендикуляру $DF$ откладывать длины $Db$ и $Dc$, соответственно равные

$$\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}}$$

и

$$\frac{Q \cdot CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD - Z^2}},$$

и провести кривые $ab$ и $ac$, на которых постоянно лежат точки $b$ и $c$, затем из точки $V$ восставить к прямой $AC$ перпендикуляр $Va$, ограничивающий криволинейные площади $VDba$, $VDca$, и провести ординаты $Ez$ и $Ex$, то так как

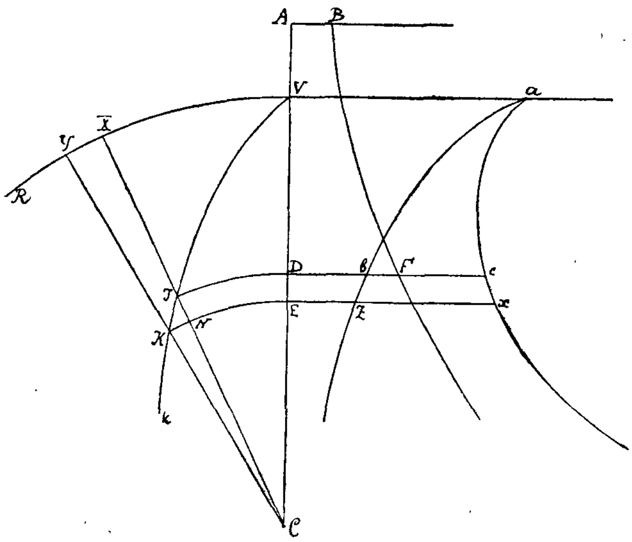
$$Db \cdot JN = DczE = \frac{1}{2} A \cdot KN = JKC$$

$$Dc \cdot JN = DcxE = \frac{2}{2} YX \cdot XC = XCY$$

т. е. что бесконечно малые приращения площадей $VDba$ и $VJC$, а именно $DbzE$ и $JCK$, и приращения площадей $VDca$ и $VCX$, а именно $DcxE$ и $XCY$, соответственно равны, то и самые эти площади равны, т. е будет:

$$VDba = VJC \quad \text{и} \quad VDca = VCX$$

а так как площадь $VJC$ пропорциональна времени, то и $VDba$ будет пропорциональна времени. Следовательно, если задать время, протекшее после прохождения тела через точку $V$, то будет известна и пропорциональная



Фиг. 84.

ему площадь $VDba$, следовательно найдется расстояние $CD$ или $CJ$ тела до центра, а также и площадь $VDca$ или равный ей сектор $VCX$, или, что то же, соответствующий ему угол $VCJ$. Когда же известны угол $VCJ$ и расстояние $CJ$, то известно и место $J$, в котором тело находится в рассматриваемый момент времени.[94]

---

[94] В этой задаче дается общий способ определения движения тела под действием центральной силы, причем этот способ лишь с внешней стороны и обозначениями отличается от теперешнего.

В самом деле, будем пользоваться обычными теперь обозначениями; пусть $CJ = r$ и угол $VCJ = \theta$, начальное расстояние $CV = r_0$ и начальная скорость $v_0$, притягательная сила $\mu^2 f(r)$, тогда по закону живых сил будет

$$v^2 = v_0^2 + 2\mu^2 \int_{r_0}^{r} f(r)\,dr. \tag{1}$$

*Следствие 1.* На основании вышеизложенного можно находить весьма просто наибольшие и наименьшие удаления тела от центра, т. е. вершины (апсиды) его орбиты. В самом деле, вершины суть те точки, в которых проходящая через центр прямая нормальна к траектории $VJK$, а это будет там, где прямые $JK$ и $JN$ между собою равны, следовательно, там где площадь $ABFD$ равна $Z^2$.

*Следствие 2.* Легко находится также и угол $KJN$, под которым траектория пересекается в любом месте с прямою $JC$, по известному расстоянию $JC$, стоит только взять синус этого угла равным отношению $KN$ к $JK$, т. е. отношению $Z$ к стороне квадрата, равномерного с площадью $ABFD$.

---

Ньютон берет расстояние $CA = a$ так, чтобы было

$$v_0^2 = 2\mu^2 \int_a^{r_0} f(r)\, dr,$$

и поэтому будет

$$v^2 = 2\mu^2 \int_a^{r} f(r)\, dr = \omega(r) \tag{2}$$

т. е. $v^2$ пропорционально площади $ABFD$.

С другой стороны, по закону площадей будет

$$r^2\, d\theta = c\, dt \tag{3}$$

или

$$r\, d\theta = \frac{c}{r} \cdot dt \tag{3'}$$

но величина $r\, d\theta = KN$, и следовательно, равенство $Z = \frac{Q}{A}$, при наших обозначениях, равносильно равенству

$$r\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r} = Z.$$

При теперешних обозначениях пишут

$$v^2\, dt^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = \omega(r)\, dt^2$$

и, исключая $dt$, на основании равенства (3), выражающего закон площадей, получают

$$\frac{c^2\, dr^2}{r^4} = \left[\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}\right] d\theta^2$$

откуда

$$d\theta = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}} \tag{4}$$

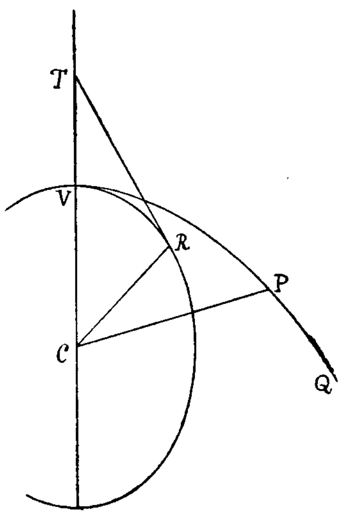
и затем

$$r^2\, d\theta = c\, dt = \frac{c\, dr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}},$$

т. е.

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}}. \tag{5}$$

*Следствие 3.* Если, приняв точку $C$ (фиг. 85) за центр и точку $V$ за главную вершину, описать какое-либо коническое сечение $VRS$ и в какой-либо его точке $R$ провести к нему касательную, пересекающую продолжение оси в точке $T$, и, соединив $CR$, провести прямую $CP$ так, чтобы было $CP = CT$ и чтобы угол $VCP$ был пропорционален сектору $VCR$, то если к центру направлена сила, обратно пропорциональная кубу расстояний, и тело выходит из точки $V$ со скоростью, направленной по прямой перпендикулярной $CV$, то это тело будет двигаться по траектории $VPQ$, представляющей геометрическое место точек $P$. Поэтому, если коническое сечение — гипербола, то тело приближается к центру, если — эллипс, то удаляется и уходит в бесконечность. Наоборот, если тело выходит из точки $V$ с какою бы то ни было скоростью, то сообразно тому, начинает ли оно наискосок удаляться от центра, или приближаться к центру, фигура $VRS$ будет или эллипс, или гипербола, и траектория может быть найдена увеличивая или уменьшая угол $VCP$ в некотором заданном отношении. При изменении силы из центростремительной в центробежную, тело будет косвенно удаляться от центра по траектории $VPQ$, которая получится беря угол $VCP$ пропорционально эллиптическому



Фиг. 85.

---

Равенство (4) и написано у Ньютона так:

$$XY \cdot XC = \frac{Q \cdot JN \cdot CX^2}{A^2 \sqrt{ABFD - Z^2}}. \tag{6}$$

В самом деле,

$$XY = XC \cdot d\theta, \quad JN = dr, \quad Q = c, \quad \frac{c}{r} = Z$$

и

$$ABFD = 2\mu^2 \int_a^r f(r)\,dr = \omega(r);$$

ясно, что формулы (4) и (6) отличаются лишь обозначениями.

Вместо формулы (5) Ньютон берет формулу

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} c\,dt = \frac{c\,dr}{2\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}}, \tag{7}$$

выражающую пропорциональность площади сектора $VJC$ времени. Понятно, что знаки интегралов у Ньютона заменены площадями соответствующих кривых.

сектору $VRC$, длину же $CP$ равною длине $CT$, как и раньше. Все это следует из предыдущего предложения и может быть найдено при помощи квадратуры некоторой кривой; эту квадратуру, в виду достаточной ее легкости, я для краткости опускаю.[95]

---

[95] Так как в этом случае будет

$$\omega(r) = \pm \mu^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

сообразно тому, притягательная или отталкивательная сила, то квадратуры, упоминаемые в этом следствии, выражаемые формулами (4) и (5) примечание 94, легко выполняются. Необходимо при этом заметить, что в таблице формул, приложенных к сочинению Ньютона — «De quadratura curvarum», находятся все типичные интегралы простейших алгебраических функций, выражающиеся в конечном виде, и показаны способы разложения в ряды для не выражающихся в конечном виде.

Движение тела под действием силы, обратно пропорциональной кубу расстояния, подробно исследовано Котесом в его «Harmonia Mensurarum».

Но, чтобы получить эти результаты проще, можно воспользоваться формулою

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\},$$

приведенной в примечании 42.

Полагая $\frac{1}{r} = \sigma$ и обозначая коэффициент притяжения через $\mu^2$, будем иметь уравнение

$$c^2\sigma + c^2\sigma'' = \mu^2\sigma$$

иначе

$$\sigma'' + \frac{c^2 - \mu^2}{c^2}\sigma = 0$$

откуда следует:

(1) $$\sigma = \frac{1}{r} = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta, \quad \text{если} \quad c^2 - \mu^2 > 0 \quad \text{и} \quad c^2 - \mu^2 = n^2 c^2$$

(2) $$\sigma = \frac{1}{r} = C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta} \quad\quad » \quad c^2 - \mu^2 < 0 \quad \text{и} \quad \mu^2 - c^2 = k^2 c^2,$$

причем постоянные произвольные определяются по начальным условиям, в подробное рассмотрение чего входить не будем.

Нетрудно видеть, что траектория, указываемая в тексте, относится к этим типам. В самом деле, для случая эллипса вообразим, что из центра $C$ радиусом $CV$ описан круг, и пусть точке $R$ эллипса на этом круге соответствует точка $R_1$; тогда площади эллиптического и кругового секторов $VCR$ и $VCR_1$ будут находиться в постоянном отношении, значит и угол $VCP = \theta$ будет находиться в постоянном отношении к углу $VCR_1 = \omega$; пусть будет $\omega = n\theta$. Очевидно, что подкасательная $CT$ для круга и эллипса одна и та же:

$$CT = \frac{CV}{\cos\omega}$$

полагая

$$CV = a$$

получаем уравнение траектории

$$r = \frac{a}{\cos n\theta}$$

заключающееся в формуле (1) при

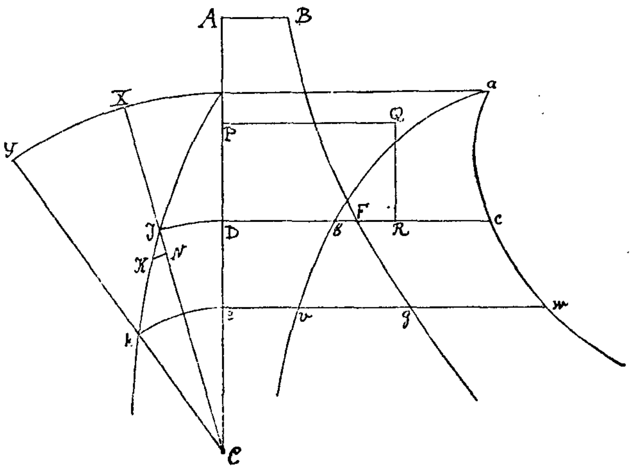
$$C_1 = a \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Точно так же для гиперболы увидим, что траектории, даваемые построением Ньютона, заключаются в формуле (2).

**Предложение XLII. Задача XXIX**

*При заданном законе центростремительной силы требуется определить движение тела, выходящего из заданного места с заданною по величине и направлению скоростью.*

Сохраняя все так, как в предыдущих трех предложениях, положим, что тело выходит из заданного места $J$ (фиг. 86) по направлению отрезочка $JK$ с такою скоростью, которую другое тело, падая под действием постоянной центростремительной силы из точки $P$, приобрело бы, придя в $D$,




Фиг. 86.

и пусть эта постоянная сила так относится к силе, действующей на первое тело в точке $J$, как $DR$ к $DF$. Пусть тело пришло в точку $k$. Точкою $C$, как центром, и радиусом $Ck$ опишем круг $ke$, пересекающий прямую $PD$ в $e$, и проведем ординаты $eg$, $ev$, $ew$ кривых $BFg$, $abv$, $acw$. По заданным прямоугольнику $PDRQ$ и закону центростремительной силы, действующей на первое тело, найдется кривая $BFg$, по построению задачи XXVII и по ее следствию 1. Затем по заданному углу $CJK$ будет известно начальное отношение бесконечно малых $JK$ и $KN$, следовательно по построению задачи XXVIII найдется количество $Q$, а значит, и кривые $abv$ и $acw$, следовательно, по истечении какого-либо заданного времени $Dbve$, найдется как

Траекторию формулы (1) Ньютон дает еще и в следствии 6 предложения XLIV, указывая и более простое и очевидное построение формулы

$$r = \frac{a}{\cos n\theta} = \frac{a}{\cos \omega}.$$

расстояние тела *Ce* или *Ck*, так и площадь *Dcwe*, равная площади сектора *XCy*, значит найдется и угол *JCk*, т. е. и то место *k*, в которое тело пришло.[96]

Во всех этих предложениях предполагается, что центростремительная сила изменяется при удалении от центра по любому закону, какой кому угодно будет вообразить, но при одинаковых от центра расстояниях она должна быть везде одна и та же.[97]

Однако до сих пор движение тел по неподвижным орбитам рассмотрено достаточно, остается еще немного кое чего добавить о движении тел по орбитам, обращающимся около центра сил.

## ОТДЕЛ IX

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПО ПОДВИЖНЫМ ОРБИТАМ И О ПЕРЕМЕЩЕНИИ АПСИД

### Предложение XLIII. Задача XXX

*Требуется заставить тело двигаться по заданной вращающейся около центра сил траектории одинаково с другим телом, движущимся по такой же покоящейся траектории.*

Пусть по заданной неподвижной орбите *VPK* (Фиг. 87) обращается тело *P*, двигаясь от *V* к *K*. Из центра *C* проводится прямая *Cp*, равная *CP*, так, чтобы угол *VCp*, ею составляемый с прямою *CV*, был постоянно пропорционален углу *VCP*; тогда площадь, описываемая прямою *Cp*, будет так относиться к площади *VCP*, описываемой одновременно с нею прямою *CP*, как угловая скорость описывающей прямой *Cp* к скорости прямой *CP*, т. е. как угол *VCp* к углу *VCP*, т. е. будет в постоянном отношении к этой последней, следовательно площадь *VCp* будет пропорциональна времени.

Таким образом площадь, описываемая прямою *Cp* на неподвижной плоскости, пропорциональна времени, следовательно тело при действии надлежащей центростремительной силы может двигаться так, чтобы постоянно совпадать с точкою *p*, описывая на неподвижной плоскости по вышеприведенному закону ту же кривую, как и эта точка.

Пусть угол *VCu* равен углу *PCp* и длина *Cu* равна длине *CV*; тогда фигура *uCp* будет равна фигуре *VCP* и тело, находящееся постоянно в *p*,

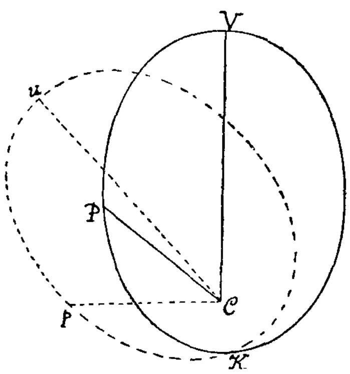
[96] В этой теореме выясняется главным образом, как определяются величина $\mu^2$ в выражении притягательной силы и постоянная площадей *c*, что необходимо для применения формул предыдущей задачи, чтобы от пропорций перейти к уравнениям, в которых «коэффициенты пропорциональности» известны.

[97] Этою оговоркою устанавливается, что закон живых сил применим лишь для сил «центральных», как их называют теперь, т. е. зависящих только от расстояния до центра.

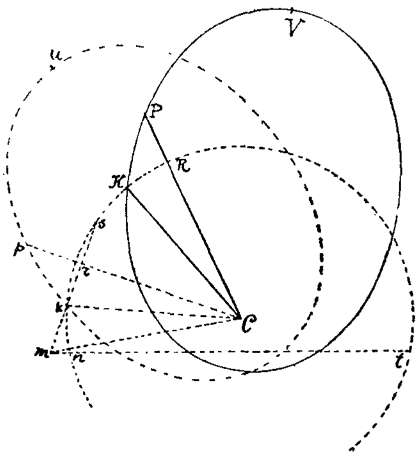
будет двигаться по вращающейся кривой $uCp$ и опишет на ней дугу $up$ в то же самое время, в какое другое тело $P$ описывает равную и подобную дугу на неподвижной кривой $VPK$, поэтому стоит только определить (предл. VI, след. 5) центростремительную силу, под действием которой тело могло бы описывать на неподвижной плоскости ту кривую, которую описывает на ней точка $p$, и задача будет решена.

### Предложение XLIV. Теорема XIV

*Разность сил, заставляющих двигаться одно тело по неподвижной орбите, другое по такой же орбите, но равномерно вращающейся, обратно пропорциональна третьей степени расстояния этих тел до центра.*




Фиг. 87.




Фиг. 88а.

Пусть части $up$ и $pk$ (фиг. 88а) вращающейся орбиты соответственно подобны и равны частям $VP$, $PK$ орбиты неподвижной, причем расстояние $PK$ точек $P$ и $K$ предполагается весьма малым. Из точки $k$ опускается на прямую $pC$ перпендикуляр $kr$ и продолжается до точки $m$ так, чтобы было

$$mr : kr = \angle VCp : \angle VCP.$$

Так как постоянно расстояние $PC = pC$ и $KC = kC$, то и приращения длин $PC$ и $pC$ будут постоянно между собою равны; поэтому, если движение тел $P$ и $p$ разложить (след. II законов) на два, из которых одно направлено к центру, т. е. по прямым $PC$ и $pC$, другое же — к этим линиям соответственно перпендикулярно, то перемещения по направлению к центру будут между собою равны, перпендикулярные же перемещения будут относиться друг к другу, как угловые перемещения прямых $Cp$ и $CP$, т. е. как углы $VCp$ и $VCP$; поэтому в продолжение того времени, в которое тело, вследствие обоих своих движений, переходит в точку $K$, тело $p$, сделав равное перемещение по направлению к центру $C$, придет к концу того же промежутка времени куда-нибудь на прямую $mkr$, проходящую через $k$ и перпендикулярную к $pC$, вследствие же поперечного перемещения удалится от прямой $pC$ на величину, которая так относится к поперечному перемещению тела $P$, как поперечные скорости этих тел, а так как поперечное перемещение тела $P$ есть $kr$, то поперечное перемещение $mr$ тела $p$ определится пропорцией

$$mr : kr = \angle VCp : \angle VCP.$$

Следовательно, по прошествии сказанного промежутка времени тело $p$ оказалось бы в точке $m$. Так оно бы и было, если бы тела $P$ и $p$ двигались одинаково по прямым $pC$ и $PC$, т. е. находились бы под действием равных сил, направленных по этим прямым. Но если взять угол $pCn$ так, чтобы было

$$\angle pCn : \angle pCk = \angle VCp : \angle VCP$$

и

$$nC = kC$$

то в точке $n$ получится то истинное место тела $p$, куда оно на самом деле приходит. Отсюда видно, что если угол $pCn$ больше угла $pCk$, т. е. когда орбита $upk$ вращается в ту же сторону, как и радиус $PC$, или в сторону обратную, но со скоростью, более, нежели в два раза, превосходящею скорость радиуса $CP$, то тело $p$ находится под действием силы *большей* нежели тело $P$, и под действием силы меньшей, нежели тело $P$, когда орбита вращается в сторону обратную со скоростью меньшею, нежели удвоенная скорость радиуса $CP$. Разность сил пропорциональна расстоянию $mn$ между теми местами тела $p$, на которое тело в продолжение заданного промежутка времени перемещается под действием силы.

Центром $C$ и радиусом $Cn$ или $Ck$ описывается круг, пересекающий продолжение прямых $mr$ и $nm$ в точках $s$ и $t$; тогда будет

$$mn : mk = ms : mt$$

следовательно

$$mn = \frac{mk \cdot ms}{mt}$$

так как при постоянной величине промежутка времени площади $pCk$ и $pCn$ также постоянны, то длины $kr$ и $mr$, а также и их разность и сумма обратно пропорциональны расстоянию $pC$, следовательно произведение $mk \cdot ms$ обратно пропорционально квадрату расстояния $pC$. Но $mt$ пропорционально $\frac{1}{2} mt$, т. е. расстоянию $pC$, следовательно величина $\frac{mk \cdot ms}{mt}$, т. е. отрезочек $mn$, обратно пропорциональна кубу расстояния $pC$. Все эти отношения суть предельные, поэтому и пропорциональная величине $mn$ разность сил обратно пропорциональна кубу[98] расстояния $pC$.

*Следствие 1.* Разность сил в точках $P$ и $p$ или в точках $K$ и $k$ так относится к силе, под действием которой тело могло бы, обращаясь по кругу, прийти из $R$ в $K$ в то же самое время, в которое, двигаясь по неподвижной

---

[98] Обозначая через $\tau$ — бесконечно малый промежуток времени и через $\varphi$ — ускорение той силы, от действия которой происходит отклонение $mn$, будем иметь

$$mn = \frac{1}{2} \varphi \cdot \tau^2$$

пусть для площадей $VCp$ и $VCP$ соответствующие постоянные суть $c_1$ и $c$ и расстояние

$$Cp = CP = A$$

как оно обозначено ниже у Ньютона. Тогда будет:

$$kr = \frac{c_1 \tau}{A}; \quad mr = \frac{c\tau}{A}; \quad mt = 2pC = 2A.$$

Затем

$$ms = kr + mr = \frac{(c_1 + c)\tau}{A}; \quad mk = mr - rk = \frac{(c_1 - c)}{A}\tau$$

следовательно

$$mn = \frac{1}{2} \varphi\tau^2 = \frac{c_1^2 - c^2}{2A^3} \cdot \tau^2.$$

Ньютон полагает

$$c_1 : c = G : F, \quad \text{т. е.} \quad c_1 = c \cdot \frac{G}{F}$$

на основании этого будет

$$\varphi = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \cdot \frac{c^2}{A^3} \tag{1}$$

причем $c$ есть постоянная площадей для *неподвижной* орбиты.

Величине $\frac{c^2}{A^3}$ в следствии 1 придается механическое толкование, именно как такой силы, под действием которой тело может двигаться по кругу равномерно, причем постоянная площадей равна $c$; в самом деле, для такого кругового движения будет

$$\varphi_0 = \frac{v^2}{A} \quad \text{и} \quad c = vA$$

следовательно

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{A^3}$$

и значит,

$$\varphi = \frac{G^2 - F^2}{F^3} \cdot \varphi_0 \qquad (2$$

орбите, оно описывает дугу $PK$, как бесконечно малый отрезочек $mn$ относится к синусу верзусу бесконечно малой дуги $RK$, т. е. как

$$\frac{mk \cdot ms}{mt} : \frac{rk^2}{2Ck}$$

т. е. в пределе как $mk \cdot ms : rk^2$.

Следовательно, если угол

$$VCP : Vcp = F : G$$

то предыдущее отношение будет

$$(G^2 - F^2) : F^2.$$

Поэтому, если из центра $C$ радиусом $CP$ или $Cp$ описать сектор, равный площади $VCP$, описываемой радиусом $CP$, то разность сил, действующих на тела $P$ и $p$ и заставляющих первое из них описывать неподвижную орбиту, второе — подвижную, так относится к такой центростремительной силе, под действием которой любое из этих тел, двигаясь равномерно по кругу, описывало бы его радиусом в одинаковое время сектор, коего площадь равна площади $VPC$, как $(G^2 - F^2) : F^2$, ибо сказанный сектор и площадь $pCk$ относятся друг к другу, как времена описания их.

*Следствие 2.* Если орбита $VPK$ есть эллипс, коего фокус $C$ и дальняя вершина $V$, и берется равный и подобный ему эллипс $upk$ так, чтобы было постоянно

$$pC = PC$$

и

$$\angle VCp : \angle VCP = G : F$$

расстояние же $PC$ или $pC$ обозначить через $A$ и параметр эллипса — через $2R$, то сила, под действием которой тело может обращаться по подвижному эллипсу, будет пропорциональна количеству

$$\frac{F^2}{A^2} + (G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}$$

и наоборот.[99] Действительно, если силу, под действием которой тело обращается по неподвижному эллипсу, выразить количеством $\frac{F^2}{A^2}$, тогда сила,

---

[99] В примечании 45 приведено выражение силы, обратно пропорциональной квадрату расстояний, под действием которой тело описывает коническое сечение

$$\varphi_1 = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{SP^2} = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{A^2}.$$

Но в данном случае полагается

$$p = R,$$

действующая в точке $V$, будет $\frac{F^2}{CV^2}$. Сила же, под действием которой тело при расстоянии $CV$ могло бы двигаться по кругу с такою же скоростью, какую имеет тело, движущееся по эллипсу в вершине $V$, так относится к силе, действующей в этой вершине, как полупараметр эллипса к полудиаметру $CV$ круга, и следовательно, составит $F^2 \cdot \frac{R}{CV^3}$, сила же, относящаяся к ней, как $(G^2 - F^2) : F^2$, составит $(G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{CV^3}$, но эта последняя сила (по след. 1) равна разности сил, действующих в точке $V$ на тело $P$, движущееся по неподвижному эллипсу $VPK$, и на $p$, движущееся по подвижному эллипсу $upk$.

Но так как при расстоянии $A$ эта разность относится к таковой же при расстоянии $CV$, как $\frac{1}{A^3} : \frac{1}{CV^3}$, то она составит $(G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}$ и приложится к той силе $\frac{F^2}{A^2}$, под действием которой тело обращается по неподвижному эллипсу, так что полная сила, которая может заставить тело обращаться по подвижному эллипсу $upk$ в такое же время, как предыдущая по неподвижному, составит

$$\frac{F^2}{A^2} + (G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}.$$

*Следствие 3.* Таким же образом получится, что если неподвижная орбита $VPK$ есть эллипс, коего центр $C$ совпадает с центром сил $C$, подвижная же орбита $upk$ равна и подобна неподвижной и $2R$ есть параметр этого эллипса, $2T$ — его большая ось и отношение $VCp : VCP = G : F$, то силы, под действием коих одно тело будет обращаться по неподвижному эллипсу, другое в то же самое время — по подвижному, относятся[100] между собою, как

$$F^2 \cdot \frac{A}{T^3} : \left[\frac{F^2 \cdot A}{T^3} + (G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}\right].$$

---

значит будет

$$\varphi_1 = \frac{c^2}{R} \cdot \frac{1}{A^2},$$

следовательно

$$\varphi + \varphi_1 = \frac{G - F^2}{F^2} \cdot \frac{c^2}{A^3} + \frac{c^2}{R} \cdot \frac{1}{A^2} = \frac{c^2}{R \cdot F^2} \cdot \left[\frac{F^2}{A^2} + \frac{(G^2 - F^2) R}{A^3}\right].$$

Это и есть формула следствия 2, ибо $\frac{c^2}{RF^2}$ есть постоянная.

100 На основании формулы (*) примечания 44, будем иметь

$$\varphi_1 = \frac{c^2 \cdot A}{RT^3},$$

следовательно будет

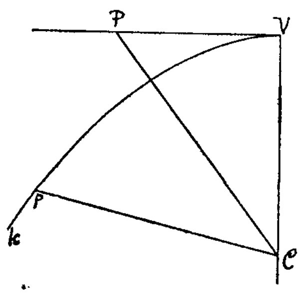
$$\varphi + \varphi_1 = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \cdot \frac{c^2}{A^3} + \frac{c^2 A}{RT^3} = \frac{c^2}{RF^2} \left[\frac{F^2 \cdot A}{T^3} + (G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}\right].$$

*Следствие 4.* Вообще, если наибольшее удаление $CV$ тела обозначить через $T$, радиус кривизны орбиты $VPK$ в точке $V$ обозначить через $R$ и центростремительную силу, под действием которой тело могло бы описывать какую-либо неподвижную траекторию, положить для точки $V$ равной

$$K \cdot \frac{F^2}{T^2}$$

во всяком же другом месте $P$ обозначить через $X$, расстояние $CP$ обозначить через $A$ и взять попрежнему $G : F = VCp : VCP$, то центростремительная сила, под действием которой тело могло бы обращаться по той же траектории $upk$, но равномерно вращающейся, описывая ее в одинаковое время, будет выражаться[101] суммою

$$X + (G^2 - F^2) \cdot R \cdot \frac{K}{A^3}.$$



Фиг. 88b.

*Следствие 5.* Когда движение тела по какой-либо неподвижной орбите задано, то можно увеличивать или уменьшать угловое его движение около центра сил в заданном отношении и находить новые неподвижные орбиты, по которым тело будет обращаться под действием новых центростремительных сил.

*Следствие 6.* Если провести неограниченную прямую $VP$ (фиг. 88b) перпендикулярно к заданной по положению прямой $CV$ и, соединяя $CP$, откладывать равную ей длину $Cp$ под углом $VCp$ к прямой $CV$, находящимся к углу $VCP$ в постоянном отношении, то сила, под действием которой тело $p$ может двигаться по этой кривой $Vpk$, будет обратно пропорциональна кубу расстояния $Cp$, ибо тело по прямой $VP$ может двигаться по инерции без действия какой-либо силы. Следовательно, когда приложенная сила, напра-

[101] При сделанных обозначениях, полагая скорость тела в точке $V$ равной $v$, будем иметь

$$\frac{v^2}{R} = \frac{K \cdot F^2}{T^2}$$

и

$$c = v \cdot T,$$

следовательно будет

$$c^2 = K \cdot F^2 \cdot R$$

и

$$\varphi = (G^2 - F^2) \cdot \frac{R \cdot K}{A^3},$$

а так как $\varphi_1 = X$, то и получится приведенная в тексте формула.

вленная к центру, обратно пропорциональна кубу расстояния $CP$ или $Cp$, то по только что доказанному прямолинейное движение обратится в криволинейное по $Vpk$. Эта кривая $Vpk$ одинакова с тою $VPQ$, которая найдена выше (предл. XLI, след. 3) и по которой, как там указано, тело под действием такого рода силы движется косвенно, удаляясь от центра.

## Предложение XLV. Задача XXXI

*Требуется определить движение вершин (апсид) орбит, весьма близких к кругу.*

Эта задача решается вычислением, распоряжаясь так, чтобы орбита, описываемая на неподвижной плоскости движущимся по неподвижному эллипсу телом, приближалась по своему виду к той, движение вершин которой ищется, и определяя затем вершины этой описываемой на неподвижной плоскости орбиты. Орбиты же получаются одинакового вида, если при сравнении центростремительных сил, под действием которых они описываются, окажется, что эти силы, при одинаковых расстояниях, между собою пропорциональны.

Пусть точка $V$ есть дальняя вершина орбиты; обозначим через $A$ — расстояние $CP$ или $Cp$, через $T$ — наибольшее расстояние $CV$, через $X$ — разность расстояний $CV — CP$. Сила, под действием которой тело может двигаться по вращающемуся около своего центра $C$ эллипсу, выражается (предл. XLVI, след. 2) так:

$$\frac{F^2}{A^2}+(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{A^3}=\frac{AF^2+R(G^2-F^2)}{A^3}.$$

Подставляя в числителе $T-X$ вместо $A$, получим

$$\frac{TF^2-XF^2+R(G^2-F^2)}{A^3}. \qquad (*)$$

Также и выражение всякой другой центростремительной силы надо привести к виду дроби, коей знаменатель был бы $A^3$, после чего, собрав подобные члены, положить, что числитель этой дроби и дроби (*) пропорциональны.[102] На примерах дело становится очевидным.

---

[102] Это место высказано столь кратко, что для правильного его понимания надо сперва прочесть указанные примеры, и тогда обнаружится, что предлагаемое правило можно высказать подробнее так: для орбиты, весьма близкой к кругу, описываемой под действием заданной центростремительной силы, надо представить выражение, показывающее зависимость этой силы от расстояния $A$ в виде дроби, знаменатель которой $A^3$. В числителе полученной дроби написать $T-X$ вместо $A$ и разложить его в ряд по степеням буквы $X$. Пусть полученное разложение будет

$$M+NX+PX^2+\ldots,$$

или, что то же,

$$M+X(N+PX+\ldots).$$

*Пример 1.* Положим, что центростремительная сила — постоянная, т. е. пропорциональная $\frac{A^3}{A^3}$, или, написав в числителе $T - X$ вместо $A$,

$$\frac{T^3 - 3T^2X + 3TX^2 - X^3}{A^3}.$$

Собирая и сравнивая члены, содержащие и не содержащие букву $X$, имеем пропорцию

$$\{R(G^2 - F^2) + TF^2\} : T^3 = -F^2X : [-3T^2X + 3TX^2 + X^3]$$
$$= -F^2 : [-3T^2 + 3TX + X^2];$$

так как орбита предполагается весьма близкой к кругу, то в пределе, когда она сольется с кругом, надо взять $R = T$ и $X$ бесконечно малым, и предельные отношения будут

$$RG^2 : T^3 = -F^2 : -3T^2$$

или

$$G^2 : T^2 = F^2 : 3T^2,$$

т. е.

$$G^2 : F^2 = 1 : 3,$$

и значит,

$$G : F = VCp : VCP = 1 : \sqrt{3}.$$

Так как тело, при движении по неподвижному эллипсу, при переходе от дальней до ближней вершины описывает угол $VCP$ (если можно так выразиться) в $180°$, то другое тело, движущееся по подвижному эллипсу, а значит, и по той неподвижной орбите, о которой идет речь, при переходе от дальней до ближней вершины опишет угол $VCp$, равный $\frac{180°}{\sqrt{3}}$. Это происходит от подобия орбиты, описываемой телом под действием постоянной центростремительной силы, и орбиты, которую описывает тело на неподвижной плоскости, совершая обороты по вращающемуся эллипсу. При помощи вышеуказанного приведения членов подобие орбит достигается не вообще,

---

Условие пропорциональности этой дроби и дроби (*) будет

$$[R(G^2 - F^2) - TF^2] : M = -F^2 : (N + PX + \ldots).$$

Так как орбита весьма близка к кругу, то в пределе будет

$$T = R \quad \text{и} \quad X = 0;$$

обозначая через $M_0$ и $N_0$ — величины, в которые обратятся $M$ и $N$, когда в них будет положено $T = R$, получим $RG^2 : M_0 = -F^2 : N_0$.

Откуда и найдется искомое отношение

$$\frac{G^2}{F^2} = -\frac{M_0}{N_0} \cdot \frac{1}{R}.$$

а лишь в том случае, когда они обе весьма близки к кругу. Итак, тело, обращающееся под действием постоянной центростремительной силы по орбите, весьма близкой к кругу, будет описывать между дальнею и ближнею вершиною угол при центре в $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}} = 103^\circ 55' 23''$, т. е. при переходе тела из дальней вершины в ближнюю радиус, проведенный к телу, описывает этот угол, затем при переходе от ближней вершины до дальней опять описывается этот угол и т. д. до бесконечности.

*Пример 2.* Положим, что центростремительная сила пропорциональна какой-либо $(n-3)$-ей степени расстояния $A$, т. е. $A^{n-3}$ или $\frac{A^n}{A^3}$, причем показатели $n$ и $n-3$ могут быть какие угодно числа,[103] положительные, отрицательные, целые или дробные, рациональные или иррациональные. При разложении числителя дроби $A^n$ или $(T-X)^n$ по нашему ряду, получим

$$(T-X)^n = T^n - nT^{n-1} \cdot X + \frac{n^2-n}{2} \cdot T^{n-2} \cdot X^2 + \ldots$$

При сличении этих членов с членами числителя дроби (*)

$$R(G^2 - F^2) + TF^2 - F^2 X$$

получим

$$[R(G^2-F^2)+TF^2] : T^n = -F^2 : \left[-nT^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} \cdot T^{n-2} \cdot X + \ldots\right],$$

переходя к пределу, когда орбиты круговые, будем иметь

$$G^2 R : T^n = F^2 : nT^{n-1}$$

или

$$G^2 : T^{n-1} = F^2 : nT^{n-1}.$$

Откуда следует

$$G^2 : F^2 = 1 : n$$

и значит,

$$G : F = VCp : VCP = 1 : \sqrt{n}.$$

Так как при движении по эллипсу угол $VCP$, описываемый при переходе от дальней вершины до ближней, составляет $180^\circ$, то угол $VCp$ между

103 Обобщение понятия о степени и ее показателе на какие угодно числа принадлежит Ньютону. Следует также обратить внимание на то, что разложение величины $(T-X)^n$ по формуле «бинома», которую он называет «наш ряд», пишется для *всякого* показателя $n$. Указания, каким образом такие разложения производить, находятся в сочинении Ньютона — «Analysis per aequationes numero terminorum infinitas», которое было сообщено в рукописи Барроу в 1669 г., но не было издано до 1711 г. Это есть один из примеров, где Ньютон — пользуется в своих «Началах» математическими методами, ему известными, но не опубликованными.

апсидами орбиты, весьма близкой к кругу, описываемой под действием центростремительной силы, пропорциональной степени $n-3$ расстояния, т. е. $A^{n-3}$, составит $\frac{180°}{\sqrt{n}}$. По повторении этого угла, тело перейдет из ближней вершины опять в дальнюю и т. д. до бесконечности. Таким образом, если центростремительная сила пропорциональна первой степени расстояния, т. е. $A$ или $\frac{A^4}{A^3}$, то $n=4$, и $\sqrt{n}=2$, и угол между вершинами равен 90°, так что тело, совершив четверть оборота, придет из дальней вершины в ближнюю, по совершении еще одной четверти — опять в дальнюю и т. д. поочередно до бесконечности. Это подтверждается также предложением X, ибо под действием такой силы тело описывает неподвижный эллипс, коего центр совпадает с центром сил.

Когда сила обратно пропорциональна расстоянию, т. е. $\frac{1}{A}$ или $\frac{A^2}{A^3}$ то $n=2$, и расстояние между вершинами составит

$$\frac{180°}{\sqrt{2}}=127°\,16'\,45'',$$

поэтому тело, обращающееся под действием такой силы, будет переходить от одной вершины к другой, постоянно повторяя этот угол.

Далее, если центростремительная сила будет обратно пропорциональна

$$A^{-\frac{11}{4}} \quad \text{или} \quad \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$$

то

$$n=\frac{1}{4}, \quad \sqrt{n}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{180°}{\sqrt{n}}=360°$$

поэтому тело, выйдя из дальней вершины, будет все время приближаться к центру и, совершив полный оборот, придет в ближнюю вершину, затем будет все время удаляться от центра и, совершив полный оборот, придет опять в дальнюю вершину и т. д. до бесконечности.

*Пример 3.* Пусть $m$ и $n$ суть два какие угодно заданных показателя, $b$ и $c$ — два каких-либо числа; положим, что центростремительная сила пропорциональна

$$\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$$

т. е.

$$\frac{b(T-X)^m+c(T-X)^n}{A^3};$$

разложение в сходящийся ряд будет

$$\frac{bT^m + cT^n - X(mbT^{m-1} + ncT^{n-1}) + X^2\left[\frac{m^2-m}{2}\cdot bT^{m-1} + \frac{n^2-n}{2}cT^{n-2}\right] + \ldots,}{A^3}$$

по приведении и сличении членов получим

$$[R(G^2-F^2)+TF^2]:[bT^m+cT^n]=$$
$$=-F^2:[-mbT^{m-1}-ncT^{n-2}+\ldots]$$

и по переходе к пределу, когда орбита весьма близка к кругу, получим

$$G^2:(bT^m+cT^n)=F^2:(mbT^{m-1}+ncT^{n-1}),$$

и значит, будет

$$G^2:F^2=(bT^m+cT^n):(mbT^{m-1}+ncT^{n-1});$$

приняв в этой пропорции $CV$, т. е. $T$ за 1, имеем

$$G:F=VCp:VCP=\sqrt{b+c}:\sqrt{mb+nc}=1:\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}.$$

Так как угол $VCP$ между дальней и ближней вершиною при движении по эллипсу составляет 180°, то угол $VCp$ между вершинами при движении тела по орбите, весьма близкой к кругу, под действием центростремительной силы, пропорциональной величине $\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$, равен

$$\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}\cdot 180°.$$

Рассуждая совершенно так же, увидим, что когда центростремительная сила пропорциональна $\frac{bA^m-cA^n}{A^3}$, то угол между вершинами будет

$$\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}\,180°.$$

Подобным же образом задача решается и в более трудных случаях: величина, которой пропорциональна центростремительная сила, должна быть разлагаема в ряд и должна иметь своим знаменателем $A^3$. Затем, в числителе члены, не содержащие буквы $X$ и содержащие таковую, полагаются пропорциональными $R(G^2-F^2)+F^2T$ и $-F^2X$; отбросив уничтожающиеся члены и заменив $T$ через 1 и получим отношение $G$ к $F$.

*Следствие 1.* Поэтому, если центростремительная сила пропорциональна какой-либо степени расстояния, то эту степень можно определить по движению апсид, и наоборот. Именно, если полное угловое перемещение тела, после которого оно возвращается вновь в ту же вершину, так относится к полному его обороту или 360°, как число $m$ к $n$, расстояние же обозначить через $A$, то сила пропорциоальна $A^p$, причем показатель степени $p$ равен $\frac{n^2}{m^2} - 3$, как это доказано во втором примере.

Отсюда следует, что сила эта не может уменьшаться при удалении от центра в отношении большем, нежели куб расстояния, ибо тело, обращающееся под действием силы, обратно пропорциональной кубу расстояния, если начнет, после прохождения через вершину, приближаться к центру, описывая ту кривую, о которой сказано в предложении XLI, следствии 3, то оно никогда не дойдет до ближней вершины, т. е. до наименьшего расстояния, но будет постоянно приближаться к центру. Если же оно, пройдя вершину, начнет хотя бы ничтожно удаляться, то оно будет продолжать удаляться в бесконечность, никогда не достигая дальней вершины, и будет описывать ту кривую, о которой сказано как в вышеупомянутом следствии предложения XLI, так и в следствии 6 предложения XLIV. Подобно этому, когда сила убывает при удалении от центра в отношении большем, нежели куб расстояния, то тело, пройдя вершину, если начнет приближаться или удаляться от центра, то и будет или приближаться, пока не достигнет центра, или же будет удаляться в бесконечность.

Если же сила, при увеличении расстояния от центра, или убывает в отношении, меньшем куба расстояния, или возрастает с расстоянием в каком угодно отношении, то тело приближается к центру лишь до тех пор, пока не достигнет ближней вершины; и обратно, если тело переходит от одной вершины к другой, поочередно приближаясь и удаляясь от центра, не достигая его, то сила или возрастает вместе с расстоянием от центра, или же убывает, но в отношении, меньшем куба расстояний; при этом, чем чаще тело переходит из одной вершины в другую, тем более отступает пропорциональность силы от указанной кубичной.

Так, если тело проходит через дальнюю вершину через каждые 8, 4, 2, или $1\frac{1}{2}$ полных оборота, поочередно приближаясь и удаляясь от центра, т. е. если $\frac{m}{n}$ равно или 8, 4, 2, или $1\frac{1}{2}$, то $\frac{n^2}{m^2} - 3$ будет соответственно:

$$\frac{1}{64} - 3, \quad \frac{1}{16} - 3, \quad \frac{1}{4} - 3, \quad \frac{4}{9} - 3$$

и сила будет пропорциональна или

$$A^{\frac{1}{64}-3},\quad \text{или}\quad A^{\frac{1}{16}-3},\quad A^{\frac{1}{4}-3},\quad A^{\frac{4}{9}-3}$$

т. е. обратно пропорциональна

$$A^{3-\frac{1}{64}},\quad A^{3-\frac{1}{16}},\quad A^{3-\frac{1}{4}},\quad A^{3-\frac{4}{9}}.$$

Если тело после каждого оборота будет возвращаться в ту же самую вершину, которая, следовательно, остается неподвижной, так что $\frac{m}{n}=1$, то будет

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-2}=\frac{1}{A^2}$$

т. е. сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, как это уже показано выше.

Если же тело возвращается в ту же самую вершину после

$$\frac{3}{4}\quad \text{или}\quad \frac{2}{3},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}$$

полного оборота, то $\frac{m}{n}$ равно или

$$\frac{2}{4},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{1}{3},\quad \text{или}\quad \frac{1}{4}$$

и значит, $A^{\frac{n^2}{m^2}-3}$ будет или

$$A^{\frac{16}{9}-3},\quad \text{или}\quad A^{\frac{9}{4}-3},\quad A^{9-3},\quad A^{16-3},$$

т. е. сила будет или обратно пропорциональна $A^{\frac{11}{9}}$ или $A^{\frac{3}{4}}$, или же она будет прямо пропорциональна $A^6$ или $A^{13}$. Поэтому, если тело, при переходе из дальней вершины в дальнюю же, делает, сверх полного оборота, еще 3°, иначе — за время полного оборота тела эта вершина перемещается в сторону движения на 3°, то будет

$$m:n=363:360=121:120,$$

и следовательно,

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-\frac{29523}{14641}},$$

т. е. сила обратно пропорциональна $A^{\frac{29523}{14641}}$ или приблизительно $A^{2\frac{4}{243}}$; следовательно, в этом случае центростремительная сила убывает в отношении немного большем, нежели квадрат расстояния. но это отношенне в $59\frac{3}{4}$ раза ближе к квадрату, нежели к кубу.

*Следствие 2.* Таким образом, если тело под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояння, обращается по эллипсу, имеющему свой фокус в центре сил, и к этой центростремительной силе или будет прибавлена, или от нее будет отнята, какая-либо внешняя сила, то можно найти (по примеру 3) движение апсид, происходящее от этой внешней силы, и наоборот. Так, если сила, вследствие которой тело движется по эллипсу, пропорциональна $\frac{1}{A^2}$, отнимаемая же внешняя сила пропорциональна расстоянию, т. е. выражается формулою $cA$, так что остающаяся сила будет пропорциональна $\frac{A - cA^4}{A^3}$, то при обозначениях примера (3) будет:

$$b = 1, \ m = 1, \ m = 4$$

и значит, угловое расстояние между апсидами будет

$$\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}\,180^\circ.$$

Положим, что эта внешняя сила в 357,45 раза слабее, нежели сила, заставляющая тело описывать эллипс,* т. е. возьмем

$$c = \frac{100}{35745}$$

то при

$$A = T = 1$$

будет

$$180^\circ\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180^\circ\sqrt{\frac{35645}{35345}} = 180{,}^\circ 7623 = 180^\circ 45' 44'',$$

т. е. тело, пройдя через дальнюю вершину и описав по орбите угол в $180^\circ 45' 44''$, придет в ближнюю вершину, по удвоении же этого угла опять вернется в дальнюю вершину, следовательно перемещение дальней вершины за один оборот составит $1^\circ 31' 28''$. Движение апсид Луны приблизительно вдвое быстрее.

О движении тел по таким орбитам, коих плоскости проходят через центр сил, сказанного достаточно. Остается определить движение тел в плоскостях, не проходящих через центр сил. Авторы, рассматривающие дви-

* В таком отношении находится так называемая постоянная часть возмущающей силы Солнца к силе притяжения Луны Землею.

жение тяжелых тел, разбирают обыкновенно восходящее и нисходящее движение по заданным наклонным плоскостям, как косвенное, так и прямое; соответственно этому следует рассмотреть и движение тел под действием сил, направленных к постоянному центру, происходящее в плоскостях, не проходящих через этот центр. Мы будем предполагать, что эти плоскости совершенно гладки и скользки, так что они нисколько не замедляют движения. Кроме того, при следующих ниже доказательствах, вместо тех плоскостей, на которые опираются тела, касаясь их, будем брать плоскости, им параллельные, по которым движутся центры тел, описывая при этом движении некоторые орбиты. Таким же образом мы будем затем рассматривать и движение тел по кривым поверхностям.

## ОТДЕЛ X

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПО ЗАДАННЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ И О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПОДВЕШЕННЫХ ТЕЛ

### Предложение XLVI. Задача XXXII

*Предполагая, что центростремительная сила какая угодно и что даны центр сил и плоскость, в которой обращается тело, и допуская квадратуру кривых, требуется определить движение тела, выходящего из данного места с заданною скоростью, направленной по прямой, лежащей в вышеупомянутой заданной плоскости.*

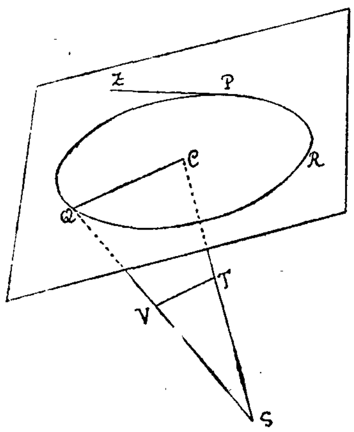
Пусть $S$ (фиг. 89) есть центр сил, $SC$ — кратчайшее его расстояние до данной плоскости, $P$ — место, из которого тело выходит по направлению прямой $PZ$, $Q$ — какое-либо место тела, $PQR$ — траектория тела, лежащая в заданной плоскости. Если, проведя $CQ$ и $QS$, отложить до $QS$ длину $SV$, пропорциональную центростремительной силе, действующей на тело по направлению $QS$, и провести $VT$, параллельную $CQ$ и пересекающую $SC$ в точке $T$, то сила $SV$ разложится[104] на силы $ST$ и $TV$, из коих $ST$, действуя на тело перпендикулярно плоскости, не оказывает влияния на его движение в этой плоскости. Вторая же сила $TV$, действуя в самой плоскости, притягивает тело прямо к точке $C$, лежащей в этой плоскости, и следовательно, заставит тело двигаться в этой плоскости так, как будто бы силы

[104] В примечании 19 уже было указано, что при разложении сил Ньютон не заботится о том, чтобы равнодействующая и составляющие были приложены именно к той точке на чертеже, на которую они действуют; он делает это построение или в стороне, или где удобнее для хода рассуждений, ибо построение параллелограмма должно ему лишь дать отношение между равнодействующей и составляющими и указать направления их.

$ST$ нет, а тело под действием силы $TV$ движется в свободном пространстве. Когда же задана центростремительная сила, под действием которой тело движется в свободном пространстве, то (предл. XLII) определяются как траектория $PQR$, описываемая телом, так и то место $Q$, в котором тело находится в любой заданный момент времени, а также и скорость тела в этом месте $Q$.

## Предложение XLVII. Теорема XV

*Если центростремительная сила пропорциональна расстоянию тела до центра, то все тела, обращающиеся по каким угодно плоскостям, описывают эллипсы, причем времена обращения одинаковы, тела же, движущиеся прямолинейно, колеблясь взад и вперед, совершают каждое полное колебание в продолжение того же периода.*




Фиг. 89.

При сохранении обозначений предыдущего предложения окажется, что так как сила $SV$, притягивающая обращающееся в плоскости $PQR$ тело $Q$ к центру $S$, пропорциональна расстоянию $SQ$, то по пропорциональности $SV$ и $SQ$, $TV$ и $CQ$ и сила $TV$, лежащая в заданной плоскости и притягивающая тело $Q$ к центру $C$, пропорциональна расстоянию $CQ$. Следовательно, силы, с которыми тела, обращающиеся в плоскости $PQR$, притягиваются к точке $C$, при равных расстояниях равны тем силам, с которыми эти тела при таких же расстояниях притягиваются к центру $S$; поэтому эти тела будут двигаться по таким же кривым в любой плоскости $PQR$ около точки $C$, как в свободном пространстве около точки $S$, следовательно (предл. X, след. 2, и предл. XXXVII, след. 2) они в одинаковое время будут описывать в этой плоскости эллипсы около точки $C$, а также и совершать колебания по прямым линиям, проходящим через эту точку и лежащим в данной плоскости.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Вышеизложенному сродственно колебательное движение тел по кривым поверхностям. Вообрази, что на плоскости описана кривая линия и что она обращается около какой-либо оси, лежащей в этой плоскости и проходящей через центр сил; при таком вращении кривая произведет некоторую кривую поверхность. Если тело движется так, что его центр все время находится в этой поверхности, и, колеблясь взад и вперед, не выходит из плоскости, проходящей через ось, то тело будет двигаться по той кривой, вращением которой образована поверхность; поэтому в таких случаях достаточно рассмотреть движение тела по этой кривой.

### Предложение XLVIII. Теорема XVI

*Если колесо стоит на наружной поверхности шара под прямым углом к ней и, вращаясь около своей оси, катится по большому кругу шара, то длина криволинейного пути, описанного какою-либо точкою обода колеса, считая от того положения этой точки, когда оно ею касалось шара, так относится к удвоенному синусу верзусу половины той дуги, которой за это время колесо прикасалось к шару, как сумма диаметров шара и колеса относится к полудиаметру шара.*

### Предложение XLIX. Теорема XVII

*Если колесо стоит на внутренней поверхности шара под прямым углом к ней и, вращаясь около своей оси, катится по большому кругу шара, то длина криволинейного пути, описанного какою-либо точкою обода колеса, считая от того положения этой точки, когда оно ею касалось шара, так относится к удвоенному синусу верзусу половины той дуги, которой за это время колесо прикасалось к шару, как разность диаметров шара и колеса относится к полудиаметру шара.*

Пусть $ABL$ (фиг. 90)—шар, $C$—его центр, $BPV$—колесо, на нем стоящее, $E$ — центр колеса, $B$ — точка касания, $P$ — заданная точка на ободе колеса.

Вообрази, что это колесо катится по большому кругу $ABL$ от $A$ через $B$ к $L$ и при этом так вращается, что дуги $AB$ и $PB$ постоянно между собою равны и что точка $P$, заданная на ободе колеса, описывает криволинейный путь $AP$; если, вместе с тем, $AP$ есть и полная длина описанного точкою $P$ пути, то будет

$$AP : 2\sin\text{vers}\left(\frac{1}{2}PB\right) = 2CE : CB.$$

Пусть прямая $CE$ или ее продолжение пересекает обод в точке $V$; проведи $CP$, $BP$, $EP$, $VP$ и опусти на продолжение $CP$ перпендикуляр $VF$; пусть точка $H$ есть пересечение касательных $PH$ и $VH$, проведенных к ободу в точках $P$ и $V$, $G$ — точка пересечения $PH$ и $VF$ и прямые $GJ$ и $HK$ перпендикулярны к $PV$. Точкою $C$, как центром, и произвольным радиусом опиши круг, пересекающий прямую $CP$ в $n$, обод колеса $BP$ в о и путь точки $P$, т. е. кривую $AP$, в $m$. Точкою $V$, как центром, и радиусом $Vo$ опиши круг, пересекающий продолжение $VP$ в точке $q$. Так как колесо постоянно вращается при своем перемещении около точки касания $B$, то очевидно, что прямая $BP$ нормальна к кривой $AP$, и следовательно, прямая $VP$ касается этой кривой в точке $P$. Радиус круга $nom$ возьми почти равным расстоянию $CP$; тогда, по подобию бесконечно малой фигуры $Pnomq$ и фигуры $PFGVJ$, предельное отношение исчезающих отрезков $Pm$, $Pn$, $Po$, $Pq$, т. е. отношение совместных одновременных приращений длины кривой $AP$, прямой $CP$, дуги круга $BP$ и прямой $VP$, будет то же самое, как прямых: $PV$, $PF$, $PG$ и $PJ$. Но так как прямые $VF$ и $VH$ соответственно перпендикулярны к $CF$ и $CV$, то углы

$$HVC = VCF \quad \text{и} \quad VHG = CEP$$

ибо в четыреугольнике $VHEP$ углы $P$ и $V$ прямые, следовательно треугольники $VHG$ и $CEP$ подобны, и значит,

$$EP : CE = HG : HV = HG : HP = KJ : KP$$

откуда

$$(CE \mp EP) : CE = (KJ \mp KP) : KP,$$

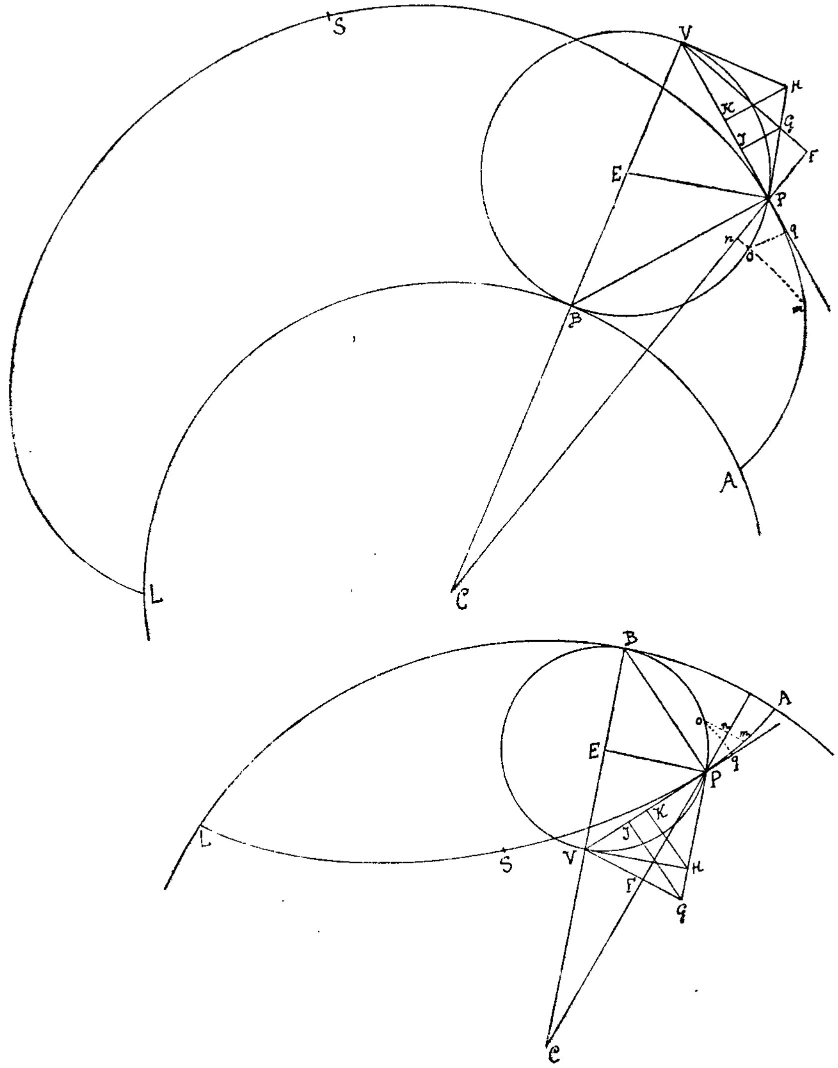
или, удвоив последующие члены,

$$CB : 2CE = PJ : PV = Pq : Pm.$$

Таким образом уменьшение длины $VP$, т. е. приращение длины $BV - VP$, находится в постоянном отношении к приращению длины кривой $AP$, равном отношению $CB$ к $2CE$, поэтому (лем. IV, след.) и самые длины, образуемые этими приращениями, находятся в том же отношении. Но при радиусе $BV$ отрезок $VP$ есть косинус угла $BVP = \frac{1}{2} BEP$, поэтому $BV - VP$ есть синус верзус этого угла, и следовательно, в сказанном колесе, коего радиус есть $\frac{1}{2} BV$, величина $(BV - VP)$ есть удвоенный синус верзус дуги $\frac{1}{2} BP$, почему и будет

$$AP : 2\,\text{sin vers}\left(\frac{1}{2} BP\right) = 2CE : CB.$$

Для различия будем называть кривые $AP$ соответственно циклоидами наружною и внутреннею.




Фиг. 90.

*Следствие 1.* Если описать полную циклоиду $ASL$ и в точке $S$ разделить ее пополам, то так как $VP$ есть удвоенный синус угла $VBP$ при радиусе $EB$, то будет

$$SP : VP = 2CE : CB$$

т. е. дуга $SP$ находится к длине $VP$ в том же постоянном отношении, как и дуга $AP$ к синусу верзусу половины дуги $BP$.

8. Зак. 3350

*Следствие 2.* Длина полупериметра $AS$ циклоиды равна длине такой прямой, которая так относится к диаметру колеса $BV$, как $2CE$ к $CB$.

**Предложение L. Задача XXXIII**

*Устроить так, чтобы подвешенное тело колебалось по заданной циклоиде.*

Внутри шара, описанного из центра $C$ (фиг. 91), задана циклоида $QRS$, середина коей в $R$, концы же ее $Q$ и $S$ находятся в этих точках поверхности шара. Проведи $CR$, разделяющую дугу $QS$ в точке $O$ пополам, и продолжи ее до $A$ так, чтобы было

$$CA : CO = CO : CR.$$

Из центра $C$ радиусом $CA$ опиши наружный шар $DAF$, и пусть внутри его колесом, коего радиус $AO$, описаны две полуциклоиды $AQ$ и $AS$, касающиеся внутреннего шара в точках $Q$ и $S$ и пересекающие наружный шар в точке $A$. Пусть из этой точки $A$ на нити $APT$, длина коей $AR$, подвешено тело $T$, качающееся между полуциклоидами так, что как только маятник отклонится от отвеса $AR$, то нить верхнею своею частью наложится на ту полуциклоиду $APS$, в сторону которой движение происходит, и будет ее огибать как препятствие, остальная же часть нити $PT$, не касающаяся циклоиды, останется растянутой в прямую линию; тогда тело $T$ и будет колебаться по заданной циклоиде $QRS$.

Пусть нить $PT$ пересекает циклоиду $QRS$ в $T$, круг $QOS$ в $V$; проведи $CV$, и из крайних точек $P$ и $T$ прямой части нити восставь перпендикуляры $BP$ и $TW$, пересекающие $CV$ в точках $T$ и $W$. Из построения и одинакового образования кривых $AS$ и $SR$ следует, что эти перпендикуляры отрезают от $CV$ длины $VB$ и $VW$, равные диаметрам колес $OA$ и $OR$. Поэтому

$$TP : VP = BW : BV = (AO + OR) : AO = (AC + CO) : AC = 2CE : CB,$$

ибо

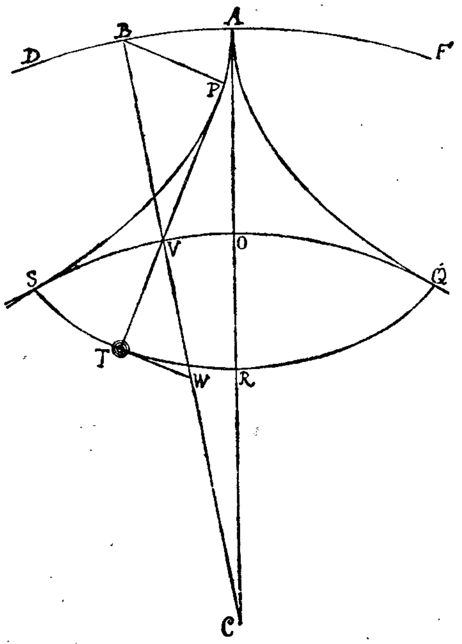
$$CA : CO = CO : CR = AO : OR.$$

Но так как $VP$ есть удвоенный синус угла $VBP$ при радиусе $\frac{1}{2}BV$ то по следствию 1 предложения XLIX длина прямолинейной части нити равна длине дуги $PS$ циклоиды, вся же длина нити равна длине дуги $APS$, т. е. длине $AR$ (предл. XLIX, след. 2). Поэтому, если длина нити остается постоянно равной $AR$, то точка $T$ будет двигаться по заданной циклоиде $QRS$.

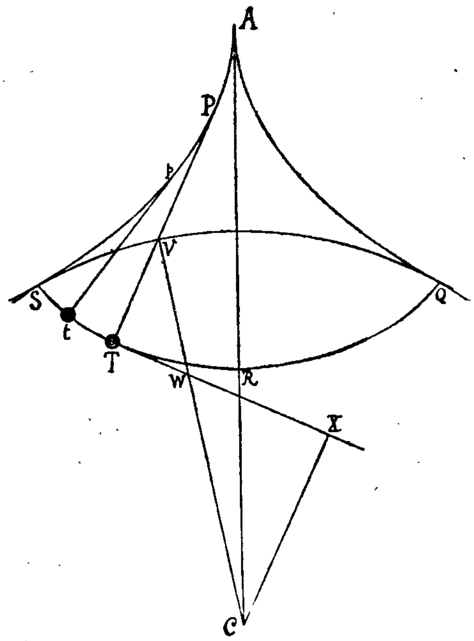
*Следствие.* Нить $AR$ равна длине полуциклоиды $AS$ и, следовательно, так относится к полудиаметру $AC$ наружного шара, как длина подобной ей полуциклоиды $SR$ к полудиаметру $CO$ внутреннего шара.

## Предложение LI. Теорема XVIII

*Если центростремительная сила повсюду направлена к центру шара $C$ и пропорциональна расстоянию до центра, тело же находится*



Фиг. 91.



Фиг. 92.

*под действием только этой силы и колеблется (как описано выше) по дуге циклоиды $QRS$, то время каждого его размаха одно и то же и не зависит от величины размаха.*

На касательную $TW$ (фиг. 92) к циклоиде опусти перпендикуляр $CX$ и вообрази прямую $CT$. Центростремительная сила, действующая на тело $T$, которая пропорциональна расстоянию $CT$ и направлена по этой прямой, разлагается (след. II законов) на силы, направленные по $CX$ и $TX$. Первая из этих сил, как направленная прямо по нити $PT$, лишь натягивает эту нить и вполне уничтожается ее сопротивлением, не производя более никакого действия. Вторая же сила $TX$, действующая на тело по касательной к циклоиде в сторону к $X$, ускоряет движение тела по этой кривой. Очевидно, что ускорение (приращение скорости)[105] тела в продолжение каждого отдельного, весьма малого, промежутка времени будет пропорционально этой ускоряющей силе, т. е. длине $TX$. Но так как

$$TX : TW = WV : CV,$$

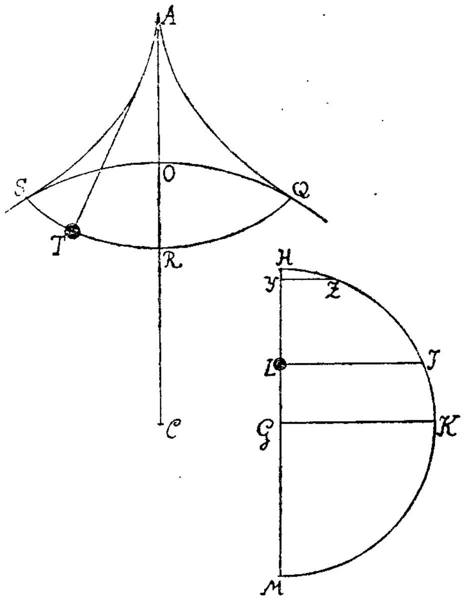
последнее же отношение постоянное, ибо $CV$ и $WV$ заданы, то сказанная сила пропорциональна $TW$, т. е. пропорциональна (предл. XLIX, след. 1) длине дуги $TR$ циклоиды. Следовательно, для двух маятников $APT$ и $Apt$, отклоненных от отвеса на различные величины и пущенных одновременно, приращения скорости будут постоянно пропорциональны дугам $TR$ и $tR$, которые им остается описать до вершины $R$ циклоиды. Но весьма малые пути, описанные в тот же, весьма малый, промежуток времени при самом начале движения, пропорциональны приращениям скорости за этот промежуток времени, т. е. пропорциональны полным начальным отклонениям маятников от вершины $R$, поэтому и остающиеся по прошествии этого промежутка отклонения будут пропорциональны начальным. Приращения скорости в течение второго такого же промежутка времени, пропорциональные этим отклонениям, т. е. остающимся до вершины дугам, будут, следовательно, пропорциональны начальным дугам, значит и пути, пройденные в продолжение второго промежутка времени, и остающиеся после того дуги будут пропорциональны начальным отклонениям и т. д. во все время движения.

Итак, приращения скорости в отдельные, весьма малые, равные между собою промежутки времени, а следовательно, и самая скорость, из этих приращений образуемая, а также и длины пути как пройденные за все рассматриваемое время, так и остающиеся до вершины $R$ циклоиды, относятся друг к другу, как начальные отклонения. Поэтому остающиеся дуги, как находящиеся в постоянном отношении, исчезают одновременно, т. е. оба маятника одновременно проходят через отвесную линию $AR$. Если движение обратить, то восхождение маятников по той же дуге циклоиды от низшего их положения $R$ будет в тех же самых местах замедляться теми же самыми силами, которыми их нисхождение ускорялось; ясно поэтому, что скорости

[105] Здесь слово «acceleratio» употреблено так, что его можно было бы перевести и словом «ускорение» в его теперешнем значении, именно сказано: «manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo $TX$»..., т. е. «очевидно, что ускорение тела, пропорциональное этой ускоряющей силе, будет в отдельные моменты пропорционально длине $TX$». Но из конца доказательства видно, что и здесь, как и везде в «Началах», слову «acceleratio» придавалось значение — приращение скорости, и слову «momentum» — не момент, а весьма малый промежуток времени.

как нисходящего, так и восходящего движения, при тех же отстояниях от вершины, для каждого маятника равны, значит равны и продолжительности этих движений; а так как обе части циклоиды $RS$ и $RQ$, расположенные по обе стороны от отвеса, подобны и равны, то оба маятника будут совершать как свои полные, так и половинные размахи в одинаковое время.

*Следствие.* Сила, ускоряющая в каком-либо месте $T$ тело при его движении по циклоиде, так относится к полному весу[106] этого тела в верхнем его положении $S$ или $Q$, как дуга циклоиды $TR$ к ее полной длине $SR$ или $QR$.



Фиг. 93.

### Предложение LII. Задача XXXIV

*Определить скорости маятников в каждом месте и времена как полных размахов, так и частей их.*

Произвольною точкою $G$ (фиг. 93), как центром, и радиусом $GH$, равным длине дуги $RS$ циклоиды, опиши полукруг, разделяемый радиусом $GK$ пополам, и пусть к центру $G$ притягивает такая центростремительная сила, пропорциональная расстоянию от центра, которая на периметре $HJK$ равна силе, действующей на поверхности шара $OS$ по направлению к его центру. Пусть одновременно с тем как маятник $T$ пускается из верхнего своего положения $S$, другое тело $L$ падает из $H$ в $G$. Так как действующие на маятник и на тело $L$ силы пропорциональны отклонениям $TR$ и $LG$ и в начале равны, то когда $TR$ и $LG$ равны, и силы в местах $T$ и $L$ равны. Отсюда следует, что оба тела пройдут в одинаковое время после начала движения одинаковые длины $ST$ и $HL$; находясь постоянно и в дальнейшем под действием равных сил, они все время будут двигаться одинаково, описывая равной длины пути.

---

[106] Здесь под словом «вес тела» разумеется та сила, с которою оно притягивается к центру $C$.

Вследствие этого (предл. XXXVIII) время, в продолжение которого маятник опишет дугу $ST$, так относится ко времени полного его размаха, как дуга $HJ$, пропорциональная времени, в продолжение коего тело $H$ переходит в $L$, относится к полуокружности $HKM$, которая пропорциональна времени перехода тела из $H$ в $M$.

Точно так же скорость маятника в точке $T$ так относится к его скорости в низшей точке $R$ (иначе — скорость тела $H$ в точке $L$ относится к его скорости в точке $G$, т. е. весьма малое приращение длины $HL$ к весьма малому приращению длины $HG$, причем оба они соответствуют одинаковым весьма малым приращениям дуг $HJ$ и $HK$, возрастающих равномерно), как ордината $LJ$ к радиусу $GK$, т. е. как

$$\sqrt{SR^2 - TR^2} : SR.$$

Но так как при каких угодно размахах в равные времена описываются дуги, пропорциональные полной величине размахов, то, на основании приведенного выше при заданном времени, найдутся скорости и описанные дуги при какой угодно величине размахов. Это и требовалось прежде всего определить.

Положим теперь, что маятники колеблются по различным циклоидам, описанным около различных шаров, причем абсолютная сила центров также различная; тогда, если обозначить через $V$ — абсолютную силу[107] которого-нибудь из шаров $QOS$, то ускоряющая сила, действующая на маятник на поверхности этого шара, направленная к его центру, будет пропорциональна расстоянию $CO$ тела до центра и абсолютной силе шара $V$, т. е. произведению $V \cdot CO$. Поэтому отрезочек $HY$, описываемый в продолжение постоянного промежутка времени под действием ускорительной силы $V \cdot CO$, будет пропорционален этой силе, и если восставить перпендикуляр $YZ$, пересекающий окружность в $Z$, то $HZ$ представит этот заданный промежуток времени. Но весьма малая дуга $HZ$ пропорциональна

$$\sqrt{GH \cdot HY},$$

т. е.

$$\sqrt{GH \cdot CO \cdot V},$$

[107] Это есть чуть ли не единственное место в «Началах», где вводится в вычисление абсолютная сила центра, т. е. величина аналогичная величине $\mu^2$ в теперешней формуле

$$F = \mu^2 r,$$

когда хотят написать выражение силы, пропорциональной расстоянию $r$. Обыкновенно Ньютон обходил введение этого множителя тем, что сравнивал рассматриваемую силу с такою, под действием которой тело описывало бы равномерным движением около заданного центра круг данного радиуса в известное время.

поэтому время полного размаха по циклоиде $QRS$ (так как оно пропорционально полуокружности $HKM$, представляющей это время, и обратно пропорционально $HZ$, представляющей постоянный промежуток) будет прямо пропорционально $GH$ и обратно пропорционально

$$\sqrt{GH \cdot CO \cdot V}$$

или по равенству $GH$ и $SR$ оно пропорционально

$$\sqrt{\frac{SR}{CO \cdot V}}$$

или (предл. L)

$$\sqrt{\frac{AR}{AC \cdot V}}.$$

Таким образом времена качаний маятников по любым циклоидам и для любых шаров, с какими угодно абсолютными притягательными силами, прямо пропорциональны корням квадратным из длин нитей подвеса и обратно пропорциональны корням квадратным расстояний точек подвеса до центров шаров и их абсолютной силе.

*Следствие 1.* На основании сказанного могут быть сравниваемы времена качаний, падения и обращения тел. Так, если взять диаметр колеса, производящего циклоиду внутри шара, равным радиусу шара, то эта циклоида обратится в прямую линию, проходящую через центр шара, и колебание превратится в прямолинейное падение к центру и затем поднятие по этой же прямой от центра. Следовательно, можно найти как время падения из любого места до центра шара, так и равное ему время описания четверти окружности на любом расстоянии от центра шара, при равномерном около него обращении тела; а именно, это время (по изложенному во втором случае) так относится к времени полуразмаха по какой-либо циклоиде $QRS$, как

$$1 : \sqrt{\frac{AR}{AC}}.$$

*Следствие 2.* Отсюда же следуют и выводы, данные *Вренном* и *Гюйгенсом* относительно обыкновенной циклоиды. Ибо, если увеличивать диаметр шара до бесконечности, то его поверхность обратится в плоскость, и центростремительная сила будет действовать повсюду одинаково и перпендикулярно к этой плоскости, и наша циклоида превратится в обыкновенную. В этом случае длина дуги циклоиды, заключенная между сказанною плоскостью и производящею точкою, равна учетверенному синусу верзусу половины дуги обвода колеса, заключенной между этою плоскостью и производящею точкой, как это нашел *Вренн.*

Маятник, подвешенный между двумя такими циклоидами, колеблется по циклоиде, им равной и подобной, в равные времена независимо от величины размахов, как это доказал Гюйгенс. Вместе с тем высота падения тяжелого тела в продолжение одного размаха будет та, которая найдена Гюйгенсом.[108]

---

108 Чтобы получить теперешнюю формулу для циклоидального маятника, т. е.

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

где $l$ — длина маятника, т. е. $l = AR$, и $g$ — ускорение силы тяжести, необходимо сопоставить сказанное здесь с заключительною частью доказательства, где приведено выражение

$$\sqrt{\frac{AR}{AC \cdot V}},$$

коему время размаха пропорционально, а также принять во внимание, что это время пропорционально полуокружности $HMK$ и обратно пропорционально $HZ$.

В самом деле, возьмем бесконечно малый промежуток времени $\tau = \frac{1}{n}$ секунды, тогда будет

$$T : \tau = HKM : HZ = \pi \cdot GH : \sqrt{2GH \cdot HY} = \pi \sqrt{\frac{GH}{2HY}}.$$

Но $GH = SR$, и по следствию предложения L будет

$$SR : OC = AR : AC = GH : OC,$$

т. е.

$$GH = \frac{OC \cdot AR}{AC}$$

и, по подстановке,

$$T = \pi \cdot \tau \cdot \sqrt{\frac{OC}{2AC} \cdot \frac{AR}{HY}}.$$

Но $HY$ есть путь, пройденный в промежуток $\tau$ под действием силы, пропорциональной $CO \cdot V$; пусть ускорение этой силы есть $\varphi$, значит

$$\varphi = k \cdot V \cdot OC,$$

где $k$ — постоянный коэффициент, причем в пределе, когда $OC$ неопределенно возрастает, то $\varphi = g$, где $g$ есть ускорение силы тяжести. Таким образом будет

$$HY = \frac{1}{2} \varphi \cdot \tau^2 = \frac{1}{2} k \cdot V \cdot OC \cdot \tau^2$$

и, подставляя, получим

$$T = \pi \sqrt{\frac{AC}{OC} \cdot \frac{AR}{k \cdot V \cdot OC}}$$

в пределе будет

$$\frac{AC}{OC} = 1$$

в

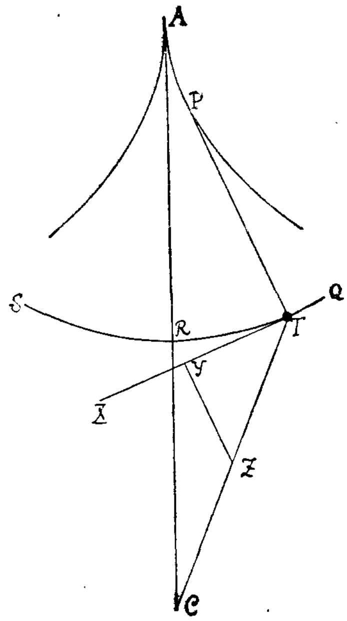
$$k \cdot V \cdot OC = g,$$

следовательно

$$T = \pi \sqrt{\frac{AR}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Это и есть формула Гюйгенса, написанная теперешними обозначениями.

Доказанные же нами предложения более близко соответствуют истинному строению Земли; так, когда колесо катится по большому ее кругу, гвозди на его ободе описывают наружные циклоиды. Маятники, чтобы все их колебания были изохронны, должны быть подвешены внутри Земли, в рудниках и пещерах, и должны колебаться по внутренним циклоидам, ибо тяготение (как будет показано в книге третьей) при возвышении над поверхностью Земли убывает пропорционально квадратам расстояний, под поверхностью же лишь пропорционально расстоянию.



Фиг. 94.

### Предложение LIII. Задача XXXV

*Допуская квадратуру кривых, найти силы, под действием которых тела совершают изохронные колебания по заданной кривой.*

Пусть тело колеблется по какой-либо заданной кривой $STRQ$ (фиг. 94), ось коей $AR$ проходит через центр сил $C$. Проведя касательную $TX$ к кривой в точке $T$, занимаемой телом, откладываем по ней длину $TY$, равную длине дуги $TR$. Длина же этой дуги[109] находится по обыкновенным способам при помощи квадратуры кривых. Из точки $Y$ проводится перпендикуляр $YZ$ к касательной; проведя $CT$, пересекающую этот перпендикуляр в точке $Z$, получим длину $TZ$, пропорциональную центростремительной силе.

---

[109] Уже в упомянутом примечании 103 сочинения: «Analysis» и т. д., дан способ нахождения длины дуг кривых, равносильный разложению в ряд выражения производной дуги по степеням абсциссы или другой переменной независимой, и интегрирования членов этого ряда. В сочинении же: «Methodus Fluxionum», дается в сущности теперешний способ, основанный на интегрировании выражения

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

и поясняется рядом примеров (Prob. XII. Determinare curvarum longitudinem — определить длину кривых). Когда было написано это сочинение, точных указаний нет, хотя известно, что уже в 1666 г., т. е. за 20 лет до издания «Начал», Ньютон владел методом флюксий. Его трактат о квадратуре кривых был издан в 1704 г. Метод же флюксий — лишь в 1736 г., т. е. через 9 лет после его смерти. Но в введении к этому сочинению сказано: «я счел не лишним составить эту книгу для студентов математиков» (tyronum geometrarum), так что возможно, что это сочинение и много раньше было известно ученикам Ньютона, ибо иначе выражение «обыкновенными способами» не могло быть понятным читателям того времени.

Ибо, если силу, с которою тело $T$ притягивается к $C$, представить длиною $TZ$, ей пропорциональной, то эта сила может быть разложена на две, $TY$ и $YZ$, из коих $YZ$, действуя на тело по направлению нити $PT$, не изменяет ни в чем его движения, другая же сила $TY$ целиком или ускоряет, или замедляет, его движение по кривой. Так как эта сила пропорциональна отклонению $TR$, то и ускорения или замедления при двух разной величины размахах качаний будут пропорциональны этим отклонениям, и значит, обе эти дуги будут описываться в одинаковое время. Тела же, описывающие одновременно пропорциональные части целого, опишут и целое в одинаковое время.

*Следствие 1.* Если тело $T$ (фиг. 95), висящее на прямолинейной нити, из центра $A$ описывает дугу круга $STRQ$ и находится под действием некоторой силы, направленной вниз и так относящейся к постоянной силе тяжести, как дуга $TR$ к ее синусу $TN$, то времена размахов будут постоянны. По параллельности $TZ$ и $AR$ треугольники $ATN$ и $ZTY$ подобны, поэтому

$$TZ : AT = TY : TN$$

т. е. если представить постоянную силу тяжести заданною длиною $AT$, то сила $TZ$, производящая изохронные колебания, будет так относиться к силе тяжести $AT$, как дуга $AR$, равная $TY$, относится к своему синусу $TN$.

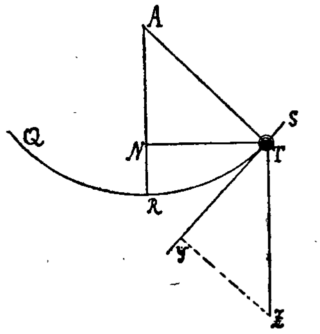
*Следствие 2.* Вследствие этого, в часах, если бы силы приложенные от механизма к маятнику так бы слагались с силою тяжести, что полная направленная вниз сила была бы пропорциональна величине $\frac{TR \cdot AR}{TN}$, то колебания маятника были бы изохронны.

### Предложение LIV. Задача XXXVI

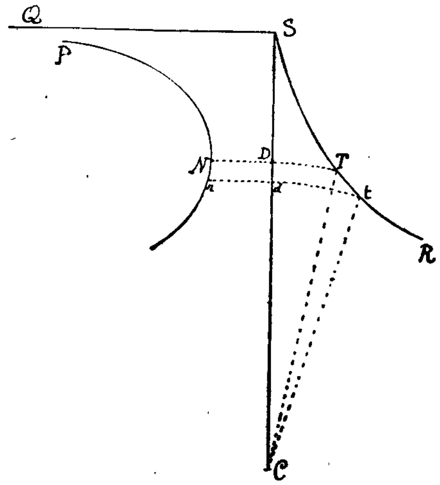
*Допуская квадратуру криволинейных фигур, найти время восходящего или нисходящего движения тела под действием какой угодно центростремительной силы по какой угодно кривой, расположенной в плоскости, проходящей через центр сил.*

Пусть тело опускается из какого-нибудь места $S$ (фиг. 96) по какой-либо кривой $STtR$, лежащей в плоскости, проходящей через центр сил $C$. Проведи $CS$ и раздели ее на бесконечное множество равных частей, и пусть $Dd$ есть одна из этих частей. Точкою $C$, как центром, и радиусами $CD$ и $Cd$ опиши круги, пересекающие кривую $STtR$ в точках $T$ и $t$. По известному закону центростремительной силы и расстоянию $CS$, с которого тело начинает падать, найдется его скорость в любом удалении $CT$ от центра (предл. XXXIX)

Время же, в продолжение которого тело пройдет бесконечно малый путь $Tt$, пропорционально длине этого отрезочка, т. е. секансу угла $tTC$, и обратно пропорционально скорости. Пусть ордината $DN$, перпендикулярная к прямой $CS$ в точке $D$, пропорциональна этому времени, тогда, так как $Dd$ постоянна, прямоугольник $Dd \cdot DN$, т. е. площадь $DNnd$, будет также пропорциональна этому времени; следовательно, если $PNn$ есть та кривая, на которой постоянно лежит точка $N$ и которая имеет своею асимптотою прямую $SQ$, перпендикулярную к прямой $CS$, то площадь ее $SQPND$ будет пропорцио-




Фиг. 95



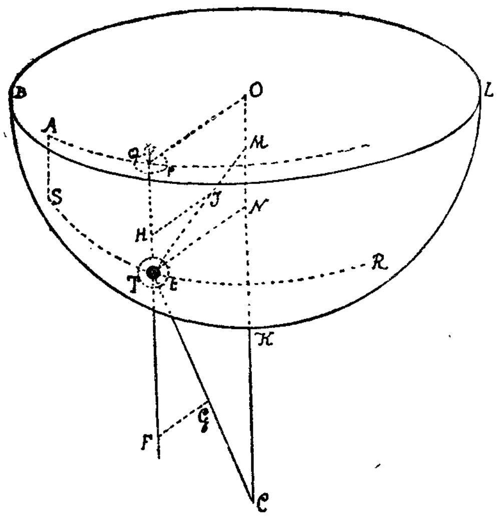

Фиг. 96.

нальна времени, в продолжение которого тело, опускаясь, пройдет по кривой путь $ST$, и значит, когда эта площадь будет найдена, то найдется и время.

### Предложение LV. Теорема XIX

*Если тело движется по какой-либо поверхности вращения, ось которой проходит через центр сил, и из места тела опускается на ось перпендикуляр, которому через какую-либо постоянную точку оси проводится равная и параллельная прямая, то я утверждаю, что эта прямая описывает площадь, пропорциональную времени.*

Пусть $BKL$ (фиг. 97) есть поверхность вращения, $T$ — тело, по ней обращающееся, $STR$ — траектория, которую оно по ней описывает, $S$ — начало траектории, $OMK$ — ось поверхности, $TN$ — опущенный из места тела на ось перпендикуляр, $OP$ — равная и параллельная ему прямая, проведенная рез данную на оси точку $O$, $AP$ — проекция траектории, описываемая на плоскости $AOP$ точкою $P$, $A$ — начало этой проекции, соответствующее точке $S$, $TC$ — прямая, проведенная из тела к центру, $TG$ — длина, пропорциональная центростремительной силе, $TM$ — нормаль к поверхности, $TJ$ — длина, пропорциональная давлению, производимому телом на поверхность, а значит и обратно, поверхностью на тело в направлении к $M$, $PTF$ — прямая, параллельная оси, проведенная через тело, $JH$ и $FG$ — перпендикуляры, опущенные на эту параллельную. Я утверждаю, что описанная от начала движения радиусом $OP$ площадь $PAO$ пропорциональна времени.




Фиг. 97.

Сила $TG$ разлагается (по след. II законов) на силы $TF$ и $FG$, и сила $TJ$ — на силы $TH$ и $JH$. Силы $TF$ и $FH$, действующие по линии $PF$ перпендикулярно плоскости $AOP$, изменяют лишь движение тела, перпендикулярное этой плоскости. Следовательно, его движение параллельно плоскости $AOP$, т. е. движение точки $P$, описывающей проекцию траектории $AP$ в этой плоскости, остается таким, как если бы силы $TF$ и $HT$ были уничтожены и на тело действовали бы только силы $FG$ и $HJ$; значит, это движение таково, как будто бы само тело находилось в плоскости $AOP$ под действием центростремительной силы, направленной к центру $O$ и равной сумме сил $FG$ и $HJ$, и описывало бы кривую $AP$. Но под действием такой силы описываются площади, пропорциональные времени (I).

*Следствие.* На основании такого же рассуждения можно доказать, что если тело, находящееся под действием сил, направленных к двум или нескольким центрам, лежащим на одной прямой $OC$, описывает какую-либо кривую $ST$, то площадь $AOP$ пропорциональна времени.

### Предложение LVI. Задача XXXVII

*Допуская квадратуру криволинейных фигур, требуется найти траекторию, описываемую телом по поверхности вращения, когда оно пущено из заданного на ней места с данною скоростью по данному напра-*

*влению и когда на него действует по заданному закону центростремительная сила, направленная к центру, лежащему на оси вращения.*

Сохранив построения и обозначения предыдущего предложения, положим, что тело $T$ (фиг. 97) выходит из заданной точки $S$ по направлению касательной к искомой траектории $STR$, проекция которой на плоскости $AOP$ есть $AP$. По известной скорости тела в расстоянии $SC$ найдется его скорость в любом расстоянии $TC$. В течение весьма малого постоянного промежутка времени тело пройдет с этою скоростью весьма малую длину $Tt$ по своей траектории. Пусть $Pp$ есть проекция длины $Tt$ на плоскость $AOP$. Соедини $Op$, и пусть эллипс $pQ$ есть проекция на плоскость $AOP$ кружочка, описанного из точки $T$, как центра, радиусом $Tt$ по поверхности. Так как величина и расстояние $TN$ или $OP$ этого кружочка от оси $OC$ известны, то и эллипс $pQ$ будет известен по своему виду и величине, а также будет известно и положение прямой $OP$. Так как площадь $POp$ должна быть пропорциональна времени и, следовательно, находится по заданному времени, то будет известен угол $POp$, и следовательно, найдется точка $p$ пересечения эллипса и прямой $Op$, а также и угол $OPp$, под которым проекция траектории $APp$ пересекает прямую $OP$. Отсюда (сообразуясь с предл. XLI и его след. 2) легко видеть способ определения кривой $APp$. Затем из отдельных точек проекции восставляются перпендикуляры, которые своим пересечением с поверхностью и дадут точки траектории.[110]

---

[110] Описанный в этом доказательстве способ для приведения задачи к квадратурам равносилен теперешнему, но изложен настолько своеобразно, что этого сразу не видно. При наших теперешних обозначениях рассуждение Ньютона может быть изложено так.

Ось вращения $OC$ принимаем за ось $Z$-ов, плоскость, к ней перпендикулярную — за плоскость $r\,\theta$, прямую $OA$ — за полярную ось. Тогда поверхность задается уравнением вида

$$z = f(r) \qquad (1)$$

где $f(r)$ есть заданная функция переменной

$$r = OP.$$

По закону живых сил будет

$$v^2 = v_0^2 + F(\rho)$$

где $F(\rho)$ есть известная функция расстояния $CT = \rho$ тела $T$ до центра $C$; составление такой функции показано в предложении XL. Но полагая $OC = a$, будет

$$\rho^2 = (z - a)^2 + r^2.$$

Для точек, лежащих на данной поверхности $z = f(r)$, $\rho = f_1(r)$, и $v^2$ будет функцией только $r$, пусть

$$v^2 = \omega(r) \qquad (2)$$

С другой стороны, по закону площадей

$$r^2\, d\theta = c\, dt \qquad (3)$$

где $c$ — постоянная площадей.

Наконец, «отрезочек пути $Tt$ на поверхности», при нашем обозначении, есть дифференциал дуги $ds$ траектории, равный $v \cdot dt$. Его проекция $Pp$ на плоскости $AOP$ есть

$$Pp^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

## ОТДЕЛ XI

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ, ВЗАИМНО ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫМИ СИЛАМИ

До сих пор я излагал учение о движении тел, притягиваемых к неподвижному центру, каковое едва ли существует в природе. Притяжения всегда происходят к телам, и по третьему закону действия тел притягивающих и притягиваемых всегда взаимны и равны; поэтому, если тел два, то ни притягивающее, ни притягиваемое не могут оставаться в покое, но по следствию IV законов оба, как бы притягиваясь к своему общему центру тяжести, будут обращаться около него. Если же тел несколько, то, будучи притягиваемы одним каким-либо телом, и они его притягивают, если же, кроме того, все эти тела притягиваются взаимно, то они должны так двигаться друг относительно друга, что общий их центр тяжести или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно.

По этой причине я перехожу теперь к изложению учения о движении тел, притягивающихся взаимно, рассматривая центростремительную силу как притяжение, хотя следовало бы, если выражаться физически, именовать ее более правильно напором. Но теперь мы занимаемся математикой и, оставляя в стороне физические споры, будем пользоваться более обычным названием, чтобы быть понятнее читателям математикам.

---

значит

$$Tt^2 = ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \{[f'(r)]^2 + 1\}\,dr^2 + r^2\,d\theta^2 = f_2(r)\cdot dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

причем функция $f_2(r)$ будет известна.

Таким образом, на основании равенства

$$ds^2 = v^2\,dt^2$$

получится

$$f_2(r)\,dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \omega(r)\,dt^2. \tag{4}$$

Это и есть «маленький эллипс» на плоскости $AOP$; искать его пересечение $p$ с прямою $Op$ так, чтобы площадь $POp$ была пропорциональна времени,—значит исключить из уравнений (3) и (4) величину $dt$, и получится

$$f_2(r)\,dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \omega(r)\cdot\frac{c^2}{r^4}\cdot d\theta^2$$

или

$$f_2(r)\,dr^2 = \left(\omega(r)\,\frac{c^2}{r^4} - r^2\right)d\theta^2$$

т. е. получится выражение вида

$$d\theta = \varphi(r)\cdot dr$$

и «квадратура» даст уравнение проекции траектории на плоскости $AOP$.

### Предложение LVII. Теорема XX

*Два взаимно притягивающихся тела описывают и около своего общего центра тяжести и друг около друга подобные траектории.*

Действительно, расстояния тел от их общего центра тяжести обратно пропорциональны их массам, следовательно, отношение этих расстояний постоянно, значит постоянно и отношение каждого из них к полному расстоянию между телами. Кроме того, эти расстояния обращаются около своего общего конца с одинаковым угловым движением, вследствие чего, не наклоняясь друг к другу, располагаются постоянно по одной прямой.

Прямые же линии, отношение длин коих постоянно и которые поворачиваются около своих концов на равные углы, описывают вокруг этих концов на плоскостях, находящихся с ними вместе в покое или движущихся без вращения, подобные фигуры. Следовательно, фигуры, описанные сказанными расстояниями, подобны между собою.

### Предложение LVIII. Теорема XXI

*Если два тела притягиваются взаимно с какою бы то ни было силою и поэтому обращаются около своего общего центра тяжести, то я утверждаю, что под действием такой же силы каждое тело может описывать вокруг другого неподвижного фигуру, равную и подобную тем, которые они описывают друг около друга.*

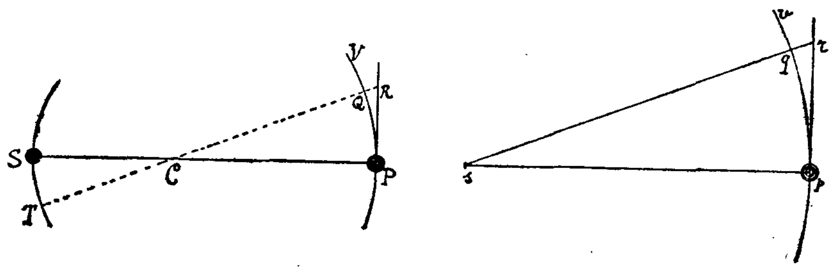
Пусть тела $S$ и $P$ (фиг. 98) обращаются около своего общего центра тяжести $C$, идя от $S$ к $T$ и от $P$ к $Q$.

Из произвольно взятой постоянной точки $s$ проводим прямые $sp$ и $sq$, равные и параллельные $ST$ и $TQ$; кривая $pqv$, описываемая точкою $p$ при ее обращении, будет равна и подобна кривым, описываемым телами $S$ и $P$ друг около друга, и вследствие этого подобна кривым $ST$ и $PQV$, описываемым этими телами около их общего центра тяжести $C$ (предл. LVII); это происходит потому, что отношения $SC$, $CP$, $SP$, $sp$ друг к другу остаются постоянными.

*Случай 1.* Центр тяжести $C$ системы, по следствию IV законов, или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно. Положим сперва, что он в покое. Вообрази, что в точках $s$ и $p$ помещены два тела, одно неподвижное в $s$ и другое подвижное $p$, соответственно равные и подобные телам $S$ и $P$. Пусть прямые $PR$ и $pr$ касаются кривых $PQ$ и $pq$ в точках $P$ и $p$ и прямые $CQ$ и $sq$ продолжены до встречи с ними соответственно в $R$ и $r$. По подобию фигур $CPRQ$ и $sprq$ будет

$$RQ : rq = CP : sp$$

т. е. отрезочки $RQ$ и $rq$ находятся в постоянном отношении. Поэтому, если бы та ускорительная сила,[111] с которою тело $P$ притягивалось к телу $S$, а следовательно, и к промежуточному центру $C$, находилась бы в этом же отношении к той ускорительной силе, с которою тело $p$ притягивается к $s$, то эти силы в равные, весьма малые, промежутки времени отклонили бы тела $P$ и $p$ от касательных $PR$ и $pr$ соответственно на величины $RQ$ и $rq$, пропорциональные силам, и следовательно, под действием такой силы тело $p$ обращалось бы по кривой $pqv$, подобной кривой $PQV$, по которой обращается тело $P$ под действием пропорциональной ей ускорительной силы, и времена обращений обоих тел были бы при этом одинаковы.




Фиг. 98.

Но так как эти силы не находятся в отношении $CP : sp$, а в виду равенства и подобия тел $s$ и $p$ телам $S$ и $P$ и равенства расстояний $SP$ и $sp$, и силы, действующие на тела $p$ и $P$, между собою равны, то в равные промежутки времени оба эти тела будут отклоняться от касательных на равные величины, и поэтому, чтобы тело $p$ отклонилось на бóльшую величину $rq$, необходимо и бóльшее время в отношении корней квадратных самих отклонений (лем. X), ибо при самом начале движения пространства пропорциональны квадрату времени. Положив, что скорость тела $p$ относится к скорости тела $P$, как

$$\sqrt{sp} : \sqrt{CP}$$

111 В тексте сказано просто «vires» — «силы», но так как под этим словом здесь разумеются те ускорения, которые тела $P$ и $p$ под действием сил получают, то и добавлено слово «ускорительные», чтобы быть ближе к тексту, нежели заменив слово «силы» словами «сообщаемые телам ускорения», как это бы следовало при теперешней терминологии.

т. е. как времена, которые находятся в этом же отношении, получим описанные дуги $pq$ и $PQ$, пропорциональные самим расстояниям $sp$ и $CP$. Таким образом тела $P$ и $p$, притягиваемые равными силами, описывают около неподвижных центров $C$ и $s$ подобные фигуры $IQV$ и $pqv$, причем последняя подобна и равна фигуре, описываемой телом $P$ вокруг неподвижного тела $S$.

*Случай 2*. Положим теперь, что центр тяжести $C$ системы тел перемещается равномерно и прямолинейно вместе с тем пространством, в котором тела движутся; тогда (след. VI законов) все движения в таком пространстве будут происходить так же, как и раньше, следовательно тела будут описывать друг около друга такие же кривые, как и раньше, и значит, эти фигуры будут равны и подобны фигуре $pqv$.

*Следствие 1*. Два тела, притягивающиеся пропорционально расстоянию, описывают (предл. X) около центра тяжести системы и друг около друга одноцентренные эллипсы, и обратно: если телами описываются такие кривые, то силы пропорциональны расстоянию.

*Следствие 2*. Два тела, притягивающиеся с силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния между ними, описывают (XI, XII, XIII) и около общего центра тяжести системы и друг около друга конические сечения, имеющие своим фокусом ту точку, около которой кривая описывается, и обратно: если телами описываются такие кривые, то силы обратно пропорциональны квадратам расстояний.

*Следствие 3*. Два тела, обращающиеся (под действием какой угодно силы) около общего центра тяжести, описывают радиусами, проведенными как к этому центру, так и друг к другу, площади, пропорциональные временам.

### Предложение LIX. Теорема XXII

*Время обращения каждого из двух тел $S$ и $P$ около их общего центра тяжести находится в отношении, равном корню квадратному из отношения массы $S$ к сумме масс $S+P$ ко времени обращения одного из них $P$ вокруг другого $S$, принимаемого за неподвижное, по кривой, равной и подобной той, которую тела описывают друг около друга.*

Из доказательства предыдущего предложения следует, что отношение времен, в продолжение которых описываются произвольные, весьма малые, подобные дуги $PQ$ и $pq$, равно корню квадратному из отношения расстояний $CP:SP$ или $CP$ к $sp$, т. е. равно

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}}.$$

Отсюда следует, что и времена описания полных кривых находятся в том же постоянном отношении, т. е.

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}}.$$

### Предложение LX. Теорема XXIII

*Если два тела $S$ и $P$, притягиваясь с силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния, обращаются около общего центра тяжести, то большая ось эллипса, описываемого одним из этих тел $P$ вокруг другого $S$, находится к большой оси того эллипса, который мог бы быть описан тем же телом $P$ около тела $S$, остающегося неподвижным, в отношении, равном отношению суммы масс $(S+P)$ к первому из двух средних пропорциональных между этою суммою и массою тела $S$ (т. е. $\sqrt[3]{S(S+P)^2}$, иначе — сказанное отношение равно корню кубичному*[112] *из отношения суммы масс к массе $S$).*

Если бы описываемые эллипсы были между собою равны, то, по предыдущей теореме, времена обращения находились бы в отношении, равном

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}}$$

поэтому, если уменьшить в этом отношении время оборота по второму эллипсу, то эллипсы сделаются равными, но (XV) большая ось эллипса уменьшится при этом в отношении, составляющем степень $\frac{2}{3}$ предыдущего, т. е. в отношении

$$\sqrt[3]{\frac{S}{S+P}}$$

следовательно эта ось будет относиться к большой оси первого эллипса, как

$$\sqrt[3]{S(S+P)^2} : (S+P)$$

и наоборот, большая ось эллипса, описываемого около подвижного тела, так относится к большой оси описываемой около неподвижного, как

$$(S+P) : \sqrt[3]{S(S+P)^2} = \sqrt[3]{S+P} : \sqrt[3]{S}.$$

---

112 Если составить так называемую непрерывную пропорцию

$$(S+P) : X = X : Y = Y : S$$

то $X$ есть первое из двух средних пропорциональных между $S+P$ и $S$, $Y$ — второе.

Из этих пропорций следует

$$X^2 = Y \cdot (S+P) \quad \text{и} \quad Y^2 = X \cdot S.$$

Откуда

$$X^3 = S \cdot (S+P)^2$$

или

$$X = \sqrt[3]{S \cdot (S+P)^2}.$$

### Предложение LXI. Теорема XXIV

*Если два тела, притягивающиеся взаимно с какою угодно силою, но не подверженные действию никаких других сил, движутся как бы то ни было, то их движение будет то же самое, если они, не действуя друг на друга, притягивались бы третьим телом, находящимся в общем их центре тяжести, с такою же силою. Зависимость этой притягательной к центру тяжести силы от расстояния до него будет такою же, как и первой силы от полного расстояния между телами.*

Притяжение этих двух тел друг другом направлено по прямой, их соединяющей, следовательно к общему центру тяжести их, т. е. как будто бы оно происходило от промежуточного тела.

Так как отношение расстояний каждого тела до их общего центра тяжести к расстоянию между ними остается постоянным, то будет оставаться постоянным и отношение любых степеней этих расстояний; а также и отношение какого угодно количества, составленного из одного из этих расстояний, и заданных величин к количеству, совершенно так же составленному из второго расстояния и величин, также заданных и находящихся к предыдущим в сказанном постоянном отношении этих расстояний. Поэтому, если одно тело будет притягиваться другим прямо или обратно пропорционально расстоянию между ними, или вообще пропорционально какой-либо степени расстояния или же, наконец, какому-либо иному количеству, как бы то ни было выводимому из заданных величин и этого растояния, то и та сила, с которою то же тело притягивается к общему центру тяжести, будет или прямо, или обратно пропорциональна расстоянию притягиваемого тела до общего центра тяжести, или пропорциональна той же степени этого расстояния или же, наконец, количеству, выводимому, подобно вышеупомянутому, из этого расстояния и заданных величин. Это и значит, что зависимость притягательной силы от расстояния в обоих случаях одна и та же.

### Предложение LXII. Задача XXXVIII

*Определить движение двух тел, притягивающихся обратно пропорционально квадрату расстояния между ними и пущенных из заданных мест без скорости.*

По предыдущей теореме оба тела будут двигаться так, как будто бы они притягивались третьим, находящимся в общем центре тяжести, который по предположению в начале находился в покое и, следовательно (след. IV законов), и все время будет оставаться в покое. Таким образом стоит только определить движение тел (зад. XXV), притягиваемых этим центром, то получится и движение тел, притягивающихся круг к другу.

### Предложение LXIII. Задача XXXIX

*Определить движение двух тел, притягивающихся обратно пропорционально квадрату расстояния и пущенных из заданных мест по данным направлениям с заданными скоростями.*

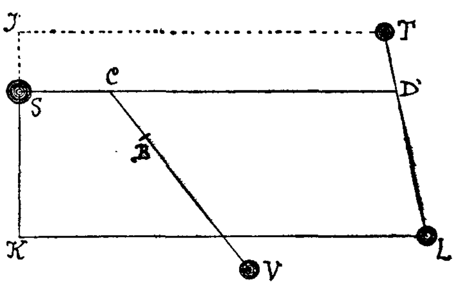
По известным начальным количествам движения тел найдется и равномерное движение их общего центра тяжести, а значит, и равномерное и прямолинейное движение пространства, одинаковое с движением сказанного центра тяжести, а также и начальные скорости каждого из тел относительно этого пространства. Последующее затем движение тел будет происходить в этом подвижном пространстве (след. V законов и теор. XXIV) так же, как если бы оно было неподвижно и тела притягивались бы не друг другом, а третьим телом, находящимся в центре тяжести. Следовательно, движение каждого тела в отдельности в этом подвижном пространстве определится, по задачам IX и XXVI, как движение тела, пущенного из заданного места по данному направлению с заданною скоростью и находящегося под действием центростремительной силы, направленной к сказанному центру. К этому движению надо затем приложить выше найденное равномерное движение системы, состоящей из подвижного пространства и тел, в нем обращающихся, после чего и получится абсолютное движение тел в пространстве неподвижном.

### Предложение LXIV. Задача XL

*Требуется определить движение тел, притягивающихся взаимно с силами, пропорциональными расстояниям.*

Положим сперва, что тел два $T$ и $L$ (фиг. 99) и центр тяжести их $D$; каждое из них описывает около этого центра тяжести эллипс с центром в точке $D$, размеры этого эллипса определяются по предложению XXI.

Пусть третье тело $S$ притягивает первые два $T$ и $L$ с ускорительными силами $ST$ и $SL$ и взаимно притягивается ими. Сила $ST$ разлагается (след. II законов) на силы $SD$ и $DT$, и сила $SL$ — на силы $SD$ и $DL$. Силы $DT$ и $DL$ пропорциональны их сумме $TL$, т. е. той силе, с которою притягиваются друг к другу тела $T$ и $L$. Приложив к силе притяжения тела $T$ телом $L$ составляющую $DT$ его притяжения телом $S$ и к силе притяжения тела $L$ телом $T$ — составляющую $DL$ его притяжения телом $S$, получим попрежнему силы, направленные по прямой $TL$, пропорциональные этой длине, но бо́льшие, нежели раньше, следовательно (IV, 1 и 8) эти тела будут попрежнему описывать эллипсы, но более быстро. Остающиеся ускорительные силы $SD$ и $SD$, коим соответствуют движущие силы $T \cdot SD$ и $L \cdot SD$, пропорциональные массам тел, направленные по прямым $TJ$ и $LK$, параллельным $SD$, заставляют оба тела, не изменяя своего относительного положения, одинаково перемещаться к прямой $JK$, проведенной через середину тела $S$ перпендикулярно $SD$. Если же этому движению воспрепятствовать, придав системе тел $L$ и $T$, с одной стороны, и телу $S$—с другой, надлежащие скорости, то они будут обращаться около общего центра тяжести системы $C$. При этом движении тело $S$, так как оно притягивается суммою движущих сил $T \cdot SD$ и $L \cdot SD$, т. е. силою, пропорциональной расстоянию $SC$, будет описывать эллипс около точки $C$, и по пропорциональности $SC$ и $DC$ точка $D$ будет описывать подобный ему эллипс. Вместе с тем тела $T$ и $L$, притягиваемые соответственно движущими силами $T \cdot SD$ и $L \cdot SD$ по прямым, параллельным $TJ$ и $LK$, будут продолжать (след. V и VI законов) описывать свои эллипсы около точки $D$, как и раньше.



Фиг. 99.

Если прибавится четвертое тело $V$, то рассуждая подобным же образом, заключим, что точка $C$ будет описывать эллипс около общего центра тяжести всей системы $B$, причем прежние движения тел $T$, $L$, $S$ около центров $D$ и $C$ останутся, но ускорятся. Подобным же способом можно будет присоединять и большее число тел. Так происходит дело и тогда, когда тела $T$ и $L$ притягивают друг друга с большею или меньшею ускорительною силою, пропорциональною расстояниям, нежели они притягивают другие тела. Если же взаимные ускорительные притяжения всех тел друг к другу пропорциональны произведениям расстояний на массы притягивающих тел, то из предыдущего легко заключить, что все тела описывают около общего центра тяжести различные эллипсы в неподвижной плоскости и с одинаковым временем обращения.[118]

[118] В самом деле, положим, для простоты письма, что тел три; пусть массы их $m_1, m_2, m_3$, координаты $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, $x_3\, y_3\, z_3$, коэффициент притяжения $k^2$. За начало координат возьмем центр тяжести системы так, что будет:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0 \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

## Предложение LXV. Теорема XXV

*Несколько тел, притягивающихся обратно пропорционально квадратам расстояний, могут двигаться друг относительно друга по эллипсам, описывая радиусами, проведенными к фокусу, площади, весьма близкие к пропорцианальности времени.*

В предыдущем предложении показан тот случай, когда движение нескольких тел происходит точно по эллипсам. Чем более закон действия сил отступает от указанного в том предложении, тем более возмущаются телами их взаимные движения, и когда притяжение обратно пропорционольно квадрату расстояний, то тела не могут вообще в точности двигаться по элли-

---

Уравнения движения точки $m_1$ будут:

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= k^2 [m_2 (x_2 - x_1) + m_3 (x_3 - x_1)] \\
y_1'' &= k^2 [m_2 (y_2 - y_1) + m_3 (y_3 - y_1)] \qquad (2)\\
z_1'' &= k^2 [m_2 (z_2 - z_1) + m_3 (z_3 - z_1)].
\end{aligned}
$$

На основании уравнений (1), их можно написать так:

$$
\begin{aligned}
x_1'' + k^2 M x_1 &= 0 \\
y_1'' + k^2 M y_1 &= 0 \qquad (3)\\
z_1'' + k^2 M z_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

где

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Из уравнений (3) следует, полагая $k^2 M = \lambda^2$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t \\
y_1 &= C_3 \cos \lambda t + C_4 \sin \lambda t \qquad (4)\\
z_1 &= C_5 \cos \lambda t + C_6 \sin \lambda t
\end{aligned}
$$

где $C_1, C_2, C_3, \ldots C_6$ — постоянные произвольные, определяемые начальными условиями, относящимися к точке $m_1$.

Исключение из этих уравнений величин $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$ дает уравнение вида

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 = 0, \qquad (5)$$

где $A$, $B$, $C$ суть соответствующие миноры определителя

$$
\begin{vmatrix} x_1 & C_1 & C_2 \\ y_1 & C_3 & C_4 \\ z_1 & C_5 & C_6 \end{vmatrix}.
$$

Затем, найдя из первых двух из уравнений (4) величины $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$ и составив сумму их квадратов, получим

$$(C_4 x_1 - C_2 y_1)^2 + (C_3 x_1 - C_1 y_1)^2 = (C_1 C_4 - C_2 C_3)^2. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) показывают, что точка $m_1$ движется по постоянному эллипсу, коего центр находится в начале координат и коего плоскость есть (5).

Уравнения (4) показывают, что для каждой точки будет то же самое, и так как $\lambda$ не зависит от № точки, то время оборота $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$ этих точек по своим эллипсам для всех точек одно и то же.

псам, разве только когда сохраняется некоторая пропорция между расстояниями.[114] Но в следующих случаях они лишь немного уклоняются от эллипсов.

*Случай 1.* Положим, что несколько малых тел обращается около какого-нибудь одного большого в различных от него расстояниях и что они притягиваются друг к другу пропорционально своим массам.

Общий центр тяжести всей системы (след. VI законов) или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно. Вообразим, что мелкие тела настолько малы, что большое тело никогда не удаляется сколь-нибудь значительно от этого центра, так что можно без чувствительной погрешности принять, что это большое тело или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно; тогда малые тела будут обращаться около большого по эллипсам и радиусы, к нему проводимые, будут описывать площади, пропорциональные времени, постольку, поскольку не происходит отклонений, вызываемых или отклонением большого тела от общего центра тяжести системы, или же от взаимодействий малых тел друг на друга. Но массы малых тел можно уменьшать настолько, что эти отклонения и эти взаимодействия станут меньше любой назначенной величины, т. е. настолько, что орбиты так приблизятся к эллипсам и площади — к пропорциональности времени, что погрешности будут меньше любой наперед заданной величины.

*Случай 2.* Вообразим, что система многих малых тел, обращающихся вышеописанным образом около большого, или просто что система двух тел, обращающихся друг около друга, перемещается равномерно и прямолинейно и что в то же время эти тела подвергаются действию еще гораздо большего тела, находящегося весьма далеко в стороне. Так как равные ускорительные силы, действующие на все тела по параллельным направлениям, не изменяют ни относительных положений, ни относительных движений тел,

---

114 В этом предложении Ньютон ставит задачу о движении многих тел, далеко еще окончательно не решенную и до сих пор. Простейший случай этой задачи есть так называемая задача трех тел, и замечание Ньютона как бы заставляет думать, что он уже намечал те случаи, когда задача решается.

Tisserand, разобрав в главе VIII тома I своей «Mécanique Céleste» исследования Лагранжа о задаче трех тел, в § 58 говорит: «Как видно, точное интегрирование дифференциальных уравнений задачи трех тел известно в том случае, когда их взаимные расстояния сохраняют постоянные отношения друг к другу; этот случай подразделяется на два: когда три тела все время находятся в вершинах равностороннего треугольника и когда они постоянно остаются на одной прямой. Насколько нам известно, это — единственные случаи, в которых задача могла быть решена; аналитические ее трудности не могли быть превзойдены, даже когда три тела предполагаются постоянно на одной прямой, если не делать допущения, что расстояния между ними находятся в постоянном друг к другу отношении». «Principia» изданы в первый раз в 1686 г., «Небесная Механика» Тиссерана — в 1889.

а производят лишь совокупное перемещение всей системы, то очевидно, что от притяжения этим большим телом не произойдет никаких изменений в относительных друг к другу движениях притягиваемых малых тел, кроме тех изменений, которые вызываются или неравенством ускорительных сил этого притяжения, или же отступлением их от параллельности. Предположим, что притяжения всех тел большим обратно пропорциональны квадратам расстояний; если увеличить расстояние этого большого тела настолько, чтобы разности его расстояний до малых тел и разности в направлениях этих прямых были меньше наперед назначенных величин, то относительные движения малых тел сохранятся, и отступления в них будут меньше любой величины. Вместе с тем, в виду малости их взаимных расстояний, вся их система будет притягиваться на манер одного тела и, следовательно, двигаться под действием этого притяжения большим телом подобно одному телу, т. е. центр тяжести [115] системы будет описывать около большого тела коническое сечение (гиперболу или параболу — при слабом притяжении, эллипс — при более сильном), и радиусом, проводимым к большому телу, будут описываться площади, пропорциональные времени, причем не будет иных погрешностей, кроме весьма малых, происходящих от расстояний между телами и которые можно уменьшить сколько угодно.

Рассуждая подобным же образом, можно переходить к более сложным случаям до бесконечности.

*Следствие 1.* Во втором случае, чем ближе большое тело будет находиться к системе двух или многих тел, тем более будут возмущаемы относительные движения частей системы как оттого, что наклонения прямых, проводимых от этого большого тела к прочим, становятся больше, так и потому, что больше будут и отступления от пропорциональности.

*Следствие 2.* Возмущения будут еще больше, если предположить, что ускорительные силы притяжения частей системы к этому наибольшему телу не находятся в обратном отношении квадратов расстояний до него, в особенности если отступления от этого отношения будут более значительны, нежели отступления в пропорциях расстояний малых тел до большого. Ибо, если ускорительная сила, действующая равномерно и по прямым параллельным, не возмущает относительных движений, то ясно, что возмущения, происходящие от неравномерности этого действия, будут больше или меньше, сообразно большей или меньшей неравномерности. Избытки больших натисков, действуя на одни тела и не действуя на прочие, очевидно будут изме-

---

[115] Это и есть то место, на которое указано в предложении XXII и на основании которого можно думать, что Ньютону был известен и общий закон движения центра тяжести системы.

нять их относительные положения, и эти возмущения, прилагаясь к возмущениям, происходящим от непараллельности направлений, дадут и бо́льшие полные возмущения.

*Следствие 3.* Отсюда следует, что если части сказанной системы движутся по эллипсам или кругам без заметных возмущений, то очевидно, что система или совершенно не подвержена ускоряющим силам, направленным к другим телам, или же подвержена действию таких сил, коих направления параллельны и величины равны.

### Предложение LXVI. Теорема XXVI

*Если три тела притягиваются взаимно с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, и оба меньших обращаются вокруг третьего наибольшего, то площади, описываемые радиусом, проводимым от среднего и ближайшего к наибольшему, будут ближе к пропорциональности временам, и его траектория ближе к эллипсу, в фокусе коего сходятся эти радиусы, когда это наибольшее тело будет двигаться под действием сказанных притяжений, нежели в том случае, когда оно, не испытывая притяжений от малых тел, оставалось бы в покое или же, будучи притягиваемо или значительно сильнее, или значительно слабее, совершало бы или гораздо бо́льшие, или гораздо меньшие, движения.*

Это свойство почти само собою вытекает из следствия 2 предыдущего предложения, но его можно вывести с большею полнотою и отчетливостью следующим образом.

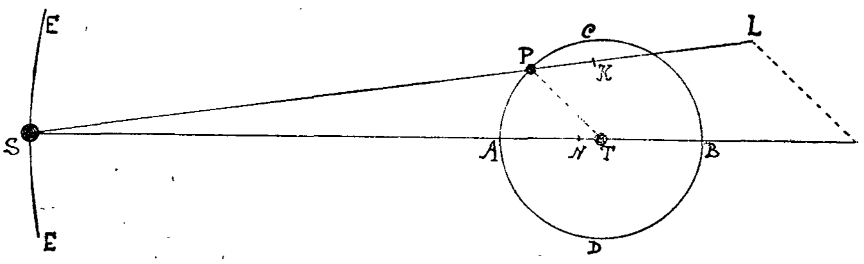
*Случай 1.* Пусть оба меньших тела $P$ и $S$ (фиг. 100) обращаются в одной плоскости вокруг бо́льшего $T$, причем $P$ описывает внутреннюю орбиту $PAB$, $S$ — внешнюю $ESE$.

Пусть $SK$ есть среднее расстояние тела $P$ до $S$; представим этою же длиною и ускорительную силу притяжения тела $P$ телом $S$. Возьмем длину $SL$ так, чтобы было

$$SL : SK = SK^2 : SP^2$$

тогда эта длина представит ускорительную силу притяжения телом $S$ тела $P$ при произвольном удалении $SP$. Проведи $PT$ и параллельную ей $LM$, которая пересечет $ST$ в $M$. Притяжение $SL$ разложится (след. II законов) на притяжение $SM$ и $LM$.

Таким образом на тело $P$ будут действовать три ускорительные силы: *первая сила* направлена к $T$ и происходит от взаимного притяжения тел $P$ и $T$. Под действием одной этой силы тело $P$ должно бы описывать вокруг тела $T$, неподвижного ли, или движущегося под влиянием этого притяжения, эллипс, фокус которого находится в центре тела $T$, и радиус $PT$ описывал бы площади, пропорциональные временам. Это следует из предложения XI и следствия 2 и 3 теоремы XXI. *Вторая сила* есть притяжение $LM$, направленное также от $P$ к $T$; слагаясь с первою силою, она не производит нарушения пропорциональности площадей времени (теор. XXI, след. 3). Но так как эта сила не находится в обратной пропорциональности квадрату расстояния $PT$, то, по соединении с предыдущей, она дает силу, отступающую от такой пропорциональности в тем большей мере, чем больше отношение этой второй силы к первой, при равных прочих условиях.




Фиг. 100

Но так как (XI и след. 2 теор. XXI) сила, под действием которой тело описывает эллипс вокруг фокуса $T$, должна быть направленной в эту точку и быть обратно пропорциональной квадрату расстояния $PT$ до нее, составленная же сила от этой пропорции отступает, то она заставит и орбиту $PAB$ отклониться от эллиптической формы с фокусом в точке $T$, и это отклонение будет тем значительнее, чем больше отношение второй силы $LM$ к первой, при равенстве прочих условий.

Наконец, *третья сила*, действуя на тело $P$ по прямой, параллельной $ST$, при сложении с предыдущими дает равнодействующую, которая уже не направлена более от $P$ к $T$, но которая тем более отступает от этого направления, чем более отношение этой третьей силы к первым двум, при прочих равных условиях; от этого, при движении тела $P$, радиус $PT$ не будет уже описывать площади, пропорциональные времени, и отступление от этой пропорциональности будет тем значительнее, чем больше отношение третьей силы к первым двум. Кроме того, указанное выше уклонение орбиты $PAB$ от эллиптической формы, при действии этой третьей силы, еще возрастет по двум причинам — во-первых, потому, что полная сила не направлена от $P$ к $T$ и, во-вторых, потому что она не обратно пропорциональна квадрату расстояния $PT$.

Принимая все это в соображение, видно, что площади будут тогда ближе всего к пропорциональности, когда третья сила, при сохранении величины первых двух, будет наименьшая, и орбита $PAB$ будет тогда ближе всего подходить к эллиптической форме, когда и вторая и третья сила будут наименьшие при сохранении величины первой силы.

Представим длиною $SN$ ускорительную силу притяжения тела $T$ телом $S$; тогда, если бы притяжения $SM$ и $SN$ были равны, то действуя одинаково на тела $P$ и $T$ и по направлениям параллельным, эти силы не изменяли бы относительного положения тел $P$ и $T$, и их относительные движения остались бы теми же самыми, если бы обе эти силы были уничтожены (след. IV законов). Поэтому, когда притяжение $SN$ меньше притяжения $SM$, то оно уничтожит часть его, равную $SN$, останется часть $MN$, которою и будет возмущаться как пропорциональность площадей времени, так и эллиптическая форма орбиты. Точно так же, когда притяжение $SN$ будет больше $SM$, то возмущение пропорциональности и формы будет происходить только от разности $MN$. Таким образом от действия притяжения $SN$ предыдущая третья сила $SM$ сводится к силе $MN$, первая же и вторая сила остаются без изменения. Поэтому пропорциональность площадей времени и приближение орбиты к эллиптической форме соблюдаются точнее тогда, когда сила $MN$ или равна нулю, или наименьшая; это же имеет место тогда, когда ускорительные силы притяжений тел $P$ и $T$ телом $S$ приближаются сколь возможно к равенству, т. е. когда притяжение $SN$ не равно ни нулю и не меньше наименьшего из притяжений $SM$, но лежит посредине между наибольшим и наименьшим значениями $SM$, т. е. или немного более, или немного менее, притяжения $SK$.

*Случай 2.* Положим теперь, что меньшие тела $P$ и $T$ обращаются около большего $T$ в различных плоскостях. Сила $LM$, действуя по направлению прямой $PT$, лежащей в плоскости орбиты $PAB$, будет оказывать то же самое действие, как и раньше, и не будет выводить тело $P$ из плоскости его орбиты. Вторая же сила $NM$, действуя по направлению, параллельному прямой $ST$ (следовательно, по направлению, наклонному к плоскости $PAB$, когда тело $S$ находится вне линии узлов), произведет, кроме указанного выше возмущения в движении по долготе, еще и возмущение в широте, выводя тело из плоскости его орбиты. Это возмущение, при каком-либо заданном относительном положении тел $P$ и $T$, будет пропорционально производящей его силе $MN$ и, следовательно, будет наименьшим, когда сила $MN$ будет наименьшею, т. е. (как уже изложено выше) когда притяжение $SN$ или немного более, или немного менее, притяжения $SK$.

*Следствие 1.* Отсюда легко заключить, что при обращении нескольких малых тел $P$, $S$, $R$, . . . около большего $T$, движение ближайшего тела $P$ будет в меньшей степени возмущаться притяжениями прочих, когда это наибольшее тело $T$, сообразно величине ускорительных сил, притягивается и возмущается прочими телами, а также и эти прочие друг другом.

*Следствие 2.* В системе трех тел $T$, $P$, $S$, в которой притяжения любых двух третьим обратно пропорциональны квадратам расстояний, тело $P$ описывает радиусом $PT$ около тела $T$ площади более быстро близ соединения $A$ и противостояния $B$, нежели близ квадратур $C$ и $D$. Ибо всякая сила, действующая на тело $P$ и не действующая на тело $T$ и не направленная по прямой $PT$, ускоряет или замедляет описание площадей, сообразно тому, направлена ли она в сторову движения, или в сторону, ему встречную. Такова сила $MN$; при переходе тела $P$ от $C$ к $A$ она направлена в сторону движения и ускоряет его, затем от $A$ до $D$ — против движения и замедляет его, затем от $D$ до $B$ — по движению и, наконец, от $B$ до $C$ — против движения.

*Следствие 3.* Из того же рассуждения следует, что при прочих одинаковых условиях тело $P$ быстрее движется в соединении и противостоянии, нежели в квадратурах.

*Следствие 4.* Орбита тела $P$, при прочих равных условиях, в квадратурах имеет бо́льшую кривизну, нежели в соединевии и в противостоянии, ибо тело, более быстро движущееся, менее отклоняется от своего прямого пути; кроме того, сила $KL$ или $MN$ в соединениях и противостояниях направлена обратно той силе, которою тело $P$ притягивается к телу $T$ и, следовательно, уменьшает эту силу, тело же $P$ менее отклоняется от прямого пути там, где оно менее сильно притягивается телом $T$.

*Следствие 5.* Поэтому тело $P$, при прочих равных условиях, отходит более далеко от тела $T$ в квадратурах, нежели в соединениях и противостояниях. Так это происходит, если не принимать в расчет эксцентричности движения. Если же орбита тела $P$ эксцентричная, то ее эксцентриситет (как будет подробнее выяснено в след. 9) становится наибольшим, когда апсиды совпадают с сизигиями; поэтому может случиться, что тело, придя в дальнюю вершину, будет в сизигиях находиться от тела $T$ в бо́льшем удалении, нежели в квадратурах.

*Следствие 6*. Центростремительная сила центрального тела $T$, которою тело $P$ удерживается на своей орбите, в квадратурах от прибавления силы $LM$ увеличивается, в сизигиях же от отнятия силы $KL$ уменьшается. Самая величина силы $KL$ изменяется так, что сказанное уменьшение больше, нежели увеличение. Упомянутая центростремительная сила пропорциональна радиусу $TP$ (теор. IV, 2) и обратно пропорциональна квадрату времени обращения; как видно, произведение этих двух отношений от присоединения силы $KL$ должно уменьшаться, т. е. если радиус орбиты сохраняет свою величину, то время обращения должно увеличиться и притом как корень квадратный из того отношения, в котором возросла сила. Когда же сказанный радиус увеличивается, то и время обращения также увеличивается, но в отношении бо́льшем, нежели степень $\frac{3}{2}$ радиуса (след. 6, IV). Когда же сказанный радиус уменьшается, то и время обращения уменьшается, но опять-таки в отношении бо́льшем, нежели степень $\frac{3}{2}$ радиуса.

Если бы притягательная сила центрального тела постепенно убывала, то тело $P$, все менее и менее притягиваемое, непрерывно удалялось бы от центра $T$, и наоборот, если бы эта сила увеличивалась, то это тело приближалось бы к центру $T$. Поэтому, когда производимое весьма удаленным телом $S$ действие, на величину которого уменьшается эта сила, будет попеременно возрастать и убывать, то соответственно будет попеременно возрастать и убывать радиус $PT$, время же обращения будет возрастать или убывать, как произведение отношения степеней $\frac{3}{2}$ радиусов на отношение корней квадратных силы центрального тела, к которой придана или из которой вычтена величина действия весьма удаленного тела $S$.

*Следствие 7*. Из предыдущего следует, что главная ось или линия апсид эллипса, описываемого телом $P$, будет также перемещаться попеременным угловым движением; но так как угловое перемещение по движению тела $P$ преобладает над встречным, то общее перемещение будет в сторону движения тела $P$. Действительно, сила, с которою тело $P$ побуждается к телу $T$ в квадратурах, где сила $MN$ равна нулю, слагается из силы $LM$ и притяжения тела $T$. Сила $LM$, при увеличении расстояния $PT$, увеличивается приблизительно в том же отношении, как это расстояние, вторая же сила уменьшается пропорционально квадрату расстояния, поэтому сумма этих сил убывает в отношении меньшем, нежели квадрат расстояний, и следовательно (предл. XLV, 1), дальняя вершина будет перемещаться в сторону против обращения тела $P$. В соединении же и в противостоянии сила, с которою тело $P$ побуждается к телу $T$, равна разности между притягательною силою тела $T$ и силою $KL$, разность же эта, в виду того, что сила $KL$ возрастает приблизительно пропорционально $PT$, убывает более быстро, нежели квадрат расстояния $PT$, следовательно (предл. XLV, 1) вершина будет перемещаться в сторону движения. В положениях между квадратурами и сизигиями перемещение вершины зависит от обеих причин, и поэтому будет прямое или попятное, смотря по тому, которая причина преобладает. Так как сила $KL$ в сизигиях почти вдвое больше, нежели сила $LM$ в квадратурах, то преобладающее значение имеет сила $KL$, и вершина будет перемещаться прямым движением.

Справедливость как этого следствия, так и предыдущего может быть установлена и проще, рассматривая, что система двух тел $P$ и $T$ как бы окружена многими телами $S$, $S$, $S$, . . ., расположенными повсюду по орбите $ESE$; от притяжения этих тел действие тела $T$ повсюду уменьшается, следовательно оно убывает более быстро, нежели в отношении квадратов расстояний.

*Следствие 8.* Так как прямое или попятное перемещение апсид зависит от того, происходит ли убывание центростремительной силы в бо́льшем или в меньшем отношении, нежели квадрат расстояния $PT$, когда тело переходит от ближней вершины к дальней, и от того, как происходит подобное же ее возрастание при переходе тела от дальней вершины в ближнюю, то это перемещение апсид будет наиболее быстрым там, где отношение силы в дальней вершине к силе в ближней вершине наиболее уклоняется от обратного отношения квадратов расстояний. Очевидно, что когда апсиды находятся в своих сизигиях, то вследствие отнятия силы $KL$ или $NM—LM$ они перемещаются прямым движением более быстро, в квадратурах же они перемещаются от прибавления силы $LM$ попятным движением и медленнее. От большой продолжительности времени, в течение которого совершается как более быстрое прямое перемещение, так и более медленное попятное, это неравенство достигает весьма значительной величины.

*Следствие 9.* Если тело притягивается к какому-либо центру обратно пропорционально квадрату расстояния и обращается вокруг этого центра по эллипсу и если, при переходе от дальней вершины к ближней, сила возрастает при приближении к центру от прибавления некоторой новой силы быстрее, нежели убывает квадрат расстояний, то очевидно, что тело под действием этой новой силы будет приближаться к центру ближе, нежели в том случае, когда на него действовала только сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния; следовательно, оно будет описывать орбиту, лежащую внутри эллипса, и в ближней вершине будет находиться в более близком расстоянии от центра, нежели ранее, значит от прибавления этой новой силы орбита станет более эксцентричной. Если затем, при переходе тела от ближней вершины к дальней, сила возрастает в той же постепенности, в какой она до того убывала, то тело вернется к своему первоначальному удалению, поэтому, если сила убывает более быстро, то тело, будучи притягиваемо к центру сил слабее, удалится от него на бо́льшее расстояние, и эксцентриситет орбиты еще возрастет. В виду этого, если при каждом обращении пропорция увеличения или уменьшения центростремительной силы, по сравнению с квадратами расстояний, будет возрастать, то эксцентриситет орбиты будет увеличиваться, и наоборот, при уменьшении этой пропорции он будет убывать. Таким образом в системе трех тел $T, P, S$, когда апсиды орбиты $PAB$ находятся в квадратурах, сказанная пропорция возрастания и убывания наименьшая, когда же апсиды в сизигиях, то она наибольшая. Когда апсиды в квадратурах, то пропорция вблизи апсид меньше, когда же они в сизигиях, то больше, нежели вторая степень расстояний. От этой большей пропорции происходит, как уже сказано, прямое перемещение апсид. Если же рассмотреть пропорцию возрастания или убывания силы при полном переходе от одной апсиды до другой, то она окажется в общем меньше пропорции квадратов расстояний. Когда апсиды находятся в квадратурах, отношение величины силы в ближней вершине к ее величине в дальней вершине меньше, нежели отношение квадрата расстояния дальней вершины к квадрату расстояния ближней до фокуса эллипса; когда же апсиды в сизигиях, то отношение величины силы в ближней вершине к величине силы в дальней вершине больше, нежели отношение квадратов расстояний. Это происходит потому, что в квадратурах силы $LM$ прилагаются к притягательной силе тела $T$ и дают в сумме силы, находящиеся в меньшем отношении, в сизигиях же силы $KL$ вычитаются из притяжения тела $T$ и оставляют разности, находящиеся в большем отношении. Поэтому, при переходе от одной вершины к другой, пропорция изменяемости силы наименьшая в квадратурах, наибольшая в сизигиях, и при перемещении апсид из квадратур в сизигии эта пропорция возрастает, следовательно возрастает и эксцентриситет эллипса; при перемещении же от сизигий к квадратурам сказанная пропорция постоянно убывает и эксцентриситет уменьшается.

*Следствие 10.* Чтобы изучить закон отклонений по широте, вообразим, что плоскость орбиты $EST$ остается неизменной; из рассмотрения указанной выше общей причины возмущений следует, что из двух сил $NM$ и

$ML$, являющихся этою причиною, сила $ML$, действующая в плоскости орбит $PAB$, не производит возмущений по широте. Что же касается силы $NM$, то когда узлы находятся в сизигиях, сила эта также действует в плоскости орбиты и не возмущает движения по широте, когда же узлы находятся в квадратурах, то возмущения наибольшие, и эта сила так отвлекает тело $P$ от его орбиты, что при переходе тела от квадратур к сизигиям наклонность орбиты уменьшается, при переходе же тела от сизигий к квадратурам — увеличивается. От такого действия возмущающей силы происходит изменение наклонности так, что когда тело находится в сизигиях, наклонность оказывается наименьшею, когда же тело подходит к узлу, то наклонность возвращается приблизительно к своей прежней величине.

Когда узлы находятся в октантах после квадратур, т. е. между $C$ и $A$, $D$ и $B$, то рассуждая подобно изложенному можно заключить, что при переходе тела от того или другого узла до девятидесятого от него градуса наклонность орбиты постоянно убывает, затем на протяжении ближайших 45° до ближайшей квадратуры наклонность увеличивается, затем на протяжении следующих 45° до ближайшего узла убывает. Отсюда видно, что убывание больше, нежели возрастание, и поэтому наклонность в последующем узле меньше, нежели в предыдущем. Рассуждая подобным же образом убедимся, что когда узлы находятся в других октантах, т. е. между $A$ и $D$ или между $B$ и $C$, то наклонность будет увеличиваться. Следовательно, наибольшего своего значения наклонность достигает, когда узлы находятся в сизигиях. При переходе же узлов от сизигий к квадратурам, наклонность при каждом прохождении тела через узлы уменьшается и становится наименьшей, когда сами узлы находятся в квадратурах, тело же — в сизигиях. Затем наклонность в той же постепенности возрастает, как она раньше убывала, и когда узлы возвратятся в положение, близкое к их сизигиям, наклонность вернется к своему первоначальному значению.

*Следствие 11.* Когда узлы находятся в своих квадратурах, то тело $P$, при переходе от узла $C$ через соединение $A$ к узлу $D$, отклоняется возмущающею силою в сторону к $S$, при переходе же от узла $D$ через противостояние $B$ к узлу $C$ оно отклоняется в сторону обратную, поэтому на всем протяжении от узла $C$ до непосредственной близости к узлу $D$ тело отклоняется от своей орбиты в одну сторону, и следовательно, придя в этот узел, оно будет находиться в наибольшем удалении от первоначальной плоскости $CD$ и, значит, пройдет через плоскость $EST$ не в точке $D$ — узле плоскости $CD$, но в точке, которая продвинута в сторону тела $S$, следовательно новое положение узла сместилось навстречу движения тела $P$. По этой причине при каждом обороте тела узлы будут продолжать перемещаться в ту же сторону. Итак, когда узлы находятся в квадратурах, то они постоянно перемещаются навстречу движению тела; в сизигиях, когда движение по широте не возмущается, узлы неподвижны; в промежуточных положениях, где предыдущие условия ослаблены, узлы перемещаются медленнее; следовательно, вообще, узлы перемещаются в сторону, обратную движению, оставаясь при некоторых положениях неподвижными.

*Следствие 12.* Все описанные в предыдущих следствиях отступления немного более в соединениях тел $P$ и $S$, нежели в их противостояниях, вследствие большей величины сил $NM$ и $ML$, производящих эти отступления.

*Следствие 13.* Так как причины явлений, указанных в предыдущих следствиях, не зависят от величины тела $S$, то все предыдущее имеет место и в том случае, когда величина тела $S$ такова, что около него будет обращаться система двух тел $P$ и $T$. Но так как при увеличении тела $S$ увеличивается и его притягательная сила, от которой собственно и происходят возмущения тела $P$, то все эти возмущения, при равных расстояниях, будут больше в этом последнем случае, нежели в том, когда тело $S$ обращается около системы двух тел $P$ и $T$.

*Следствие 14.* Так как силы $NM$ и $ML$, когда тело $S$ весьма отдаленное, приблизительно пропорциональны силе $SK$ и отношению силы $PT$ к $ST$, т. е. когда задано как расстояние $PT$, так и абсолютная сила тела $S$, эти возмущающие силы обратно пропорциональны $ST^3$. Но силы $NM$ и $ML$ составляют причины всех возмущений и всех явлений, о которых сказано в предыдущих следствиях, ясно что при сохранении системы тел $T$ и $P$ и изменении лишь расстояния $ST$ и абсолютной силы тела $S$, все сказанные проявления приблизительно прямо пропорциональны абсолютной силе тела $S$ и обратно пропорциональны кубу расстояния $ST$. Поэтому, когда система тел $T$ и $P$ обращается около весьма удаленного тела $S$, то силы $NM$ и $ML$ и их действия будут (предл. IV, след. 2 и 6) обратно пропорциональны квадрату времени обращения. Наконец, если величина тела $S$ пропорциональна его абсолютной силе, то возмущающие силы $MN$ и $ML$ и их действия будут прямо пропорциональны кубу видимого диаметра тела $S$, усматриваемого с тела $T$, и наоборот, ибо это отношение то же самое, как обратное отношение куба расстояний.

*Следствие 15.* Поэтому, если сохраняя вид и соотношения, а также и взаимное наклонение орбит $ESE$ и $PAB$, изменять лишь их размеры и при этом или сохранять, или изменять в каком-либо постоянном отношении, абсолютные силы тел $S$ и $T$, то все силы (т. е. притяжение телом $T$, действием которого тело $P$ уклоняется от своего прямолинейного пути и вынуждается описывать свою орбиту $PAB$, и сила тела $S$, которою это тело $P$ отклоняется от своей орбиты) будут действовать все время подобным образом и в подобной пропорции, так что все их проявления будут подобны и пропорциональны своим временам, т. е. все линейные отклонения будут пропорциональны диаметрам орбит, все угловые будут одинаковы и времена подобных линейных отклонений или равных угловых будут пропорциональны временам обращения по орбитам.

*Следствие 16.* Следовательно, если заданы вид и взаимные наклонения орбит и изменяются как бы то ни было массы тел, силы и расстояния, то по известным в каком-либо случае отклонениям и их периодам можно вывести весьма близко величины отклонений и их периоды для всякого другого случая по следующему способу.

Силы $MN$ и $ML$, при сохранении всего остального, пропорциональны радиусу $TP$, и производимые ими действия (по след. 2 лем. X) пропорциональны этим силам и квадратам времени действия их, т. е. квадрату времени обращения тела $P$.

В такой пропорции находятся линейные величины отклонений тела $P$, следовательно угловые уклонения, усматриваемые из центра $T$ (т. е. перемещения апсид и узлов, а также и видимые уклонения по широте и долготе), будут при всяком обращении тела $P$ приблизительно пропорциональны квадрату периода этого обращения. Соединяя это отношение с отношениями следствия 14, получим, что в системе тел $T$, $P$, $S$, в которой тело $P$ обращается около ближайшего к нему тела $T$, это же последнее обращается около весьма отдаленного тела $S$, угловые отклонения тела $P$, усматриваемые из центра тела $T$, будут в каждом отдельном обращении тела $P$ прямо пропорциональны квадрату периода обращения тела $P$ и обратно пропорциональны квадрату периода обращения тела $T$. Следовательно, среднее движение вершин (апсид) будет находиться в постоянном отношении к среднему движению узлов, ибо каждое из этих движений в отдельности прямо пропорционально квадрату периода обращения тела $P$ и обратно пропорционально квадрату периода обращения тела $T$. Движения вершины и узлов не изменяются чувствительным образом от увеличения или уменьшения эксцентриситета и наклонности орбиты $PAB$, если только эти изменения не слишком велики.[116]

[116] В этом LXVI предложении и в его следствиях Ньютон указывает общий характер возмущений движения, близкого к круговому, одного тела вокруг другого (Луна около Земли) действием третьего, от них весьма далекого (Солнца). Это предложение служит основанием теории Луны, излагаемой Ньютоном в третьей книге, поэтому мы остановимся на его пояснении несколько подробнее, дав аналитическое развитие выражений тех изменений элементов

*Следствие 17.* Так как длина $LM$ иногда больше, иногда меньше, радиуса $PT$, то если представить среднее значение этой силы длиною радиуса $PT$, то отношение этой силы к средней величине $SK$ или $SN$ силы $SP$ (вместо $SN$ можно брать и $ST$) будет равно отношению длины $PT$ к длине $ST$.

Но отношение средней величины силы $SN$ или $ST$, которою тело $T$ удерживается на своей орбите при обращении вокруг тела $S$, к той силе, которою тело $P$ удерживается на своей орбите при обращении его вокруг тела $T$, равно произведению отношения $\frac{ST}{PT}$ на квадрат отношения периода обращении тела $P$ вокруг тела $T$ к периоду обращении тела $T$ около $S$. Отсюда по равенству отношений следует, что средняя величина силы $LM$ относится к той силе, которою тело $P$ удерживалось бы на своей орбите при обращении вокруг $T$ (т. е. к такой силе, под действием которой тело $P$ могло бы обращаться с тем же периодом около точки $T$ в заданном расстоянии $PT$), как квадраты вышеупомянутых периодов. Таким образом по известным периодам обращения и расстоянию $PT$ найдется средняя величина силы $LM$, после же того, как эта величина найдена, определится и приближенная величина силы $MN$ по пропорции длин $PT$ и $MN$.

*Следствие 18.* Вообразим, что по тем же законам, как тело $P$ обращается вокруг тела $T$, около этого же тела $T$ обращается и несколько жидких тел, находящихся от него в одинаковом удалении, и что затем эти жидкие тела от взаимного сближения слились в одно жидкое круговое кольцо, концентричное с телом $T$. Отдельные части кольца, следуя в своих движениях законам движения тела $P$, будут приближаться к телу $T$ и двигаться быстрее в своих соединениях с телом $S$, нежели в квадратурах. Узлы этого кольца, т. е. точки пересечения его с плоскостью орбиты тела $S$ или $T$, находятся в стояниях в сизигиях, вне же сизигий узлы движутся попятно и скорость этого движения в квадратурах наибольшая. Наклонение кольца будет изменяться, и его ось при каждом обороте будет совершать колебания, по совершении же кольцом полного оборота, эта ось возвратится к своему прежнему положению, отступая от него лишь постольку, поскольку она отнесена вследствие прецессии узлов.

*Следствие 19.* Вообрази теперь, что тело $T$ имеет форму шара и состоит из вещества не жидкого, что оно увеличено и распространено до сказанного кольца, что по обводу этого тела сделана выемка, заполненная водою, и что это тело равномерно вращается около своей оси, делая оборот

---

орбиты, для которых в тексте дано лишь построение и общее указание. Но так как это примечание слишком обширно, оно отнесено к концу первой книги.

в такое же время, как время обращения сказанного кольца. Жидкость, то ускоряясь, то замедляясь, будет обладать в сизигиях большею скоростью, в квадратурах — меньшею, нежели поверхность шара, и поэтому будет попеременно в своей выемке то приливать, то отливать, подобно морю. При обращении же около шара, коего центр в покое, когда нет притяжения тела $S$, вода не имела бы ни приливов, ни отливов. В таких условиях находится также шар, движущийся равномерно по прямой линии и в то же время вращающийся около своего центра (след. V законов), а также и шар, отвлекаемый равномерно (т. е. постоянною силою) от своего прямолинейного пути (след. VI законов). Но если приблизить тело $S$, то от неравномерного его притяжения вода будет возмущаться, при этом притяжение ближайших частей воды будет больше, дальнейших — слабее. Сила $LM$, действуя на воду вниз (к центру тела $T$) в квадратурах, заставила бы ее опускаться на всем протяжении до сизигий, сила же $KL$, действуя на воду вверх, заставила бы ее, противодействуя ее опусканию, подниматься на всем протяжении до квадратур; так происходило бы приливное и отливное движение, если бы оно не замедлялось трением и направляющим влиянием берегов выемки.

*Следствие 20.* Если кольцо затвердеет и размеры шара уменьшатся, то приливное движение прекратится, но колебательное движение наклонности оси и прецессия узлов сохранятся. Пусть шар вращается вместе с кольцом около той же самой оси, время обращения шара и кольца одно и то же и поверхность шара прилегает к внутренней поверхности кольца и с нею связана неразрывно; тогда шар будет участвовать в движениях кольца, будет колебаться вместе с ним и узлы будут отступать. Шар, как будет сказано ниже, сам по себе безразличен к восприятию усилий, кольцо, окружающее шар, должно иметь наибольший угол наклонения, когда его узлы в сизигиях, следовательно при переходе узлов к сизигиям оно побуждается изменять свое наклонение, и от этого побуждения будет сообщаться движение всему шару. Шар будет сохранять сообщенное ему движение до тех пор, пока кольцо, под влиянием противоположного действия, это движение поглотит и затем сообщит новое движение в противоположную сторону; по этой причине наибольшее движение в сторону уменьшения наклонения будет, когда узлы — в квадратурах, и наименьший угол наклонения, когда они — в октантах после квадратур. Затем наибольшее движение по восстановлению наклонности будет в сизигиях, наибольший ее угол — в ближайших к ним октантах. В совершенно подобных условиях находится и шар, не имеющий кольца, но который в экваториальных областях или несколько вздут и шире, нежели у полюсов, или состоит из вещества более плотного. Избыток вещества в экваториальной области и заменяет собою кольцо.

Если предположить, что центростремительная сила шара каким бы то ни было образом увеличена так, что все его части стремятся вниз подобно тяжелым телам на Земле, то явления, изложенные в этом и в предыдущем следствиях, от этого почти не изменятся, а лишь места наибольшей и наименьшей высоты воды будут другие. В настоящем случае вода будет оставаться на своей орбите, удерживаясь не центробежной силой, но выемкою, в которой она течет. Кроме того, сила $LM$ действует на воду вниз с наибольшим напряжением в квадратурах, сила $KL = NM - LM$ действует на нее вверх с наибольшим напряжением в сизигиях. Соединенное действие этих сил в октантах, предшествующих сизигиям, перестает быть направленным вниз и начинает направляться вверх; в октантах после сизигий оно перестает быть направленным вверх и начинает направляться вниз, поэтому наибольшая высота воды должна бы находиться приблизительно в октантах после сизигий, наименьшая — в октантах после квадратур, поскольку восходящее и нисходящее движение воды, вызываемое действием этих сил, сохраняется несколько долее вследствие инерции и прекращается несколько ранее вследствие препятствий в выемке.

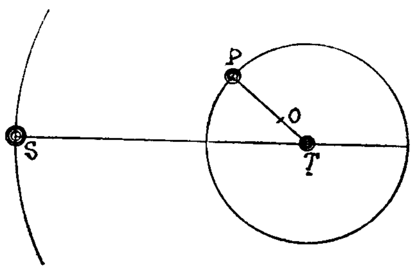
*Следствие 21.* Причина, вследствие которой избыточное количество вещества на экваторе заставляет узлы отступать, заставит скорость отступания при увеличении этого избытка увеличиваться, при уменьшении — уменьшаться и при отсутствии — прекратиться. Если же снять вещества более, нежели его было в избытке, т. е. если шар сделать по экватору или вдавшимся внутрь, или менее плотным, нежели у полюсов, то движение узлов обратится в прямое.

*Следствие 22.* Следовательно, и обратно, по движению узлов можно судить о строении шара, а именно, если места полюсов на шаре сохраняются и движение узлов попятное, то по экватору имеется избыток вещества, если же это движение прямое — то недостаток. Вообрази сперва совершенно однородный и правильный шар, покоящийся в свободном пространстве; пусть затем от действия какого-либо натиска, произведенного наклонно к его поверхности, шар пришел в движение, и вообрази что затем он сохраняет это частию вращательное, частию прямолинейное движение. Так как такой шар совершенно безразличен ко всякой оси, проходящей через его центр, и не отдает предпочтения какой-либо оси или какому-либо ее положению перед всяким другим, то очевидно, что ни своей оси, ни ее наклонения (т. е. направления в пространстве) он заключающейся в нем самом силой изменить не может.

Пусть этот шар подвергается еще какому-нибудь новому наклонному натиску в той же части своей поверхности, как и прежде; так как от того, раньше или позднее будет произведен натиск, действие его не изменяется, то ясно, что эти два натиска, будучи приложены последовательно, произведут то же самое количество движения, как и при совместном и одновременном их приложении, т. е. то же самое, как если бы на шар подействовала одна сила, составленная по следствию II законов из обеих, следовательно получится одно простое движение около оси, имеющей постоянное наклонение. Совершенно то же относится и до второго натиска, произведенного в каком-либо ином месте, не лежащем на экваторе первого движения, также и до первого натиска, если его произвести в каком-нибудь месте, не лежащем на экваторе движения, произведенного вторым натиском без первого; поэтому, если оба натиска будут произведены в двух разных местах, то они произведут такое же вращательное движение, как если бы их приложить одновременно и совместно в точке пересечения экваторов движений, производимых каждым из них порознь. Поэтому правильный и однородный шар не удерживает нескольких различных движений, но все движения, ему сообщенные, слагаются в одно, и поскольку шар предоставлен самому себе, он будет обладать только одним простым и равномерным вращением около одной оси, сохраняющей все время неизменное направление, и ни от центростремительной силы, ни от скорости поступательного движения направление оси изменяться не может. Если вообразить, что плоскостью, проходящей через его центр и через центр сил, шар разделен на два полушария, то эта сила будет действовать на оба полушария одинаково, и поэтому такая сила не может сообщить шару никакого вращательного движения. Но если где-нибудь между полюсом и экватором добавить некоторое новое количество вещества, собранного как бы в виде горы, то оно нарушит правильность движения шара и будет производить по его поверхности перемещение полюсов, которые будут описывать по поверхности шара круги около первоначального своего места. Величина этого перемещения полюсов не может быть устранена иначе, как поместив сказанную гору или в одном из полюсов, в каковом случае (след. 21) узлы экватора будут перемещаться прямым движением, или же на экваторе, в каковом случае, по указанной в следствии 20 причине, узлы будут отступать, или же, наконец, прибавив новое количество вещества по другую сторону оси, которым сказанная гора уравновешивалась бы при движении, в каковом случае узлы будут перемещаться или прямым, или попятным, движением, смотря по тому, будут ли прежняя гора и это вновь прибавленное вещество ближе к полюсу, или к экватору.

### Предложение LXVII. Теорема XXVII

*Предполагая, что законы притяжения те же, утверждаю, что наружное тело $S$ описывает радиусами, проведенными к центру тяжести $O$ двух внутренних тел $P$ и $T$, площади, более близкие к пропорциональности, и орбиту, более близкую к эллипсу, имеющему свой фокус в сказанном центре, нежели оно описывало бы около срединного и наибольшего тела $T$.*




Фиг. 101.

Притяжения тела $S$ (фиг. 101) к телам $T$ и $P$ по соединении составляют полную силу, действующую на тело $S$. Эта сила направляется ближе к центру тяжести $O$ тел $T$ и $P$, нежели к большему из тел $T$, и ближе к обратной пропорциональности квадрату расстояния $SO$ до этого центра тяжести, нежели квадрату расстояния $ST$; на основании этого высказанное утверждение легко устанавливается.

### Предложение LXVIII. Теорема XXVIII

*Предполагая законы притяжений теми же самыми, утверждаю, что внешнее тело $S$ описывает радиусами, проведенными к центру тяжести внутренних тел $P$ и $T$, площади, более близкие к пропорциональности времени, и орбиту, более близкую к эллипсу, имеющему фокус в этом центре тяжести, если срединное и наибольшее тело, так же как и прочие тела, приводится этими притяжениями в движение, нежели в том случае, когда это тело, не подвергаясь притяжению, остается в покое или, подвергаясь гораздо более сильному или гораздо более слабому притяжению, возмущается в гораздо большей или гораздо меньшей степени.*

Это можно было бы доказать почти таким же образом, как и предложение LXVI, но более сложным рассуждением, которое поэтому опускаю. Достаточно будет оценить это дело так: из доказательства предыдущего предложения следует, что тот центр, к которому направляется действующее на тело $S$ (фиг. 101) составное притяжение двух прочих, ближе к их центру тяжести, нежели к наибольшему из тел. Если бы этот центр притяжения двух тел совпадал с их центром тяжести и общий центр тяжести всех трех тел находился бы в покое, то тело $S$ с одной стороны и сказанный центр тяжести двух прочих описывали бы в точности эллипсы вокруг общего центра тяжести всей системы, находящегося в покое. Это следует из предложения LVIII, следствия 2, по сопоставлении его с доказанным в предложениях LXIV и LXV. Поэтому эллиптическое движение несколько возмущается от несовпадения центра тяжести двух тел с тем центром, к которому притягивается тело $S$. Если же, кроме того, сообщить движение и центру тяжести всей системы, то возмущение еще увеличится. Поэтому возмущение наименьшее, когда общий центр тяжести в покое, а это будет, когда срединное и наибольшее тело притягивается по тем же законам, как и прочие; возмущение всегда будет больше, когда общий центр тяжести всех трех тел, вследствие уменьшения движение тела $T$, начнет двигаться и будет все более и более перемещаться.

*Следствие.* Отсюда можно заключить, что когда несколько меньших тел обращаются около наибольшего, то описываемые орбиты ближе подходят к эллиптическим, и описание площадей совершается более равномерно, когда эти тела взаимно притягиваются с ускорительными силами, прямо пропорциональными их абсолютным силам и обратно пропорциональными квадратам расстояния, и оттого возмущаются. Фокус всякой орбиты надо брать в общем центре тяжести всех внутренних тел (т. е. фокус первой и самой внутренней орбиты надо брать в центре тяжести наибольшего и самого внутреннего тела, фокус второй орбиты — в центре тяжести двух внутренних тел, фокус третьей орбиты — в центре тяжести трех внутренних и т. д.); при таком условии возмущения будут меньше, нежели в том случае, когда самое внутреннее тело было бы в покое и его бы взять за общий фокус всех орбит.

## Предложение LXIX. Теорема XXIX

*В системе многих тел $A$, $B$, $C$, $D$ и т. д., если какое-либо тело $A$ притягивает все прочие с ускорительными силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний до этого притягивающего тела, если также и второе тело $B$ притягивает все прочие тела $A$, $C$, $D$ и т. д. с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний до этого притягивающего тела, то абсолютные силы притягивающих тел $A$ и $B$ будут относиться друг к другу, как массы соответствующих тел, коим эти силы принадлежат.*

По предположению ускорительные силы притяжения всех тел $B$, $C$, $D$,... телом $A$ при равных их расстояниях до него между собою равны, точно так же все ускорительные силы притяжения прочих тел телом $B$ при равных их до него расстояниях между собою равны. Но абсолютная сила притяжения тела $A$ так относится к абсолютной силе притяжения тела $B$, как ускорительная сила притяжения всех тел телом $A$ относится к таковой же для тела $B$, при равных удалениях от этих тел. В таком же отношении находится и ускорительная сила притяжения тела $B$ телом $A$ к ускорительной силе притяжения тела $A$ телом $B$. Но это последнее отношение равно отношению массы[117] тела $A$ к массе тела $B$, ибо движущие силы, которые по определениям II, VII и VIII пропорциональны ускорительным силам и массам притягиваемых тел, по закону III между собою равны. Следовательно, абсолютная притягательная сила тела $A$ относится к абсолютной притягательной силе тела $B$, как масса тела $A$ к массе тела $B$.

*Следствие 1.* Таким образом, если каждое из тел системы $A$, $B$, $C$, $D$ и т. д. в отдельности притягивает все прочие с ускорительными силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний до притягивающего тела, то абсолютные силы всех этих тел будут пропорциональны их массам.

*Следствие 2.* В силу такого же рассуждения можно заключить, что если отдельные тела системы $A$, $B$, $C$, $D$, ..., рассматриваемые порознь, притягивают все прочие тела с ускорительными силами, которые пропорциональны или прямо, или обратно, какой-угодно степени расстояния до притягивающего тела или следуют вообще какому угодно закону в зависимости только от расстояния до притягивающего тела, то абсолютные силы этих тел пропорциональны их массам.

*Следствие 3.* В системе тел, в которой силы убывают пропорционально квадратам расстояний и меньшие тела обращаются с возможною точностью по эллипсам, имеющим своим фокусом центр наибольшего тела, описывая радиусами, проведенными к этому фокусу, площади, весьма близкие к пропорциональности временам, абсолютные силы тел относятся между собою или в точности, или весьма близко, как массы тел, и наоборот. Это следует из следствий предложения LXVIII и следствия 1 настоящего предложения.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Эти предложения приводят к пропорциональности между центростремительными силами и массами тех центральных тел, к которым эти силы направляются. Но разумно и такое предположение, что силы, которые направляются к какому-либо телу, зависят и от его величины и от его природы, как это имеет место для магнитов. Когда встречаются подобные случаи,

---

117 В тексте сказано: «ut massa corporis $A$ ad massam corporis $B$» — это есть одно из немногих мест в «Началах», где употреблен термин «massa corporis» — «масса тела», а не просто «corpus» — «тело», для выражения того же самого понятия.

то притяжение тел надо рассчитывать приписывая отдельным частицам соответствующие силы и составляя сумму сил. Под словом «притяжение» я разумею здесь вообще какое бы то ни было стремление тел к взаимному сближению, происходит ли это стремление от действия самих тел, которые или стараются приблизиться друг к другу, или которые приводят друг друга в движение посредством испускаемого эфира, или это стремление вызывается эфиром или воздухом, или вообще какою-либо средою, материальною или нематериальною, заставляющей погруженные в нее тела приводить друг друга в движение. В этом же смысле я употребляю и слово «натиск» или «напор», исследуя в этом сочинении не виды сил и физические свойства их, а лишь их величины и математические соотношения между ними, как объяснено в определениях. Математическому исследованию подлежат величины сил и те соотношения, которые следуют из произвольно поставленных условий. Затем, обращаясь к физике, надо эти выводы сопоставить с совершающимися явлениями, чтобы распознать, какие же условия относительно сил соответствуют отдельным видам обладающих притягательною способностью тел. После того как это сделано, можно будет с большею уверенностью рассуждать о родах сил, их причинах и физических между ними соотношениях. Итак, рассмотрим, с какими силами должны действовать друг на друга тела сферической формы, составленные вышеуказанным образом из частиц, и какие движения от этого должны происходить.

## ОТДЕЛ XII

## О ПРИТЯГАТЕЛЬНЫХ СИЛАХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ

### Предложение LXX. Теорема XXX

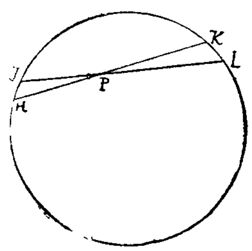
*Если к отдельным точкам сферической поверхности направлены равные центростремительные силы, убывающие в отношении квадратов расстояний до этих точек, то частица,*[118] *помещенная внутри этой поверхности, от таких сил ни в какую сторону притяжения не испытывает.*

[118] Под словом «точки» (puncta) сферической поверхности надо разуметь бесконечно малые элементы этой поверхности, причем притяжение каждым элементом предполагается пропорциональным его площади, так что притяжения элементами, равными по площади, равны; это и выражается словами: «к отдельным точкам поверхности направляются равные центростремительные силы».

Когда же говорится о «точках» тела, то надо разуметь бесконечно малые элементы его объема и принимать притяжение пропорциональным величине этого объема (для однородных тел).

Притягиваемую массу Ньютон обозначает словом «corpusculum» — «тельце»; в переводе принято слово «частица», «тело» или «масса», причем надо иметь в виду, что размеры этой притягиваемой частицы предполагаются бесконечно малыми, так что при теперешней терминологии эти слова равносильны термину «материальная точка».

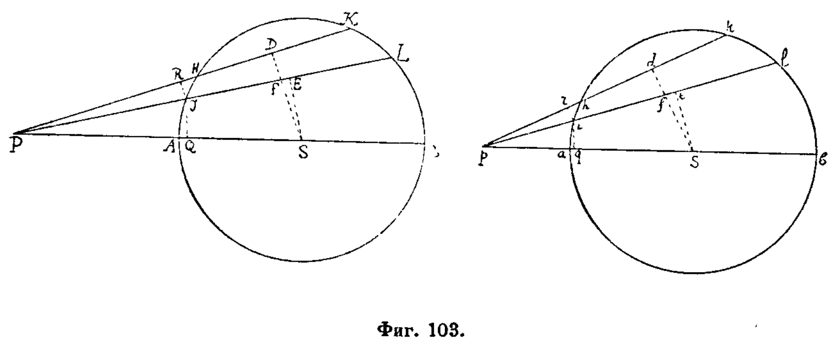
Пусть $HJKL$ (фиг. 102) — сказанная сферическая поверхность, $P$ — частица, внутри ее находящаяся; проведем через $P$ две прямые $HK$ и $JL$, заключающие весьма малые дуги $HJ$, $KL$; так как треугольники $HPJ$ и $LPK$ (лем. VII, след. 3) подобны, то эти весьма малые дуги будут пропорциональны расстояниям $HP$ и $PL$, и весьма малые части сферической поверхности, прилегающие к $HJ$ и $KL$ и ограниченные прямыми, проведенными через точку $P$, будут находиться в отношении квадратов длин $PH$ и $PK$, следовательно силы притяжения этих малых частей поверхности на точку $P$ между собою равны, ибо эти силы прямо пропорциональны этим частям поверхности и обратно пропорциональны квадратам расстояний. Эти же два отношения по перемножении дают 1, следовательно эти притяжения, направленные в противоположные стороны, взаимно уничтожаются. Из этого рассуждения следует, что притяжение всей сферической поверхности, как состоящее из противоположных элементов, уничтожаетсн, следовательно частица $P$ ни в какую сторону этим притяжением к движению не побуждается.




Фиг. 102.

**Предложение LXXI. Теорема XXXI**

*При тех же предположениях утверждаю, что частица, находящаяся вне сферической поверхности, притягивается к центру сферы с силою, обратно пропорциональною квадрату ее расстояния до центра сферы.*



Фиг. 103.

Пусть $AHKB$, $ahkb$ (фиг. 103) — две равных сферических поверхности, описанных из центров $S$ и $s$ на диаметрах $AB$ и $ab$, $P$ и $p$ — частицы, лежащие на продолжении этих диаметров. Проведем через $P$ и $p$ прямые $PHK$, $PJL$,

$phk$, $pil$, отсекающие от больших кругов $AHB$ и $ahb$ равные дуги $HK$ и $hk$, $JL$ и $il$, и опустим на эти прямые перпендикуляры $SD$ и $sd$, $SE$ и $se$, $JR$ и $ir$, из коих $SD$ и $sd$ пересекают $PL$ и $pl$ в $F$ и $f$. Опустим также на диаметры перпендикуляры $JQ$ и $iq$. Когда углы $DPE$ и $dpe$ бесконечно малые, то в виду равенств

$$DS = ds \quad \text{и} \quad ES = es$$

длины $PE$ с $PF$ и $pe$ с $pf$ и отрезочки $DF$ с $df$ можно счесть за равные, ибо предельные их отношения, при совместном исчезании углов $DPE$ и $dpe$, равны единице. На основании этого будет:

$$PJ : PF = RJ : DF$$

$$pf : pi = df : ri = DF : ri.$$

Отсюда

$$PJ \cdot pf : PF \cdot pi = Ri : ri = \smile HJ : \smile hi \quad \text{(лем. VII, след. 3).} \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$PJ : PS = JQ : SE$$

$$ps : pi = se : iq = SE : iq.$$

Откуда

$$PJ \cdot ps : PS \cdot pi = JQ : iq. \qquad (2)$$

По перемножении пропорций (1) и (2) получится

$$PJ^2 \cdot pf \cdot ps : pi^2 \cdot PF \cdot PS = (\smile JH) \cdot JQ : (\smile ih) \cdot iq,$$

последнее же отношение равно отношению частей сферических поверхностей (шаровых поясов), описываемых дугами $JH$ и $ih$ при обращении полукругов $AKB$ и $akb$ около диаметров $AB$ и $ab$. Силы же, с которыми отдельные элементы этих поясов притягивают к себе частицы $P$ и $p$, по предположению пропорциональны величине этих элементов и обратно пропорциональны квадратам расстояний до них, т. е. относятся друг к другу, как

$$pf \cdot ps : PF \cdot PS.$$

Но эти силы так относятся к своим составляющим (след. II законов), направленным по прямым $PS$ и $ps$ к центрам шаров, как $PJ : IQ$ и как $pi : pq$, т. е., в виду подобия треугольников $PJQ$ и $PSF$, $piq$ и $psf$, как $PS : PF$ и как $ps : pf$. Отсюда следует, что притяжение частицы $P$ к центру $S$ относится к притяжению $p$ к $s$, как

$$\frac{PF \cdot pf \cdot ps}{PS} : \frac{pf \cdot PF \cdot PS}{ps} = \frac{ps^2}{PS^2}.$$

На основании такого же рассуждения и притяжения поясов, описанных дугами, $KL$ и $kl$ находятся друг к другу в том же отношении $ps^2 : lS^2$, следовательно в этом же отношении будут находиться и притяжения всех шаровых поясов, на которые разобьется каждая из сферических поверхностей, если брать постоянно:

$$sd = SD \quad \text{и} \quad se = SE.$$

Слагая, получим, что и силы притяжения упомянутых частиц $P$ и $p$ целыми сферическими поверхностями будут находиться в том же отношении.

### Предложение LXXII. Теорема XXXII

*Если к отдельным точкам какого угодно шара направляются равные центростремительные силы, убывающие пропорционально квадратам расстояний до этих точек, и задается плотность шара и отношение его диаметра к расстоянию частицы до его центра, то я утверждаю, что частица притягивается пропорционально полудиаметру шара.*

Вообрази, что две частицы, каждая в отдельности, притягиваются двумя шарами, одна — одним, другая — другим, что расстояния частиц пропорциональны диаметрам соответствующих шаров и что эти шары разделены подобным образом на весьма малые элементарные объемы, расположенные подобным образом относительно притягиваемых частиц; тогда отношение притяжения одной частицы к отдельным элементам притягивающего ее шара к притяжению другой частицы к соответствующим элементам другого шара равно произведению прямого отношения этих элементарных объемов на обратное отношение квадратов расстояний до них. Но эти элементарные объемы пропорциональны полным объемам самих шаров, т. е. кубам диаметров, расстояния же по условию пропорциональны диаметрам, поэтому произведение вышеупомянутых прямого и обратного отношений равно отношению диаметров.

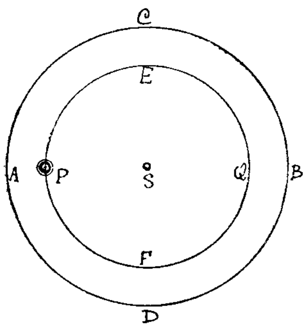
*Следствие 1.* Поэтому, если частицы обращаются по кругам вокруг шаров, состоящих из вещества, притягивающего одинаково, и расстояния частиц до центров шаров пропорциональны диаметрам, то времена обращения равны.

*Следствие 2.* Обратно, если времена обращения равны, то расстояния пропорциональны диаметрам. Оба эти следствия имеют место на основании следствия 3 предложения IV.

*Следствие 3.* Если к отдельным точкам двух каких угодно тел, между собою подобных, однородных и одинаковой плотности, направляются равные центростремительные силы, убывающие пропорционально квадратам расстояний, то силы, с которыми этими телами притягиваются частицы, сходственным образом расположенные, пропорциональны линейным размерам тел.

### Предложение LXXIII. Теорема XXXIII

*Если к отдельным точкам какого-либо шара направляются равные центростремительные силы, убывающие пропорционально квадратам расстояний до точек, то я утверждаю, что частица, находящаяся внутри шара, притягивается пропорционально ее расстоянию до центра шара.*



Фиг. 104.

Пусть в шаре $ABCD$ (фиг. 104), описанном из центра $S$, помещена частица $P$. Вообрази, что из центра $S$ радиусом $SP$ описана внутренняя сферическая поверхность $PEQF$. Очевидно (по предл. LXX), что концентрические сферические поверхности, из которых состоит слой $AEBF$, представляющий разность объемов шаров $ABCD$ и $PEQF$, не оказывают на частицу $P$ никакого действия, ибо их притяжения уравновешиваются. Остается только притяжение внутреннего шара, которое, по предложению LXXII, пропорционально расстоянию $PS$.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Поверхности, из коих слагаются тела, надо здесь разуметь не как поверхности чисто математические, а как чрезвычайно тонкие сферические слои, коих толщина как бы равна нулю, точнее говоря — как слои исчезающей толщины, из которых в пределе состоит шар, когда число этих слоев увеличивается, толщина же их уменьшается до бесконечности.

Подобно этому, под словом точки, из которых рассматриваются как бы состоящими линии, поверхности и тела, надо разуметь равные между собою частицы пренебрежимо малой величины.

### Предложение LXXIV. Теорема XXXIV

*При тех же предположениях утверждаю, что частица, расположенная вне шара, притягивается с силою, обратно пропорциональною квадрату ее расстояния до центра шара.*

Ибо если рассматривать, что шар состоит как бы из бесчисленного множества концентрических слоев, то притяжение каждого слоя обратно пропорционально квадрату расстояния частицы до центра шара (предл. LXXI). Слагая, получим, что и сумма этих притяжений, т. е. полное притяжение частицы шаром, следует той же пропорции.

*Следствие 1.* Поэтому в равных расстояниях от центров однородных шаров притяжения пропорциональны объемам этих шаров, ибо по предложению LXXII, когда расстояния пропорциональны диаметрам шаров, то силы притяжения пропорциональны этим же диаметрам. Если бо́льшее расстояние уменьшить в этом отношении, после чего расстояния станут равными, то сила притяжения увеличится в отношении, равном второй степени предыдущего, и следовательно, притяжения шаров будут относиться друг к другу, как кубы диаметров, т. е. как объемы шаров.

*Следствие 2.* При любых расстояниях, притяжения шаров пропорциональны объемам шаров, разделенным на квадраты расстояний.

*Следствие 3.* Если частица, находящаяся вне однородного шара, притягивается силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния до его центра, и шар состоит из притягивающих частиц, то сила притяжения каждой частицы убывает пропорционально квадрату расстояния до этой частицы.

### Предложение LXXV. Теорема XXXV

*Если к отдельным точкам заданного шара направляются равные центростремительные силы, убывающие пропорционально квадратам расстояний до этих точек, то я утверждаю, что любой такой шар притягивается первым с силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния между центрами шаров.*

Притяжение каждой отдельной частицы обратно пропорционально квадрату ее расстояния до центра притягивающего шара (предл. LXXIV) и, следовательно, такое же, как будто бы оно происходило от одной частицы, помещенной в центре шара. Полное же притяжение всего шара такое же, как и обратное ему притяжение сказанной частицы, если рассматривать, что она притягивается каждою частицею второго шара с такою же силою, с какою она сама притягивает эту частицу. Но это притяжение частицы шаром обратно пропорционально квадрату ее расстояния до центра шара, следовательно и равное ему притяжение шаров следует той же пропорции.

*Следствие 1.* Притяжения шарами других однородных шаров пропорциональны объемам[119] (массам) притягивающих шаров, разделенным на квадраты расстояний их центров до центров притягиваемых шаров.

*Следствие 2.* То же самое имеет место и в том случае, когда притягиваемый шар сам притягивает. Так как отдельные его точки притягивают отдельные точки другого с тою же самою силою, с какою сами притягиваются ими, ибо по закону III во всяком притяжении одинаково побуждается как точка притягиваемая, так и притягивающая, то и будут образовываться две взаимные притягательные силы, сохраняющие ту же пропорцию.

*Следствие 3.* Все что было доказано выше относительно движения тел вокруг фокуса конических сечений имеет место и в том случае, когда в фокусе находится притягивающий шар и тела движутся вне шара.

*Следствие 4.* Все же доказанное относительно движения тел вокруг центра конических сечений имеет место, когда движение совершается внутри шара.

### Предложение LXXVI. Теорема XXXVI

*Если плотность и притягательная сила вещества неоднородного шара, при переходе от его центра к поверхности, изменяются как угодно, в равных же удалениях от центра повсюду одни и те же, притягательная же сила каждой отдельной точки убывает пропорционально квадратам расстояний до притягиваемого тела, то я утверждаю, что полная сила, с которою такой шар притягивает другой такой же, обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами шаров.*

Пусть $AB$, $CD$, $EF$ (фиг. 105) суть какие-либо шары одноцентренные и одинаковой плотности, тогда, прилагая внутренние к наружным, получим шар, плотность вещества которого возрастает по направлению к центру, вычитая же их получим шар, коего плотность убывает к центру. Такие шары, каждый в отдельности, по предложению LXXV, притягивают любые другие однородные шары $GL$, $JK$, $LM$ с силою, обратно пропорциональною квадрату расстояния $SP$ между центрами. Слагая или вычитая, получим, что сумма или разность сказанных притяжений будет находиться в том же отношении, т. е. что полные силы, с которыми притягиваются шары $AB$ и $GH$, составленные из сумм или разностей концентрически однородных шаров, находятся в сказанном отношении. Увеличивая число концентрических шаров до бесконечности так, чтобы плотность вместе с притягательною силою возрастала

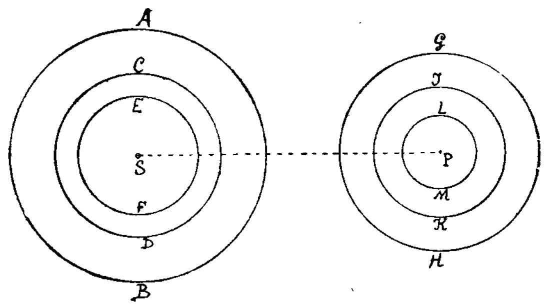
[119] В тексте сказано: «ut sphaerae», что можно перевести и словами «пропорциональны объемам шаров» или «массам шаров».

или убывала по какому угодно закону от поверхности к центру, и заполняя материей, не обладающей притягательной силой, те места, где плотность оказалась бы отрицательной, получим шар любого желаемого строения. Притяжение таким шаром другого, подобным же образом составленного, будет попрежнему, на основании рассуждения, изложенного выше, обратно пропорционально квадрату расстояния между их центрами.

*Следствие 1.* Поэтому, если несколько подобного рода шаров притягиваются взаимно, то ускорительные силы притяжения каждым отдельным шаром другого будут, в равных от центра расстояниях, пропорциональны массам притягивающих шаров.

*Следствие 2.* При различных же расстояниях эти силы пропорциональны массам, разделенным на квадраты расстояний до центров.

*Следствие 3.* Движущие силы притяжений, иначе — веса одного шара на другом при равных расстояниях между центрами, будут пропорциональны произведениям масс притягивающего и притягиваемого шара.




Фиг. 105.

*Следствие 4.* При неравных расстояниях эти силы прямо пропорциональны сказанному произведению масс и обратно пропорциональны квадратам расстояний.

*Следствие 5.* То же самое имеет место и тогда, когда притяжение происходит оттого, что оба шара одарены притягательною способностью и действуют взаимно друг на друга. Ибо притяжение будет образовываться обеими силами и пропорция останется прежней.

*Следствие 6.* Если шары такого рода обращаются около других таковых же, каждый порознь около другого ему соответствующего, находящегося в покое, и расстояния между центрами шаров, покоящихся и обращающихся, пропорциональны диаметрам покоящихся, то времена обращения будут одинаковы.

*Следствие 7.* Наоборот, если времена обращения равны, то расстояния пропорциональны диаметрам.

*Следствие 8.* Все доказанное выше относительно движения тел вокруг фокусов конических сечений имеет место и в том случае, когда в фокусах помещаются шары описанного выше вида и строения.

*Следствие 9.* То же будет и тогда, когда обращающиеся тела суть также притягивающие шары описанного вида и строения.

### Предложение LXXVII. Теорема XXXVII

***Если к отдельным точкам шаров направляются центростремительные силы, пропорциональные расстояниям точек до притягиваемых тел, то я утверждаю, что полное взаимное притяжение двух таких шаров пропорционально расстоянию между центрами их.***

***Случай 1.*** Пусть $AEBF$ (фиг. 106) — шар, $S$ — его центр, $P$ — притягиваемая частица, $PASB$ — ось шара, проходящая через центр частицы, $EF$ и $ef$ — две плоскости, перпендикулярные к оси, равноудаленные от центра шара и пересекающие шар, $G$, $g$ — точки пересечения оси и этих плоскостей, $H$ — любая точка плоскости $EF$.

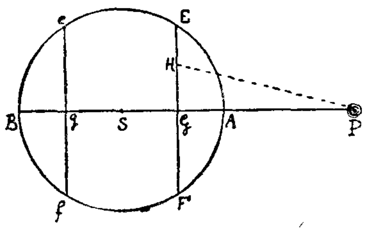
Сила, с которою точка $H$ действует на частицу $P$, пропорциональна расстоянию $PH$, следовательно ее слагающая, направленная к центру $S$ по прямой $PG$, пропорциональна длине $PG$, значит притяжение всех точек плоскости $EF$, т. е. полная сила притяжения частицы $P$ этою плоскостью по направлению к центру $S$, пропорциональна длине $PG$, умноженной на число точек, т. е. пропорциональна объему цилиндра, коего основание равно $EF$ и высота $PG$. Подобно этому и притяжение частицы $P$ плоскостью $ef$, направленное к центру $S$, пропорционально произведению площади $cf$ на длину $Pg$, т. е. и произведению равной ей площади $EF$ на длину $Pg$. Сумма сил, происходящих от обеих плоскостей, будет пропорциональна площади $EF$, умноженной на сумму $PG + Pg$, т. е. величине $2EF \cdot PS$ или $(EF + ef) \cdot PS$. Рассуждая таким же образом, получим, что силы, происходящие от всех прочих сечений шара, произведенных равноудаленными от центра плоскостями, пропорциональны сумме площадей этих сечений, умноженных на расстояние $PS$, т. е. пропорциональны массе всего шара и расстоянию $PS$.

***Случай 2.*** Если частица $P$ притягивает шар $AEBF$, то рассуждая подобным же образом докажем, что сила, с которою этот шар ею притягивается, пропорциональна расстоянию $PS$.

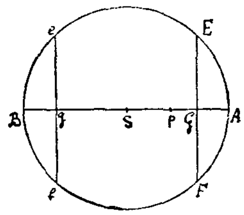
***Случай 3.*** Пусть второй шар состоит из бесчисленного множества таких частиц, как $P$; так как сила, с которою каждая отдельная его частица притягивается к центру первого шара, пропорциональна массе этого шара и расстоянию до его центра $S$, то это притяжение такое же, какое происходило бы от одной частицы, расположенной в этом центре $S$. Полная сила, с которою притягиваются все частицы второго шара, т. е. сила, с которою притягивается этот второй шар, та же самая, как если бы это притяжение происходило от одной частицы, помещенной в центре первого шара; поэтому это притяжение пропорционально расстоянию между центрами шаров.

*Случай 4.* Если оба шара притягивают друг друга, то и обе соединенные силы следуют той же пропорции.

*Случай 5.* Положим теперь, что частица $p$ расположена внутри шара $AEBF$ (фиг. 107). Так как сила притяжения частицы $p$ плоскостью $ef$ пропорциональна произведению $ef \cdot pg$ и обратно ей направленная сила притяжения плоскостью $EF$ пропорциональна произведению $EF \cdot pg$, то сила, соста-




Фиг. 106.




Фиг. 107.

вленная из этих двух, пропорциональна разности этих произведений, иначе — сумме двух равных площадей сечения на полуразность расстояний, т. е. пропорциональна произведению этой суммы на расстояние $pS$ частицы до центра шара. Совершенно так же притяжение всех таких сечений, как $EF$ и $ef$, во всем шаре, т. е. притяжение всего шара, пропорционально сумме всех площадей, т. е. массе всего шара и расстоянию $pS$ частицы до его центра.

*Случай 6.* Если из бесчисленного множества частиц таких, как $p$, составляется новый шар, расположенный внутри первого $AEBF$ (фиг. 107), то, подобно предыдущему, можно доказать, что притяжения как простое одним шаром другого, так и взаимное их друг другом, пропорциональны расстоянию $pS$ между центрами шаров.

### Предложение LXXVIII. Теорема XXXVIII

***Если плотность и притягательная сила вещества не однородного шара, при переходе от его центра к поверхности, изменяются как угодно, в равных же удалениях от центра повсюду одинаковы, притяжение же всякой точки пропорционально расстоянию притягиваемого тела до нее,***

*то я утверждаю, что сила, с которою два шара такого рода притягивают друг друга, пропорциональна расстоянию между центрами их.*

Это предложение можно доказать, на основании предыдущего, совершенно так же, как предложение LXXVI доказано на основании LXXV.

*Следствие.* Доказанное выше в предложениях X и LXIV о движении тел вокруг центра конических сечений имеет место и в том случае, когда все притяжения происходят от шаров описанных выше свойств и притягиваемые тела также — шары таких же свойств.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Я дал изложение двух замечательнейших случаев притяжения, а именно когда центростремительные силы или убывают пропорционально квадратам расстояний, или же возрастают пропорционально расстояниям. Вследствие таких притяжений, тела в обоих случаях обращаются по коническим сечениям, и полные составные притяжения тел шаровой формы следуют тем же законам возрастания или убывания при удалении от центра, как и силы между двумя частицами, что достойно того, чтобы быть замеченным. Разбирать в подробностях прочие случаи, приводящие к менее изящным выводам, было бы длинно. Я предпочитаю их объять и определить все совместно следующим общим методом.[120]

## Лемма XXIX

*Если из центра $S$ описать какой-либо круг $AEB$ и из центра $P$ — два круга $EF$ и $ef$, пересекающие первый в точках $E$ и $e$, прямую же $PS$ в $F$ и $f$, и на $PS$ опустить перпендикуляры $ED$ и $ed$, то я утверждаю, что если расстояние между дугами $EF$ и $ef$ уменьшать до бесконечности, то предельное отношение исчезающих длин $Dd$ и $Ff$ равно отношению $PE$ к $PS$.*

Ибо, если прямая $Pe$ (фиг. 108) пересекает дугу $EF$ в $q$ и прямая $Ee$, которая совпадает с исчезающей дугой $Ee$, по продолжении пересекает прямую $PS$ в $T$, и из точки $S$ опускается на $PE$ нормаль $SG$, то по подобию треугольников $DTE$, $dTe$, $DES$ будет

$$Dd : Ee = DT : TE = DE : ES$$

и по подобию треугольников $Eeq$, $ESG$ (лем. VIII и лем. VII, след. 3) будет

$$Ee : eq = Ee : Ff = ES : SG$$

---

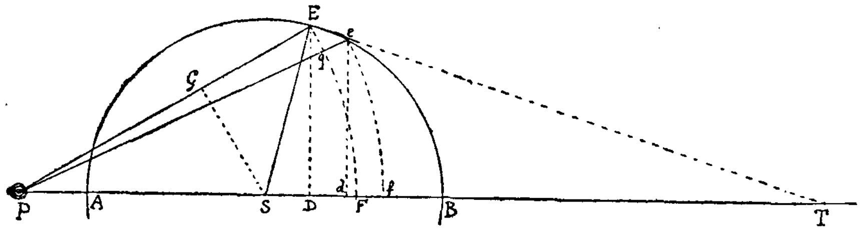
120 В предыдущих предложениях учение о притяжении шаров изложено чисто геометрически — общий метод, на который указывается в этом поучении, применяемый в дальнейшем, состоит в приведении задачи к квадратурам

по перемножении этих пропорций получается

$$Dd : Ff = DE : SG$$

откуда, по подобию треугольников $PDE$ и $PGS$, следует

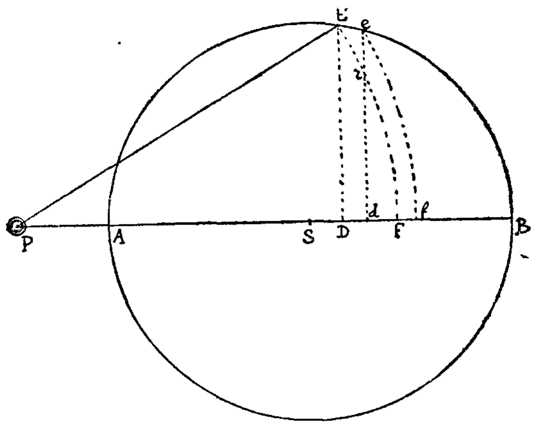
$$Dd : Ff = DE : SG = PE : PS.$$




Фиг. 108.

### Предложение LXXIX. Теорема XXXIX

*Если площадь $EFef$, коей ширина $Ff$, уменьшаясь до бесконечности, почти исчезает, описывает при своем обращении около оси $PS$ сферическое выпукло-вогнутое тело, и к отдельным равным его частицам направляются равные центростремительные силы, то я утверждаю, что это тело притягивает массу, находящуюся в точке $P$, с силою, пропорциональною произведению $DE^2 \cdot Ff$ и той силе, с которою заданная частица тела, будучи помещена в $Ff$, притягивала бы массу $P$.*




Фиг. 109.

Рассмотрим сперва силу притяжения сферической поверхности, образуемой вращением дуги $FE$ (Фиг. 109). Пусть эта дуга пересекается прямою $de$ в $r$, тогда элемент $Er$ произведет при вращении шаровой пояс, поверхность коего при заданном радиусе $PE$ пропорциональна $Dd$, как это доказано *Архимедом* в книге: «*О шаре и цилиндре*». Силы притяжения элементов поверхности этого пояса, направленные по производящим конуса $PE$ или $Pr$, пропорциональны поверхности пояса, т. е. длине $Dd$, составляющие же этих сил по направлению $PS$

меньше самих сил в отношении $\frac{PD}{PE}$, т. е. эти составляющие пропорциональны $PD \cdot Dd$. Если вообразить, что линия $DF$ разделена на бесчисленное множество равных частей, из коих какая-нибудь обозначена через $Dd$, то и поверхность $EF$ разобьется на столько же равных поясов, коих сила притяжения будет пропорциональна сумме всех произведений $PD \cdot Dd$; эта же сумма равна

$$\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$$

т. е.

$$\frac{1}{2}DE^2$$

значит сказанное притяжение пропорционально $DE^2$.

Если поверхность $FE$ умножить на высоту $Ff$, то получится, что притяжение массы $P$ объемом $EFef$ пропорционально $DE^2 \cdot Ff$, предполагая, что когда задана частица $Ff$, то задана и сила, с которою она действует на массу $P$, если же эта сила не задается, то притяжение тела $EFef$ будет пропорционально произведению $DE^2 \cdot Ff$ и той силе, с которою частица $Ff$ притягивает массу $P$.

### Предложение LXXX. Теорема XL

*Если к отдельным частицам шара $ABE$, коего центр $S$, направляются равные центростремительные силы, и к оси шара $AB$, на коей лежит масса $P$, проводятся в точках $D$ перпендикуляры $DE$, пересекающие поверхность шара в $E$, и по ним откладываются длины $DN$, пропорциональные величине $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$ и силе, с которою частица шара, лежащая на оси в расстоянии $PE$, действует на массу $P$, то я утверждаю, что полная сила притяжения массы $P$ шаром пропорциональна площади $ANB$, ограниченной осью $AB$ и кривою $ANB$, на которой постоянно лежит точка $N$.*

Сохраняя обозначения и построения предыдущих леммы и теоремы, вообрази, что ось шара $AB$ (фиг. 110) разделена на бесчисленное множество равных частей $Dd$ и что шар разделен на такое же число выпукло-вогнутых слоев $EFfe$, и проведи перпендикуляр $dn$.

По предыдущей теореме сила, с которою слой $EFfe$ притягивает массу $P$, пропорциональна $DE^2 \cdot Ff$ и силе притяжения одной частицы при расстоянии $PE$ или $PF$. Но по последней лемме имеем

$$Dd : Ff = PE : PS$$

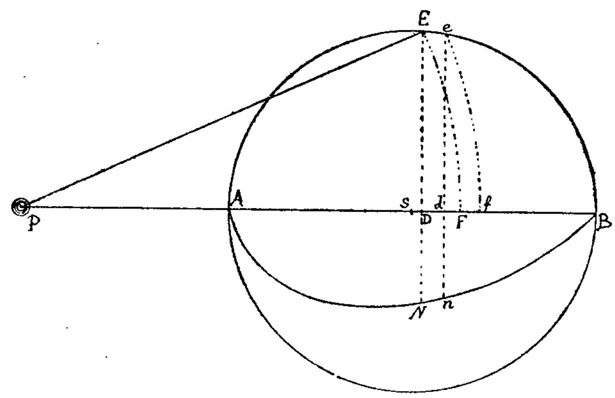
следовательно

$$Ff = \frac{PS \cdot Dd}{PE}$$

и

$$DE^2 \cdot Ff = Dd \cdot \frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

значит притяжение слоя $EFfe$ пропорционально величине $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE} \cdot Dd$ и силе притяжения одной частицы при расстоянии $PF$, т. е. по предположению величине $DN \cdot Dd$, представляющей исчезающую площадку $DNnd$. Следовательно, притяжение массы $P$ всеми слоями пропорционально сумме площадок $DNnd$, т. е. всей площади $ANB$.




Фиг. 110.

*Следствие 1.* Так, напр., если центростремительная сила к отдельным частицам одна и та же при всяком расстоянии и ордината $DN$ берется пропорциональной $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$, то полная сила будет пропорциональна площади $ANB$.

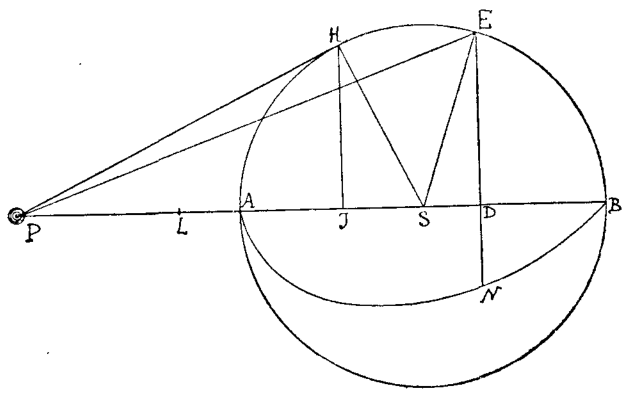
*Следствие 2.* Если центростремительная сила к каждой отдельной частице обратно пропорциональна расстоянию ее до притягиваемой массы $P$, то взяв ординату $DN$ пропорционально $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^2}$, получим, что притяжение массы $P$ шаром будет пропорционально площади $ANB$.

*Следствие 3.* Если центростремительная сила к каждой отдельной частице будет обратно пропорциональна кубу расстояния ее до притягиваемой массы $P$, то взяв ординату $DN$ пропорционально $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^4}$, получим, что притяжение этой массы шаром будет пропорционально площади $ANB$.

*Следствие 4.* Вообще, если центростремительная сила, направляющаяся к каждой отдельной частице шара, обратно пропорциональна величине $V$ и ордината $DN$ пропорциональна $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE} \cdot \frac{1}{V}$, то полное притяжение массы $P$ шаром будет пропорционально площади $ANB$.

### Предложение LXXXI. Задача XLI

*Сохраняя предыдущие обозначения, требуется измерить площадь $ANB$.*




Фиг. 111.

Из точки $P$ (фиг. 111) проводится к шару касательная $PH$, из точки $H$ на ось опускается перпендикуляр $HJ$, и длина $PJ$ разделяется точкою $L$ пополам, тогда будет (предл. XII, кн. II Элем.)

$$PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS \cdot SD,$$

но по подобию треугольник в $SJH$ и $SHJ$

$$SE^2 = SH^2 = PS \cdot SJ,$$

следовательно

$$PE^2 = PS(PS + SJ + 2SD) = PS(2LS + 2SD) = 2PS \cdot LD,$$

а так как

$$DE^2 = SE^2 - SD^2 = SE^2 - LS^2 + 2SL \cdot LD - LD^2 =$$
$$= 2SL \cdot LD - LD^2 - AL \cdot LB,$$

ибо

$$LS^2 - SE^2 = LS^2 - SA^2 = AL \cdot LB \quad \text{(предл. VI, кн. II Элем.),}$$

то написав вместо $DE^2$ вышеприведенную равную ему величину, получим

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE} \cdot \frac{1}{V} = DN = \frac{2SL \cdot LD \cdot PS}{PE \cdot V} - \frac{LD^2 \cdot PS}{PE \cdot V} - \frac{AL \cdot LB \cdot PS}{PE \cdot V}.$$

Если подставить в это последнее выражение вместо $V$ обратную величину центростремительной силы и вместо $PE$ его величину $\sqrt{2PS \cdot LD}$, то каждый из трех членов предыдущего выражения, по представлении его ординатою отдельной кривой, даст такую площадь, которая находится по обыкновенным правилам.[121]

---

[121] Этою теоремою устанавливается выражение слагающей притяжения тех элементарных объемов, на которые шар разбивается по оси, направленной от притягиваемой точки к центру шара, чтобы свести таким образом вычисление этого притяжения к квадратурам.

Обозначая через $q$ — плотность, через $r$ — расстояние $PE$ до притягиваемой точки от притягивающей частицы $dm$, через $f(\rho)$ — силу притяжения между двумя массами, равными 1 при расстоянии $\rho$, и полагая

$$PS = l, \quad AS = SB = a, \quad DE = y \quad \text{и} \quad Ff = dr$$

и обозначая через $X$ полное притяжение на 1 массы в точке $P$, можем написать на основании доказанного в теореме:

$$dX = \pi q \cdot y^2 \cdot dr \tag{1}$$

и следовательно,

$$X = \pi q \cdot \int_{l-a}^{l+a} y^2\, dr. \tag{2}$$

Выражение $y^2$ в функции $r$ и преобразование его к новой переменной приводится в теореме XL. Даваемые здесь формулы можно получить несколько иначе: величина $DE = y$ есть высота треугольника $PES$; поэтому, обозначив его площадь через $Q$, имеем

$$2Q = PS \cdot DE = l \cdot y$$

с другой стороны,

$$16Q^2 = (l + a + r)(l + a - r)[r + (l - a)] \cdot [r - (l - a)]$$
$$= [(l + a)^2 - r^2] \cdot [r^2 - (l - a)^2]$$

следовательно будет

$$y^2 = \left[\frac{(l + a)^2}{2l} - \frac{r^2}{2l}\right] \cdot \left[\frac{r^2}{2l} - \frac{(l - a)^2}{2l}\right]$$

и значит,

$$X = \pi q \int_{l-a}^{l+a} \left[\frac{(l + a)^2}{2l} - \frac{r^2}{2l}\right] \cdot \left[\frac{r^2}{2l} - \frac{(l - a)^2}{2l}\right] f(r) \cdot dr. \tag{3}$$

Ньютон вводит новую переменную

$$x = \frac{r^2}{2l} \tag{4}$$

тогда полагая для краткости

$$\frac{(l + a)^2}{2l} = H; \quad \frac{(l - a)}{2l} = h, \tag{5}$$

будем иметь

$$X = \pi q \cdot \int_h^H [H - x] \cdot [x - h] \cdot \frac{l}{r} \cdot f(r)\, dx$$
$$= \pi q \cdot \int_h^H \left[(H + h) \cdot x \cdot \frac{l}{r} \cdot f(r) - H \cdot h \cdot \frac{l}{r} f(r) - \frac{x^2 \cdot l}{r} \cdot f(r)\right] dx. \tag{6}$$

*Пример 1.* Сила притяжения отдельной частицы обратно пропорциональна расстоянию.

В этом случае вместо $V$ надо в выражении $DN$ написать $PE$ и затем вместо $PE^2$ — величину $2PS \cdot LD$; будем иметь

$$DN = SL - \frac{1}{2} LD - \frac{AL \cdot LB}{2LD}.$$

Возьми вместо $DN$ удвоенную его величину

$$2SL - LD - \frac{AL \cdot LB}{LD},$$

тогда: часть $2SL$ полной ординаты $DN$, при проведении ее по основанию $AB$, опишет площадь прямоугольника $2SL \cdot AB$; переменная часть $LD$, при проведении ее вдоль по $AB$ непрерывным движением так, чтобы эта ордината была постоянно нормальна к $AB$ и длина ее постоянно равнялась бы расстоянию $LD$ ее основания до точки $L$, опишет площадь $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, т. е. площадь $SL \cdot AB$; третья часть $\frac{AL \cdot LB}{LD}$, при проведении вдоль по $AB$ от $A$ до $B$, опишет гиперболическую площадь, которая, по вычитании из площади $SL \cdot AB$, и доставит искомую площадь $ANB$. Отсюда следует такое построение: в точках $L$, $A$ и $B$ (фиг. 112) восставь перпендикуляры $Ll$, $Aa$, $Bb$ и отложи

$$Aa = LB, \quad Bb = LA$$

---

Это и есть та формула, которая дана в тексте. В самом деле, по построению фиг. 111 имеем:

$$PH^2 = PS^2 - SH^2 = l^2 - a^2; \quad PS = \frac{PH^2}{PS} = \frac{l^2 - a^2}{l},$$

значит

$$PL = LJ = \frac{l^2 - a^2}{2l}; \quad LS = PS - PL = \frac{l^2 + a^2}{2l}$$

$$LA = LS - AS = \frac{(l-a)^2}{2l} = h; \quad LB = LA + AB = \frac{(l+a)^2}{2l} H, \tag{7}$$

и в предложении LXXXI показано, что

$$PE^2 = 2PS \cdot LD$$

иначе,

$$r^2 = 2l \cdot LD, \qquad (8$$

что, по сличении с формулою (4), показывает, что

$$x = LD,$$

следовательно

$$(H + h)x = 2SL \cdot LD; \quad x^2 = LD^2; \quad H \cdot h = AL \cdot LB,$$

и вместе с тем, при сделанном обозначении:

$$\frac{1}{V} = f(r); \quad PS = l; \quad PE = r.$$

Примеры предложения LXXXI состоят в вычислении интеграла (6) при разных заданиях функции $f(r)$. Множителя $\pi q$ Ньютон не пишет, ибо вычисляет лишь величину, пропорциональную притяжению.

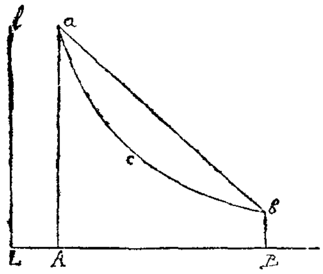
и через точки $a$ и $b$ проведи гиперболу $ab$ с асимптотами $Ll$ и $LB$; хорда $ab$ и замкнет искомую площадь $acba = ANB$.

*Пример 2.* Если сила притяжения отдельных частиц обратно пропорциональна кубу расстояния, или, что то же самое, отношению этого куба к какой-либо заданной площади, то вместо $V$ подставь $\frac{PE^3}{2SA^2}$ и вместо $PE^2$ $2PS \cdot LD$, тогда $DN$ будет пропорционально

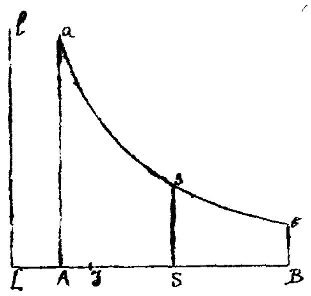
$$\frac{SL \cdot AS^2}{PS \cdot LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{AL \cdot LB \cdot AS^2}{2PS \cdot LD^2}$$

а так как

$$AS^2 = PS \cdot SJ$$




Фиг. 112.




Фиг. 113.

то $DN$ будет пропорционально

$$\frac{LS \cdot SJ}{LD} - \frac{1}{2} SJ - \frac{AL \cdot LB \cdot SJ}{2LD^2}.$$

По проведении этих трех частей ординаты $DN$ вдоль по прямой $AB$ от $A$ до $B$, первая часть $\frac{LS \cdot SJ}{LD}$ произведет гиперболическую площадь, вторая даст прямоугольник $\frac{1}{2} AB \cdot SJ$, третья даст площадь

$$\frac{AL \cdot LB \cdot SJ}{2} \cdot \left[\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}\right] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SJ.$$

Вычтя из первой площади вторую и третью, получим искомую площадь $ANB$. Отсюда следует такое построение: в точках $L, A, S, B$ (фиг. 113) восставь перпендикуляры: $Ll$, $Aa$, $Ss$, $Bb$, из коих $Ss$ равен $SJ$, после чего через точку $S$ проведи гиперболу $asb$, имеющую асимптотами $Ll$ и $LB$ и пересекающую перпендикуляры $Aa$ и $Bb$ в точках $a$ и $b$; по вычитании из гиперболической площади $AasbB$ площади прямоугольника $2AS \cdot SJ$ и останется искомая площадь $ANB$.

*Пример 3.* Если центростремительная сила к отдельным частицам шара убывает пропорционально четвертой степени расстояния до частицы то написав $\frac{PE^4}{2AS^3}$ вместо $V$ и $\sqrt{2PS \cdot LD}$ вместо $PE$, получим, что ордината $DN$ пропорциональна величине

$$\frac{SJ^2 \cdot SL}{\sqrt{2} \cdot SJ \cdot \sqrt{LD^3}} - \frac{SJ^2}{2\sqrt{2SJ} \cdot \sqrt{LD}} - \frac{SJ^2 \cdot AL \cdot LB}{2\sqrt{2} \cdot SJ} \cdot \frac{1}{\sqrt{LD^5}}.$$

По проведении этой ординаты вдоль прямой $AB$, полученная площадь

$$\frac{2SJ^2 \cdot SL}{\sqrt{2} \cdot SJ}\left[\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right] - \frac{SJ^2}{\sqrt{2SJ}}\left[\sqrt{LB} - \sqrt{LA}\right] -$$
$$- \frac{SJ^2 \cdot AL \cdot LB}{3\sqrt{2} \cdot SJ}\left[\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}\right]$$

отдельные части которой образуются соответствующими частями ординаты $DN$, что, по надлежащем упрощении, дает

$$\frac{2SJ^2 \cdot LS}{LJ} - SJ^2 - SJ^2 - \frac{2SJ^3}{3LJ} = \frac{4SJ^3}{3LJ}.$$

Следовательно, полное притяжение массы $P$ шаром пропорционально $\frac{SJ^3}{PJ}$ т. е. обратно пропорционально $PS^3 \cdot PJ$.

Подобным же образом могло бы быть найдено и притяжение массы, лежащей внутри шара, но это делается проще при помощи следующей теоремы.

### Предложение LXXXII. Теорема XLI

*Если для шара, коего центр $S$ и радиус $SA$, взять расстояния $SJ$ и $SP$ так, чтобы было*

$$SJ : SA = SA : SP$$

*то отношение притяжения шаром внутренней точки $J$ к притяжению внешней точки $P$ равно произведению отношения $\sqrt{SJ} : \sqrt{SP}$ на корень квадратный из отношения притяжений точек $P$ и $J$ центром шара.*[122]

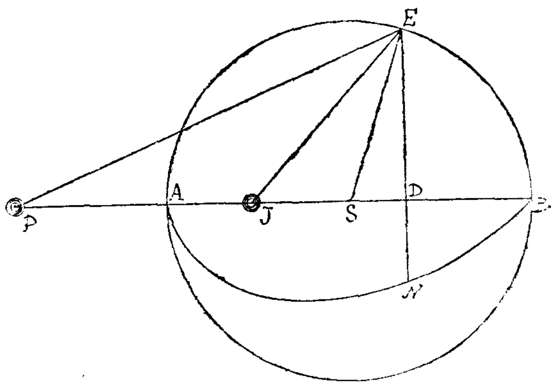
[122] Эта теорема послужила В. Томсону (лорду Кельвину) основанием того преобразования, которое им названо «построением электрического изображения»; именно, так им названа точка $J$ по отношению к точке $P$, и обратно.

По этой теореме, если притяжения отдельных частиц шара обратно пропорциональны расстоянию, то отношение силы, с которою масса, помещенная в $J$ (фиг. 114), притягивается шаром, к той силе, с которою она им притягивалась бы, будучи помещенной в $P$, равно

$$\frac{\sqrt{SJ}}{\sqrt{SP}} \cdot \frac{\sqrt{SP}}{\sqrt{SJ}} = 1$$

т. е. эти притяжения равны.

Подобным же образом увидим, что когда притяжение частиц обратно пропорционально квадратам расстояний, то отношение притяжения в точке $J$ к притяжению в точке $P$ равно отношению $SP$ к $SA$. Если притяжение частиц обратно пропорционально кубу расстояний, то отношение притяжения в точке $J$ к притяжению в точке $P$ равно $SP^2 : SA^2$. Если притяжение частиц обратно пропорционально четвертой степени расстояний, то сказанное отношение равно $SP^3 : SA^3$; но для этого последнего случая уже было найдено, что притяжение на точку $P$ обратно пропорционально $SP^3 \cdot PJ$, следовательно притяжение на точку $J$ будет обратно пропорционально $SA^3 \cdot PJ$, т. е. обратно пропорционально $PJ$, ибо $SA$ постоянно. Подобным образом надо поступать и для всякого другого случая.



Фиг. 114.

Теорема эта доказывается так: сохраняя прежние построения и предполагая, что притягиваемая масса помещена в $P$, было найдено, что ордината $DN$ пропорциональна $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot V}$. Поэтому, если провести $JE$, то когда притягиваемая масса будет помещена в $J$, сказанная ордината будет пропорциональна $\frac{DE^2 \cdot JS}{JE \cdot V}$. Предположим, что притягательные силы частиц шара, исходящие из какой-либо его точки $E$ в расстояниях $JE$ и $PE$, относятся между собою, как $PE^n : JE^n$; тогда сказанные ординаты будут соответственно пропорциональны

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot PE^n}$$

и

$$\frac{DE^2 \cdot JS}{JE \cdot JE^n}$$

коих отношение равно

$$PS \cdot JE \cdot JE^n : JS \cdot PE \cdot PE^n$$

но так как, в виду пропорции

$$SJ : SE = SE : SP$$

треугольники $SPE$ и $SEJ$ подобны, то

$$JE : PE = JS : SE = JS : SA \qquad (*)$$

и предыдущее отношение, по замене произведения $PE \cdot JS$ равным ему произведением $JE \cdot SA$, обратится в такое:

$$PS \cdot JE^n : SA \cdot PE^n;$$

но отношение

$$PS : SA = \sqrt{PS} : \sqrt{JS}$$

и отношение

$$JE^n : PE^n$$

в виду пропорции (*) равно корню квадратному из отношения сил в расстояниях $PS$ и $JS$. Следовательно, ординаты $DN$, а значит, и площади кривых $ANB$, коим притяжения пропорциональны, будут находиться в этом отношении.

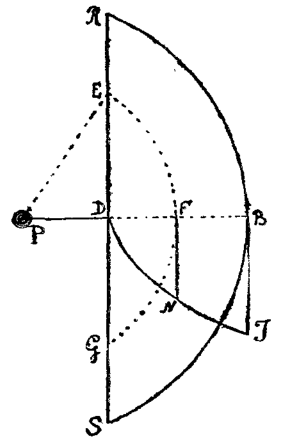
### Предложение LXXXIII. Задача XLII

*Найти силу, с которою масса, помещенная в центре шара, притягивается его сегментом.*

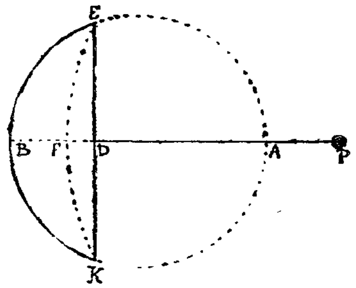
Пусть $P$ (фиг. 115) есть масса, помещенная в центре шара, $RBSD$ — сегмент этого шара, заключенный между плоскостью $RSD$ и частью шаровой поверхности $RBS$. Пусть $DB$ пересекается с шаровой поверхностью $EFG$, описанной из центра $P$ в точке $F$, так что сегмент разделяется на части $BREFGS$ и $FEDG$. Пусть, кроме того, эта поверхность не математическая, а физическая, имеющая весьма малую толщину $h$, тогда объем такого слоя (по доказанному Архимедом) будет пропорционален $PF \cdot DF \cdot h$. Положим, кроме того, что притяжение частиц шара обратно пропорционально $n$-ой степени расстояния; тогда, по предложению LXXIX, притяжение массы $P$ этим слоем будет пропорционально $\frac{DE^2 \cdot h}{PF^n}$, т. е. количеству

$$\left[\frac{2DF}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2}{PF^n}\right] \cdot h.$$

Пусть ордината $FN$, умноженная на $h$, пропорциональна предыдущей величине; тогда криволинейная площадь, происходящая от продвижения ординаты $FN$ по длине $DB$, будет пропорциональна полной силе притяжения массы $P$ сегментом $RBSD$.




Фиг. 115.




Фиг. 116.

**Предложение LXXXIV. Задача XLIII**

*Найти силу, с которою притягивается масса, расположенная на оси сегмента вне его центра, этим сегментом.*

Пусть масса $P$ (фиг. 116), лежащая на оси $ADB$, притягивается сегментом $EBK$. Из центра $P$ радиусом $PE$ опиши шаровую поверхность $EFK$, которая разделит сегмент на две части $EBKFE$ и $EFKDE$. Притяжение первой части найдется по предложению LXXXI, второй — по предложению LXXXIII; их сумма и будет притяжение сегмента.

*ПОУЧЕНИЕ*

После объяснения притяжения тел сферических следовало бы перейти к законам притяжения других тел, составленных из притягивающих частиц, подобно тому как это предполагалось выше, но подробное рассмотрение такого вопроса имеет лишь малое отношение к цели этого сочинения. Достаточно будет привести лишь некоторые общие предложения о притягательных силах тел подобного рода и о движениях, от этих сил происходящих, в виду некоторых их применений в Физике.

## ОТДЕЛ XIII

## О ПРИТЯЖЕНИИ ТЕЛ НЕ СФЕРИЧЕСКИХ

### Предложение LXXXV. Теорема XLII

*Если притяжение, испытываемое притягиваемым телом при непосредственном соприкосновении с притягивающим, много сильнее, нежели при самом малейшем промежутке, их разделяющем, то силы частиц притягивающего тела, при увеличении расстояния до притягиваемого, убывают быстрее, нежели в отношении квадратов расстояний.*

Ибо если силы убывают пропорционально квадратам расстояния до частиц, то притяжение сферическим телом обратно пропорционально квадрату расстояния притягиваемого тела до центра сферы (предл. LXXIV), поэтому это притяжение при соприкосновении возрастает лишь едва-едва заметно. Это возрастание будет еще меньше, когда притяжение при удалении притягиваемого тела убывает в меньшем отношении, нежели квадраты расстояний. Таким образом высказанное предложение имеет место для притягивающих шаров. То же относится и до полых шаров при притяжении ими внешних тел и в еще большей степени до притяжения тел, находящихся внутри полостей, ибо в этом случае притяжения по противоположности уничтожаются (предл. LXX), и следовательно, даже при соприкосновении, равны нулю. Поэтому, если для таких сплошных или полых шаров отнимать какие-либо части, сколько-нибудь отстоящие от места прикосновения, или прилагать к ним другие части, то можно по произволу изменять форму притягивающих тел; добавление или отнятие таких частей, так как они находятся в некотором удалении от места касания, не будет чувствительно изменять избытка притяжения, происходящего от прикосновения; таким образом предложение имеет место и для тел любой формы.

### Предложение LXXXVI. Теорема XLIII

*Если притягательные силы частиц, составляющих притягивающее тело, при удалении притягиваемого убывают пропорционально третьей или еще высшей степени расстояния, то при соприкосновении притяже-*

*ние будет гораздо сильнее, нежели когда оба тела разделены хотя бы самым малым промежутком.*

Из решения примеров 2-го и 3-го задачи XLI следует, что при приближении притягиваемой массы к шару, составленному из таких частиц, притяжение возрастает до бесконечности. Сопоставляя, подобно предыдущему, эти примеры и теорему XLI, можно заключить, что это относится и до притяжения выпукло вогнутыми сферическими слоями и полыми сферами, находятся ли тела вне, или внутри, этих полостей. Прибавляя или отнимая от этих шаров или шаровых слоев притягивающую материю вне места их прикосновения с притягиваемою массою, можно придать притягивающим телам любую форму, следовательно высказанное предложение относится ко всякому телу.

## Предложение LXXXVII. Теорема XLIV

*Если два между собою подобных тела состоят из однородно притягивающего вещества и притягивают две массы, которые пропорциональны массам самих тел и расположены по отношению к ним сходственно, то полные ускорительные притяжения этих масс к соответствующим телам будут относиться между собою, как ускорительные притяжения их к отдельным частицам, массы коих пропорциональны массам притягивающих тел и которые расположены в них сходственным образом.*

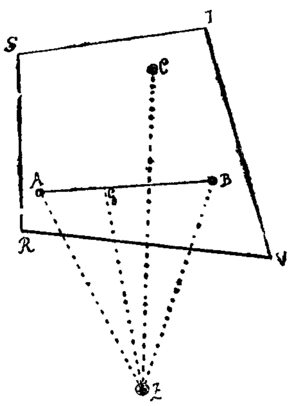
Вообразив, что тела разбиты на элементы, массы коих пропорциональны массам тел и расположение которых сходственно, увидим, что притяжение, производимое какою-либо частицею одного тела, так относится к притяжению, производимому соответствующей ей частицею другого тела, как притяжение всякой другой частицы первого тела к притяжению ей соответствующей частицы второго; поэтому, слагая, получим, что и полные притяжения тел находятся в этом же отношении.

*Следствие 1.* Поэтому, если притяжения частиц тел при увеличении расстояния до притягиваемой массы убывают пропорционально какой-либо степени расстояния, то ускорительные притяжения ее самими телами будут пропорциональны их массам и обратно пропорциональны той же степени расстояния. Таким образом, если силы притяжения частиц убывают пропорционально квадрату расстояний, массы же тел пропорциональны $A^3$ и $B^3$, т. е. кубам расстояний $A$ и $B$ притягиваемых масс до сходственных частиц тел, то ускорительные притяжения будут пропорциональны $\frac{A^3}{A^2}$ и $\frac{B^3}{B^2}$, т. е. пропорциональны $A$ и $B$.

Если притяжение частиц убывает пропорционально третьей степени расстояния, то полные притяжения будут пропорциональны $\frac{A^3}{A^3}$ и $\frac{B^3}{B^3}$, т. е. будут между собою равны.

Если силы убывают пропорционально четвертой степени расстояния, то полные притяжения будут пропорциональны $\frac{A^3}{A^4}$ и $\frac{B^3}{B^4}$, т. е. обратно пропорциональны $A$ и $B$ и т. д.

*Следствие 2.* Отсюда обратно, по притяжениям, производимым подобными телами на массы, подобным образом расположенные, можно вывести закон убывания притягательной силы частиц в зависимости от расстоянии, если только это убывание будет прямо или обратно пропорционально какой-либо степени расстояния.




Фиг. 117.

### Предложение LXXXVIII. Теорема XLV

*Если притягательные силы отдельных равных частиц какого-либо тела пропорциональны расстояниям мест до них, то притягательная сила всего тела направляется к его центру тяжести и равна притягательной силе шара, состоящего из равного количества того же вещества и имеющего свой центр в центре тяжести сказанного тела.*

Пусть частицы $A$ и $B$ (фиг. 117) тела $RSTV$ притягивают массу $Z$ с такими силами, которые, когда массы частиц $A$ и $B$ равны, относятся между собою, как $AZ$ к $BZ$, когда же массы частиц не равны, то как произведения этих масс на вышеупомянутые расстояния. Представим эти силы самими этими произведениями $A \cdot AZ$ и $B \cdot BZ$, соединим $AB$ и разделим эту прямую в точке $G$ так, чтобы было

$$AG : BG = B : A, \qquad (*)$$

тогда $G$ есть центр тяжести частиц $A$ и $B$.

Сила $A \cdot AZ$ разлагается (след. II законов) на силы $A \cdot GZ$ и $A \cdot AG$, сила $B \cdot BZ$—на силы $B \cdot GZ$ и $B \cdot BG$; но силы $A \cdot AG$ и $B \cdot BG$, на основании пропорции (*), между собою равны и, будучи направлены в обратные стороны, взаимно уничтожаются. Остаются силы $A \cdot GZ$ и $B \cdot GZ$, направленные от $Z$ к $G$. Они слагаются в одну $(A + B)GZ$, направленную к $G$, т. е. в такую силу, как если бы обе притягивающие частицы были помещены в центре тяжести их $G$, образуя здесь шар.

На основании такого же рассуждения, если добавить третью частицу $C$, то ее сила, по соединении с силою $(A+B)GZ$, направленной в $G$, образует силу, направленную к общему центру тяжести сказанного шара $G$ и частицы $C$, т. е. к центру тяжести всех трех частиц $A$, $B$ и $C$, и будет равна силе, которая происходила бы, если бы в этом общем центре тяжести поместить центр шара, образованного из всех трех частиц. Продолжая таким образом до бесконечности, заключим, что полная сила притяжения всех частиц, образующих тело $RSTV$, будет такая же, как если бы, сохранив положение центра тяжести, придать этому телу форму шара.

*Следствие.* Движение притягиваемого тела $Z$ будет то же самое, как если бы тело $RSTV$ было сферической формы; поэтому, если это последнее находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то притягиваемое тело $Z$ будет описывать эллипс, коего центр находится в центре тяжести притягивающего тела.

### Предложение LXXXIX. Теорема XLVI

*Если имеется несколько тел, состоящих из равных частиц, коих притягательные силы пропорциональны расстояниям до них, то полное притяжение какой-либо массы этими телами направлено к их общему центру тяжести и такое же, как если бы все эти тела слить в один шар, сохраняя положение общего их центра тяжести.*

Это предложение может быть доказано совершенно так же, как предыдущее.

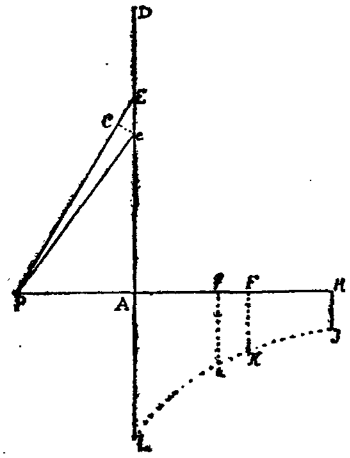
*Следствие.* Следовательно, движение притягиваемого тела будет то же самое, как если бы притягивающие тела были слиты в один шар, сохранив положение центра тяжести; поэтому, когда этот центр тяжести системы притягивающих тел или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно, то притягиваемое тело будет описывать эллипс, коего центр находится в сказанном центре тяжести системы притягивающих тел.

### Предложение XC. Задача XLIV

*Предполагая, что к отдельным точкам круга направлены равные центростремительные силы, возрастающие или убывающие в какой-либо зависимости от расстояния, требуется найти силу, с которою притягивается масса, помещенная где-нибудь на прямой, перпендикулярной к плоскости круга и проходящей через его центр.*

Вообразим, что из центра $A$ (фиг. 118) каким-либо радиусом $AD$ описан круг в плоскости, перпендикулярной к прямой $AP$, и требуется найти ту силу, с которою масса $P$ притягивается этим кругом.

Проведем из какой-либо точки $E$ круга прямую $PE$, на прямой $PA$ отложим длину $PF = PE$ и по ординате $FK$ отложим длину, пропорциональную той силе, с которою точка $E$ притягивает массу $P$. Пусть $JKL$ есть та кривая, на которой постоянно лежит точка $K$ и которая пересекает плоскость круга в $L$. На $AP$ берем длину $PH = PD$ и проводим перпендикуляр, пересекающий сказанную кривую в точке $J$; тогда притяжение массы $P$ кругом пропорционально произведению площади $ALJH$ на расстояние $AP$. В самом деле, возьмем на $AE$ весьма малую длину $Ee$, проведем $Pe$ и возьмем $PC$ и $Pf$ равными $Pe$; по предположению длина $FK$ пропорциональна той силе, с которою масса $P$ притягивается к точке $E$ кольца, коего ширина $eE$ и которое описано из $A$, как из центра, радиусом $AE$; поэтому элементарная сила притяжения массы $P$ к центру $A$ будет пропорциональна $FK \cdot \dfrac{AP}{PE}$, сила же притяжения этой массы всем кольцом будет пропорциональна произведению его площади на $FK \cdot \dfrac{AP}{PE}$; но площадь кольца пропорциональна $AE \cdot Ee$, а так как




Фиг. 118.

$$PE : AE = Ee : CE$$

то

$$AE \cdot Ee = PE \cdot CE = PE \cdot Ff$$

следовательно притяжение массы $P$ кольцом по направлению к $A$ пропорционально

$$PE \cdot Ff \cdot \frac{AP \cdot FK}{PE}$$

т. е.

$$Ff \cdot FK \cdot AP$$

иначе — произведению[123] площадки $FKkf$ на расстояние $AP$; поэтому сумма притяжений массы $P$ всеми кольцами, составляющими круг, описанный ра-

[123] Полагая, что закон притяжения выражается формулою $f(r)$, где $r = PE$, и обозначая через $q$ — поверхностную плотность, получим, что слагающая притяжения от элементарного кольца выражается формулою

$$dX = 2\pi q \cdot h \cdot f(r)\, dr$$

диусом $AD$ из центра $A$, будет пропорциональна площади $AHJKL$, умноженной на длину $AP$.

*Следствие 1.* Так, если притяжение точкою $E$ обратно пропорционально квадрату расстояния, т. е. если $FK$ пропорционально $\frac{1}{PF^2}$, то площадь $AHJKL$ будет пропорциональна $\frac{1}{PA}-\frac{1}{PH}$, и притяжение круга пропорционально $1-\frac{PA}{PH}$, т. е. $\frac{AH}{PH}$.

*Следствие 2.* Вообще, если притяжение точек в расстоянии $D$ обратно пропорционально какой-либо степени $D^n$, т. е. $FK$ пропорционально $\frac{1}{D^n}$, следовательно площадь $AHJKL$ пропорциональна

$$\frac{1}{PA^{n-1}}-\frac{1}{PH^{n-1}},$$

то притяжение массы $P$ кругом будет пропорционально

$$\frac{1}{PA^{n-2}}-\frac{PA}{PH^{n-1}}.$$

*Следствие 3.* Если диаметр круга увеличивается до бесконечности и показатель степени $n$ больше 1, то притяжение массы бесконечною плоскостью обратно пропорционально $PA^{n-2}$, ибо член $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ в этом случае исчезает.

### Предложение XCI. Задача XLV

*Найти притяжение массы, помещенной на оси тела вращения, этим телом, когда к отдельным его точкам направляются равные центростремительные силы, убывающие по какому-либо закону в зависимости от расстояния.*

Пусть масса $P$ (фиг. 119), лежащая на оси тела вращения $DECG$, притягивается им. Пересеки это тело какою-либо плоскостью, перпендику-

---

где

$$h = AP$$

делая еще

$$PD = FH = H$$

будем иметь

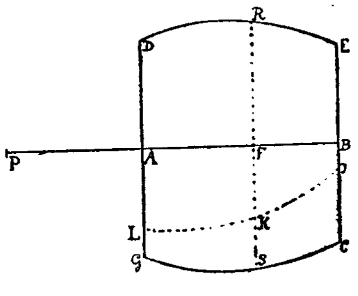
$$X = 2\pi q \cdot h \cdot \int_h^H f(r)\cdot dr. \tag{1}$$

лярной к оси, и пусть круг $RFS$ есть полученное сечение; по его радиусу $FS$ в какой-либо плоскости, проведенной через ось, возьми длину $FK$, пропорциональную той силе, с которою масса $P$ притягивается этим кругом (предл. XC). Точка $K$ расположится на кривой $LKJ$, пересекающей плоскости крайних кругов $AL$ и $BJ$ в точках $L$ и $J$.

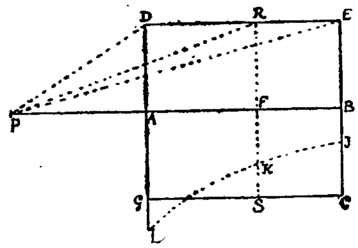
Притяжение массы $P$ телом вращения $DECG$ будет пропорционально площади $LKJBA$.

*Следствие 1.* Поэтому, когда тело — цилиндр, происходящий от обращения прямоугольника $ADEB$ (фиг. 120) около оси $AB$, и притяжения его отдельных точек обратно пропорциональны квадратам расстояний до них, то притяжение массы $P$ этим цилиндром пропорционально

$$(AB - PE + PD)$$




Фиг. 119.




Фиг. 120.

ибо в этом случае (предл. XC, след. 1) ордината $FK$ пропорциональна $1 - \frac{PF}{PR}$; при проведении 1 по основанию $AB$ получается площадь $1 \cdot AB$. Вторая часть $\frac{PF}{PR}$, при проведении по длине $PB$, дает площадь $1 \cdot (PE - AD)$, что легко получить квадратурою кривой $LKJ$; та же часть $\frac{PF}{PR}$, по проведении по длине $PA$, дает площадь $(PD - AD) \cdot 1$, следовательно при проведении по $AB$ опишется площадь, равная разности

$$(PE - AD) \cdot 1 - (PD - AD) \cdot 1$$

т. е.

$$1 \cdot (PE - PD)$$

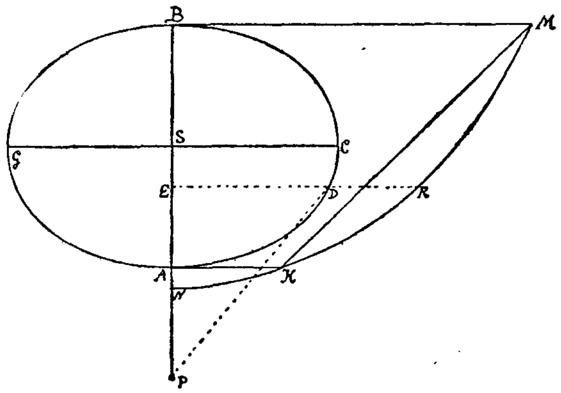
вычтя которую из площади $AB \cdot 1$ и получим, что площадь $LABJ$ равна

$$1 \cdot (AB - PE + PD)$$

следовательно сила пропорциональна[124]

$$(AB - PE + PD).$$

*Следствие 2.* Таким же образом можно вычислить силу, с которою сфероид $AGBC$ притягивает массу $P$, расположенную на его оси $AB$. Пусть $NKRM$ есть такое коническое сечение, коего ордината $ER$, перпендикулярная к $PE$, равна, при всяком ее положении, отрезку $PD$, проводимому к точке пересечения $D$ этой ординаты со сфероидом. Из вершин сфероида $A$ и $B$ проводятся перпендикуляры $AK$ и $BM$, соответственно равные $AP$ и $BP$, пересекающие сказанное коническое сечение в $K$ и $M$ (фиг. 121). Проведя $KM$, отсечем от него площадь $KMRK$.




Фиг. 121.

[124] Притяжение кругом, представляющим сечение тела вращения, точнее говоря слоем, заключенным между двумя бесконечно близкими кругами, находится по формуле (1) примечания 123, и высказываемая теорема, при принятом теперь обозначении, приводит к следующей формуле.

Пусть $\rho$ есть плотность (объемная) тела вращения:

$$PA = a, \quad PB = b, \quad PF = x, \quad PR = X;$$

полагая

$$Q = 2\pi x \int_x^X f(r)\,dr = FK, \tag{1}$$

будем иметь, так как $q = \rho \cdot dx$, притяжение

$$F = \rho \int_a^b Q \cdot dx. \tag{2}$$

Так, для цилиндра будет при $f(r) = \frac{k}{r^2}$:

$$Q = 2\pi kx \int_x^X \frac{1}{r^2}\,dr = 2\pi kx\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\right) = 2\pi k\left[1 - \frac{x}{X}\right] = 2\pi k\left[1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right],$$

где $c = AD$ есть радиус цилиндра, и, значит полное притяжение будет

$$F = 2\pi k \int_a^b \left[1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right] dx = 2\pi k \left\{(b - a) - \frac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}} + \frac{a}{\sqrt{c^2 + a^2}}\right\},$$

т. е. $F$ пропорционально

$$(AB - PE + PD).$$

Пусть $S$ есть центр сфероида, $SC$ — его большая полуось; тогда отношение силы, с которою точка $P$ притягивается сфероидом, к силе притяжения шаром, описанным на диаметре $AB$, равно отношению

$$\frac{AS\cdot SC^2 - KMRK\cdot PS}{PS^2 + SC^2 - AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}.$$

Основываясь на расчетах подобного же рода, можно найти и притяжение сегментом сфероида.[125]

---

[125] Приводимая в этом следствии формула для притяжения эллипсоида вращения на точку, лежащую на оси вращения, может быть получена следующим образом: обозначим расстояние $PD$ через $X$; тогда, на основании формулы (2), будет

$$F = 2\pi k\cdot\int\limits_{l-a}^{l+a}\left[1-\frac{x}{X}\right]dx = 4\pi k\left[a - \int\limits_{l-a}^{l+a}\frac{x}{X}\,dx\right]$$

где

$$PA = l-a,\quad SA = SB = a,\quad PS = l,\quad PE = x.$$

На основании уравнения эллипса при $SC = b$, будет

$$X^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 + \frac{2b^2 l}{a^2}x - \frac{b^2}{a^2}(l^2-a^2)$$

если, для сокращения письма, сделать:

$$A = \frac{a^2-b^2}{a^2};\quad B = \frac{b^2 l}{a^2};\quad C = -\frac{b^2}{a^2}(l^2-a^2),$$

и все свелось к вычислению интеграла

$$\int\limits_{l-a}^{l+a}\frac{x}{X}\,dx.$$

Интеграл $\int\frac{x}{X}\,dx$ Ньютон приводит к вычислению интеграла $\int X\,dx$; в самом деле, будет

$$\int X\,dx = xX - \int\frac{Ax+B}{X}x\,dx = xX - \int\frac{Ax\ \ +Bx}{X}dx =$$

$$= xX - \int\frac{X^2-Bx-C}{X}\cdot dx = xX - \int X\,dx + \int\frac{Bx+C}{X}\,dx.$$

Откуда

$$2\int X\,dx = xX + B\int\frac{x\,dx}{X} + C\int\frac{dx}{X}. \tag{1}$$

Но

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{A}\int\frac{Ax+B}{X}\,dx - \frac{B}{A}\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{A}X - \frac{B}{A}\int\frac{dx}{X} \tag{2}$$

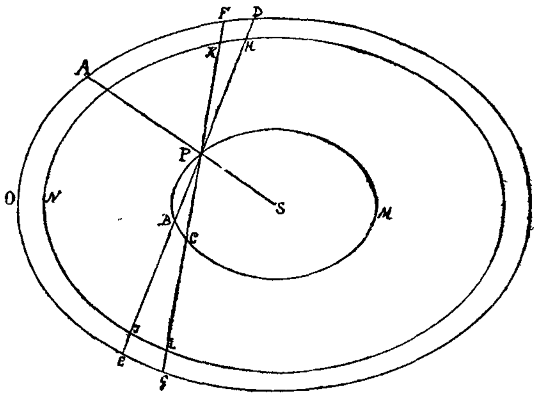
подставляя в формуле (1), получим

$$\int\frac{x}{X}\,dx = \frac{2B}{B^2-AC}\int X\,dx - \frac{Bx+C}{B^2-AC}\cdot X. \tag{3}$$

Подставляя в эту формулу пределы $(l+a)$ и $(l-a)$ и обозначая через $S$ — площадь $MRKAB$, так что

$$S = \int\limits_{l-a}^{l+a} X\cdot dx$$

*Следствие 3.* Когда притягиваемая масса лежит внутри сфероида на его оси, то притяжение ее пропорционально расстоянию до его центра. Это легко можно получить следующим рассуждением, и притом находится ли притягиваемая точка на оси, или нет.




Фиг. 122.

Пусть $AGOF$ (фиг. 122) есть притягивающий сфероид, $S$ — его центр, $P$ — притягиваемая точка. Проведем через эту точку $P$ полудиаметр $SPA$ и еще две каких бы то ни было прямых $DE$ и $FG$, пересекающих сфероид в точках $D$, $E$, $F$ и $G$, и пусть $PCM$ и $HLN$ представляют две сфероидических поверхности, лежащих внутри данной, одноцентренных и подобных ей, причем первая из них проходит через точку $P$ и пересекает прямые $DE$,

---

заменив $A$, $B$ и $C$ их величинами и заметив, что при

$$x = l - a$$

будет и

$$X = l - a$$

и что при

$$x = l + a$$

будет и

$$X = l + a,$$

получим

$$\left|\frac{(Bx + C)X}{B^2 - AC}\right|_{l-a}^{l+a} = \frac{2a(l^2 + a^2)}{l^2 - a^2 + b^2}$$

и

$$F = 4\pi k\left[a - \frac{l \cdot S}{l^2 - a^2 + b^2} + \frac{a(l^2 + a^2)}{l^2 - a^2 + b^2}\right] = 4\pi k\frac{ab^2 - l(S - 2al)}{l^2 - a^2 + b^2}$$

но

$$S - 2al = MRKAB - ABMK = KMRK = S_1$$

а так как притяжение шара, описанного ва диаметре $AB$, есть

$$F_0 = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3 k}{l^2}$$

то и будет

$$F : F_0 = \frac{ab^2 - lS_1}{l^2 - a^2 + b^2} : \frac{a^3}{3l^2};$$

это и есть приведенная в тексте формула.

По поводу этой формулы заметим, что, как видно из сочинения Ньютона — «De curvatura curvarum», ему было известно ие только геометрическое, но и аналитическое представление интегралов, содержащих корень квадратный из трехчлена второй степени относительно независимой переменной.

$FG$ в точках $B$ и $C$, вторая же пересекает эти прямые в точках $H$, $K$, $J$, $L$. Все эти сфероиды имеют общую ось, и отрезки прямых, заключенные между ними, будут соответственно равны, а именно:

$$DP = BE, \quad FP = CG, \quad DH = EJ, \quad FK = LG$$

ибо прямые $DE$, $PB$ и $HJ$ разделяются пополам в тех же точках, как $FG$, $PC$ и $KL$. Вообрази теперь, что $DPF$ и $EPG$ представляют два противоположных конуса, описанных бесконечно малыми углами $DPF$ и $EPG$, и что линии $DH$ и $EJ$ также бесконечно малые; тогда вырезаемые этими конусами части $DHFK$ и $GEJL$ поверхностей сфероидов будут пропорциональны квадратам расстояний до точки $P$ и, в виду равенства длин $DH$ и $EJ$, оказывают на эту точку равные притяжения. На основании этого, если объемы $DPF$ и $EGCB$ подразделить бесчисленным множеством подобных, одноцентренных и имеющих ту же ось сфероидических поверхностей на элементарные объемы, то все они попарно притягивают точку $P$ с равными силами в противоположные стороны, следовательно силы притяжения конуса $DPF$ и конического сегмента $EGCB$ между собою равны и, будучи направлены в противоположные стороны, взаимно уничтожаются; это относится, значит, и до всей материи, расположенной вне внутреннего сфероида $PCBM$, которая таким образом на точку $P$ притяжения не оказывает. Следовательно, точка $P$ притягивается только внутренним сфероидом $PCBM$, и по следствию 3 предложения LXXII сила этого притяжения так относится к притяжению точки $A$ всем сфероидом $AGOD$, как расстояние $PS$ к $AS$.

### Предложение XCII. Задача XLVI

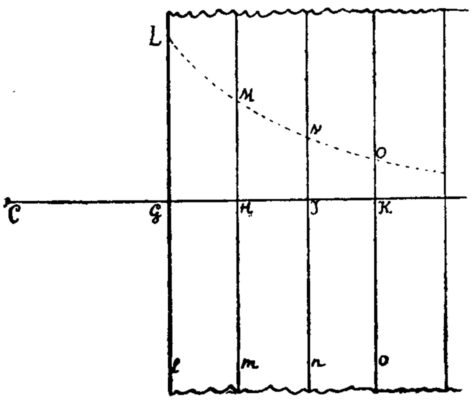
*Найти закон убывания центростремительных сил, направленных к отдельным частицам заданного притягивающего тела.*

Из заданного тела надо сделать шар или цилиндр, или иное тело правильной формы, для которого закон полной силы притяжения, находящийся в соответствии с законом убывания притяжения отдельной частицею, мог бы быть найден по предложениям LXXX, LXXXI и XCI. Произведя затем испытания, определяют притяжение тела в различных расстояниях; найденный по этим определениям закон притяжения к целому телу доставит и искомый закон притяжения его частицами.

### Предложение XCIII. Теорема XLVII

*Если тело, ограниченное с одной стороны плоскостью, с прочих же сторон неограниченное и простирающееся до бесконечности, состоит* *из равных частиц, одинаково притягивающих, причем притяжение их убывает пропорционально какой-либо степени расстояния большей, нежели вторая, и какая-либо масса, лежащая где угодно относительно граничащей плоскости, притягивается этим телом, то это притяжение при удалении от плоскости убывает пропорционально степени расстояния тела до плоскости, на три единицы меньшей той, пропорционально которой убывает притяжение отдельных частиц тела.*

*Случай 1.* Пусть $LGl$ есть плоскость, ограничивающая тело, которое расположено от нее в сторону $J$ и подразделено на слои бесчисленным множеством плоскостей: $mHM$, $nJN$, $oKO$ (фиг. 123) и т. д., параллельных плоскости $GL$, и масса $C$ лежит вне притягивающего тела. Проведем прямую $CGHJ$ перпендикулярно сказанным плоскостям, и пусть притяжение частиц обратно пропорционально степени $n$ расстояния, не меньшей 3; тогда, по следствию 3 предложения XC, сила притяжения массы $C$ какою-либо плоскостью $mHM$ обратно пропорциональна $CH^{n-2}$. Возьми в плоскости $mHM$ длину $HM$, обратно пропорциональную $CH^{n-2}$, тогда сила притяжения плоскостью $mHM$ будет пропорциональна этой длине $HM$. Подобным же образом и по другим плоскостям откладываются длины $GL$, $JN$, $KO$ и пр., обратно пропорциональные $CG^{n-2}$, $CJ^{n-2}$, $CK^{n-2}$ и т. д.,— притяжения этих плоскостей будут пропорциональны соответствующим длинам, значит сумма этих притяжений будет пропорциональна сумме этих длин, т. е. площади $GLOK$, продолженной до бесконечности в сторону $OK$. Эта же площадь (по известным способам квадратур) обратно пропорциональна $CG^{n-3}$, следовательно и притяжение всего тела обратно пропорционально этой величине.



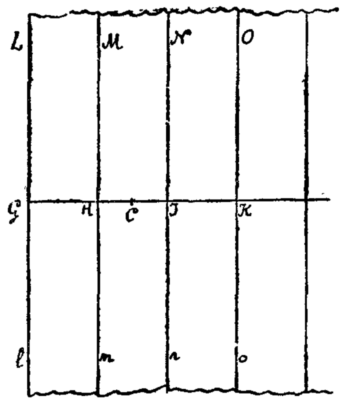

Фиг. 123.

*Случай 2.* Если же масса $C$ (фиг. 124) лежит внутри тела, то отложив длину $CK$, равную $CG$, и проведя плоскость $oKO$, отсечем такую часть $LGloKO$ тела, ограниченную параллельными плоскостями $lGL$, $oKO$, которая на массу $C$ притяжения не оказывает, ибо действия противоположных частей этого отсеченного тела взаимно уравновешиваются, следовательно масса $C$

притягивается только телом, лежащим за плоскостью $OK$, сила же этого притяжения, по доказанному для 1-го случая, обратно пропорциональна $CK^{n-3}$, т. е. $CG^{n-3}$, ибо $CG = CK$.

*Следствие 1.* Поэтому, если тело $LGJN$ ограничено с обеих сторон плоскостями $LG$ и $JN$, простирающимися до бесконечности, то его притяжение найдется вычтя из полного притяжения неограниченного тела $LGKO$ притяжения его части $NJKO$, также простирающейся бесконечно в сторону $KO$.

*Следствие 2.* Если притяжение этой второй части тела по сравнению с первой будет ничтожно мало и его отбросить, то притяжение первой части при увеличении расстояния будет изменяться приблизительно пропорционально $CG^{n-3}$.



Фиг. 124.

*Следствие 3.* Поэтому, если какое-либо конечное тело, ограниченное с одной стороны плоскостью, притягивает частицу в области близ средины этой плоскости и расстояние от частицы до плоскости чрезвычайно мало по сравнению с размерами тела, тело же это само состоит из одинаковых частиц, коих притяжение убывает пропорционально какой-либо степени расстояния выше четвертой, то притяжение всего тела убывает пропорционально степени вышесказанного малого расстояния на три единицы меньшей, нежели та степень, коей обратно пропорционально притяжение частицы.

Это утверждение не относится к телу, коего частицы притягивают обратно пропорционально кубу расстояния, ибо в этом случае притяжение упомянутой во 2-м следствии второй неограниченной части тела бесконечно больше притяжения первой его части, ограниченной с двух сторон.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Если какое-либо тело притягивается перпендикулярно данной плоскости и требуется определить его движение, когда закон притяжения задан, то задача решается определяя (предл. XXXIX) движение тела, падающего прямо на эту плоскость и слагая (след. II законов) это движение с равномерным движением, параллельным этой плоскости.

Наоборот, если требуется найти закон притяжения к плоскости по перпендикулярному к ней направлению при условии, чтобы притягиваемое тело двигалось по заданной кривой, то задача решается поступая подобно тому, как в задаче III.

Это последнее определение может быть упрощено разлагая ординаты в сходящиеся ряды. Так, если к оси $A$ под каким-либо углом проводятся ординаты $B$, коих длины пропорциональны какой-либо степени $A^{\frac{m}{n}}$ абсцисс, и требуется определить такую силу, направленную по ординатам или в сторону к оси абсцисс, или в сторону обратную, которая заставила бы тело двигаться по кривой, проходящей через концы ординат, то положив, что абсцисса получает какое-либо весьма малое приращение $\alpha$, разлагаем ординату $(A + \alpha)^{\frac{m}{n}}$ в бесконечный ряд

$$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} \cdot \alpha + \frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \cdot \alpha^2 + \ldots$$

и принимаем, что сила пропорциональна тому члену, где $\alpha$ содержится во второй степени, именно:

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \alpha^2$$

т. е. искомая сила пропорциональна

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$$

или, что то же,

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} B^{\frac{m-2n}{m}}$$

Так, если ордината описывает параболу, то

$$m = 2 \quad \text{и} \quad n = 1$$

и сила будет пропорциональна $B^0$, т. е. постоянная. Под действием постоянной силы тело описывает на самом деле параболу, как это доказал еще Галилей. Если же ордината описывает гиперболу, то будет

$$m = 0 - 1 \quad \text{и} \quad n = 1,$$

и сила будет пропорциональна $2A^{-3}$ или $2B^3$, следовательно, когда сила пропорциональна кубу ординаты, то тело будет двигаться по гиперболе.[126]

---

[126] В общем случае уравнение траектории будет вида:

$$x = kt; \quad z = \varphi(x) = \varphi(kt)$$

предполагая, что ось $y$-ков взята так, чтобы движение происходило в плоскости $zx$; сила

$$F = z'' = \frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 \varphi''(x).$$

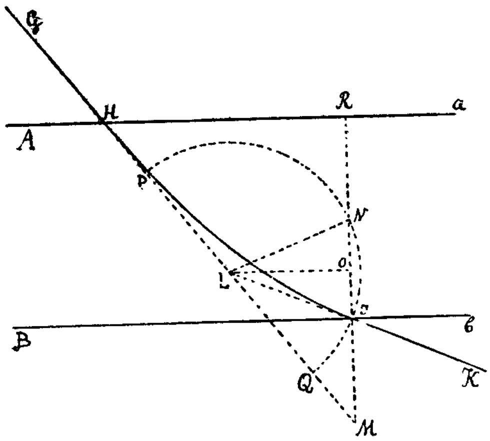
Опуская подобного рода предложения, перехожу к другим, которых я еще не касался.

## ОТДЕЛ XIV

## О ДВИЖЕНИИ ВЕСЬМА МАЛЫХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ К ОТДЕЛЬНЫМ ЧАСТИЦАМ ВЕСЬМА БОЛЬШОГО ТЕЛА

### Предложение XCIV. Теорема XLVIII

*Если две однородные среды разделяются пространством, заключенным между двумя параллельными плоскостями, и тело, при переходе через это пространство, притягивается или побуждается к одной из средин перпендикулярно к плоскости раздела, других же сил к нему никаких не приложено, и если при этом притяжение, при всяком расстоянии от обеих плоскостей, одно и то же и направлено в ту же сторону, то синус угла падения на первую плоскость находится в постоянном отношении к синусу угла выхода из второй.*




Фиг. 125.

*Случай 1.* Пусть $Aa$, $Bb$ (фиг. 125)— две параллельные плоскости и тело падает на первую плоскость по прямой $GH$ и, в продолжение всего своего перехода через промежуточное пространство, притягивается к первой среде, и под этим действием описывает кривую $HJ$, и выходит по направлению $JK$. Проводим к плоскости выхода перпендикуляр $JM$, пересекающий продолжение линии падения $GH$ в $M$ и плоскость падения в $R$. Пусть продолженная линия выхода $JK$ пересекается с продолженной линией падения $HM$ в $L$.

---

Но

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi(x)+\alpha\varphi'(x)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot\varphi''(x)+\ldots,$$

и следовательно, сила действительно пропорциональна коэффициенту при $\alpha^2$ в разложении функции $\varphi(x+\alpha)$ по степеням $\alpha$. Но затем надо выразить из уравнения $z=\varphi(x)$ переменную $x$ через $z$ и подставить в выражение $\varphi''(x)$.

Из центра $L$ радиусом $LJ$ опишем круг, пересекающий прямую $HM$ в точках $P$ и $Q$ и продолжение $MJ$ в точке $N$.

Если положить, что притяжение, действующее на частицу, постоянно, то по доказанному Галилеем кривая $HJ$ будет парабола, обладающая тем свойством, что произведение постоянного ее параметра на длину $LM$ равно $HM^2$, причем точкою $L$ длина $HM$ разделяется пополам. Поэтому, если из $L$ опустить на $MJ$ перпендикуляр $LO$, то

$$MO = OR;$$

если к этим равным приложить равные $ON$ и $OJ$, то и суммы $MN$ и $JR$ будут равны, а так как $JR$ постоянно, то и $MN$ — постоянная, следовательно отношение произведения $NM \cdot MJ$ к произведению постоянного параметра на $MJ$, т. е. к $HM^2$, постоянное; но

$$MN \cdot MJ = PM \cdot MQ = $$
$$= ML^2 - PL^2 = ML^2 - JL^2$$

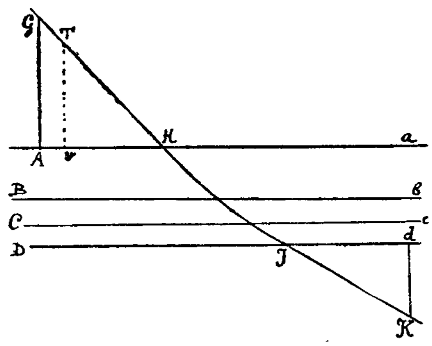
и

$$HM^2 = 4ML^2$$

следовательно и отношение

$$(ML^2 - LJ^2) : ML^2$$

постоянное, значит постоянно и отношение



Фиг. 126.

$$\frac{LJ^2}{ML^2}, \quad \text{т. е. и} \quad \frac{LJ}{ML}.$$

Но во всяком треугольнике синусы углов пропорциональны сторонам, следовательно постоянно и отношение синуса угла падения $LMR$ к синусу угла выхода $LJR$.

*Случай 2.* Положим теперь, что точка переходит через несколько пространств, ограниченных параллельными плоскостями $AabB$ (фиг. 126) $BbcC$ и т. д., и что она находится под действием силы, которая в каждом пространстве постоянна, но в разных пространствах различная. По вышедоказанному синус угла падения на первую плоскость $Aa$ находится в постоянном отношении к синусу угла выхода из второй плоскости, но этот синус есть, вместе с тем, синус угла падения на вторую плоскость $Bb$ и находится в постоянном отношении к синусу угла выхода из третьей плоскости, этот же — в постоянном отношении к синусу угла выхода из четвертой плоскости $Dd$ и т. д. до бесконечности, следовательно, по перемножении этих отношений, получится, что синус угла падения на первую плоскость находится в постоянном отношении к синусу угла выхода из последней.

Положим теперь, что промежутки между плоскостями уменьшаются, число же их увеличивается до бесконечности, так что закон изменения притяжения или напора может быть сделан каким угодно непрерывно изменяющимся, тогда так как отношение синуса угла падения на первую плоскость к синусу угла выхода из последней остается постоянным, то оно останется таковым и при всяком законе притяжения.[127]

### Предложение XCV. Теорема XLIX

*При тех же предположениях я утверждаю, что скорость частицы до падения относится к ее скорости после выхода, как синус угла выхода к синусу угла падения.*

Возьмем $AH = Jd$ (фиг. 126) и проведем перпендикуляры $AG$ и $dK$, пересекающие линии падения и выхода $GH$ и $JK$ в $G$ и $K$, по $GH$ отложим $TH = JK$ и опустим на плоскость $Aa$ нормаль $Tv$. Разложим движение частицы на два: одно параллельно, другое перпендикулярно к плоскостям $Aa$,

---

127 Это утверждение может быть проверено весьма просто аналитически, как то показал Клеро. В самом деле, примем за ось $z$-ов нормаль к плоскости раздела средин и за ось $x$-ов пересечение этой плоскости с плоскостью падения; пусть угол падения $\alpha_0$, скорость падающей частицы $v_0$, $x$ и $z$ — ее координаты в момент $t$, $h$ — глубина, после которой притяжение частицы ничтожно мало, $f(z)$ — сила притяжения в расстоянии $z$.

Уравнения движения частицы будут:

$$x'' = 0; \quad z'' = f(z). \tag{1}$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$x = 0, \quad z = 0$$

и

$$x' = v_0 \sin \alpha_0; \quad z' = v_0 \cos \alpha_0.$$

Из уравнений (1) следует

$$x' = v_0 \sin \alpha_0 \tag{2}$$

и по закону живых сил:

$$v^2 = x'^2 + z'^2 = v_0^2 + 2\int_0^z f(z)\,dz. \tag{3}$$

Пусть при $z = h$ будет $v = V$ и направление движения составляет угол $\alpha$ с осью $z$. На основании уравнения (2) будет

$$V \sin \alpha = v_0 \sin \alpha_0 \tag{4}$$

по уравнению же (3)

$$V^2 = v_0^2 + 2\int_0^h f(z)\,dz. \tag{5}$$

Уравнение (4) дает

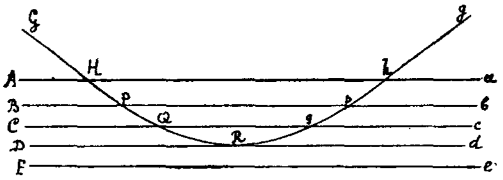
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{v_0}{V}. \tag{6}$$

Из уравнения же (5) видно, что при постоянном $v_0$ и величина $V$ постоянная, ибо она от $\alpha_0$ не зависит. Формула (6) и выражает закон преломления.

*Bb*,... Сила притяжения или напора, действуя по направлению этих перпендикуляров, не изменяет движения по параллелям, поэтому частица проходит в этом движении в равные времена равные длины как в промежутке между $AG$ и $H$, так и в промежутке между $J$ и прямою $dK$; следовательно, длины $GH$ и $JK$ описываются в равные времена, поэтому скорость до падения так относится к скорости после выхода, как $GH$ к $JK$ или к $TH$, т. е. как $AH$ или $Jd$ к $vH$, т. е. (принимая за радиусы $TH$ или $JK$) как синус угла выхода к синусу угла падения.

### Предложение XCVI. Теорема L

*Предполагая то же, что и ранее, и что скорость движения до падения больше скорости после такового, утверждаю, что можно настолько увеличить наклонение линии падения, что частица будет отражаться, причем угол отражения будет равен углу падения.*




Фиг. 127.

Вообрази, что частица описывает, как и в предыдущих случаях, между параллельными плоскостями $Aa$, $Bb$, $Cc$,... дуги парабол; пусть эти дуги суть $HP$, $PQ$, $QR$ (фиг. 127).

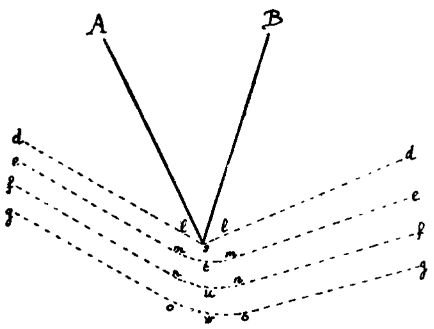
Положим, что наклонение линии падения к первой плоскости таково, что отношение синуса этого угла к радиусу равно отношению синуса этого угла к синусу угла выхода из плоскости $Dd$ в пространство $DdEe$; при таком условии синус угла выхода будет равен радиусу, и этот угол будет прямой, следовательно линия выхода совпадет с плоскостью $Dd$. Пусть частица достигает этой плоскости в $R$; так как линия выхода с этою плоскостью совпадает, то ясно, что частица не может, проникнув далее, перейти в пространство $DdEe$, не может она и продолжать двигаться по линии выхода $Rd$, ибо на нее постоянно действует сила в сторону среды падения; поэтому частица будет двигаться в обратную сторону, чем прежде, т. е. от плоскости $Dd$ к $Cc$, описывая дугу параболы $QRq$, вершина которой (по доказанному Галилеем) находится в $R$ и которая пересечет плоскость $Cc$ под таким же углом в точке $q$, как и в точке $Q$. Продолжая затем свой путь по параболическим дугам $pq$, $ph$ и т. д., равным и подобным дугам $QP$, $PH$ и т. д., пересекая при этом в точках $p$, $h$, ... прочие плоскости под теми же углами, как в точках $P$, $H$, ..., частица выйдет с таким же наклонением в $h$, какое она имела при падении в $H$.

Вообрази теперь, что расстояния между плоскостями $Aa$, $Bb$, $Cc$, ... уменьшаются и что число их возрастает до бесконечности, так что закон притяжения делается каким угодно непрерывно изменяющимся, — угол падения и угол выхода, оставаясь постоянно равными, останутся таковыми и при всяком законе притяжения.

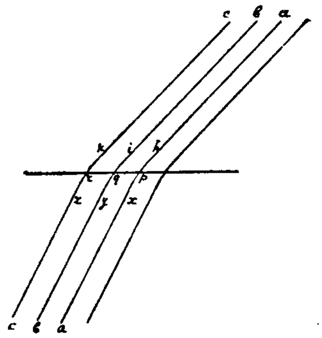
## *ПОУЧЕНИЕ*

От изложенных выше движений частицы под действием указанных притяжений почти не отличается отражение и преломление света, совершающееся в постоянном отношении секансов, как это найдено *Снеллиусом*, следовательно и в постоянном отношении синусов, как это изложено *Декартом*. Наблюдениями многих астрономов доказано, что свет распространяется постепенно и достигает от Солнца до Земли приблизительно в семь или в восемь минут времени, как это следует из затмений спутников *Юпитера*. Когда же лучи находятся в воздухе (как уже давно заметил *Гримальди*, пропуская через отверстие свет в темную комнату, что я и сам пробовал), то при проходе близ углов тел непрозрачных или прозрачных (как, напр., около круглых прямоугольных ободков золотых, серебряных или медных монет или же около острых, как у осколков камня или стекла) они загибаются в сторону к телу, как бы будучи к нему притягиваемыми. При этом лучи, ближайшие к телу, загибаются больше, как бы более притягиваясь, что я сам тщательно наблюдал. Те же лучи, которые проходят в большем расстоянии, загибаются менее, и в еще большем расстоянии загибаются даже чуть-чуть в противоположную сторону, давая три цветных полосы. Пусть на чертеже $s$ представляет ребро какого-либо лезвия или клина $AsB$, и $gowog$, $fnunf$ (фиг. 128), $emtme$, $dlsld$ — лучи, изогнувшиеся на величины дуг $owo$, $nun$, $mtm$, $lsl$ к лезвию в большей или меньшей степени, сообразно расстоянию до лезвия. Так как такое закругление лучей происходит в воздухе вне лезвия, то и те лучи, которые падают на нож, должны сперва искривиться ранее, чем достигнуть ножа. В таких же условиях находятся и лучи, падающие на стекло, так что преломление происходит не в точке падения, а постепенно непрерывным искривлением луча, происходящим частью в воздухе, ранее достижения стекла, частью (если не ошибаюсь) в самом стекле, после проникновения в него, подобно лучам: $ckzc$, $biyb$, $ahxa$ (фиг. 129), которые падают в $r$, $q$, $p$ и искривляются между $k$ и $z$, $i$ и $y$, $h$ и $x$, как это и начерчено. По аналогии между распространением световых лучей и движением

**весьма малых тел, я имею в виду изложить еще следующие предложения, имеющие отношение к оптике, но совершенно не касаясь самой природы лучей (телесная ли она, или нет) и совершенно ее не обсуждая, а только находя пути тел подобные ходу лучей.**




Фиг. 128.

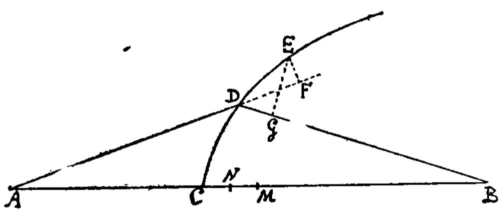


Фиг. 129.

### Предложение XCVII. Задача XLVII

*Полагая, что синус угла падения на какую-либо поверхность находится в постоянном отношении к синусу угла выхода и что искривление пути частицы близ поверхности происходит на столь коротком промежутке, что его можно принять за точку, требуется определить такую поверхность, которая заставила бы все частицы, выходящие последовательно из заданной точки, собраться в другую точку, также заданную.*

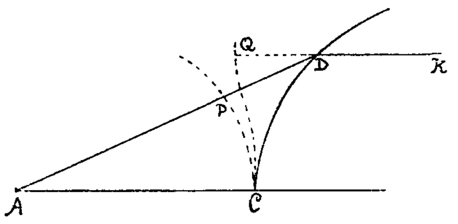
Пусть $A$ (фиг. 130) есть та точка, из которой частицы расходятся, $B$ — та, в которую они должны сойтись, $CDE$ — та кривая, которая своим обращением около оси $AB$ описывает искомую поверхность, $D$ и $E$ — две какие-либо точки этой кривой, $EF$, $EG$ — перпендикуляры, опущенные на пути $AD$ и $DB$ частицы.




Фиг. 130.

Положим, что точка $D$ приближается к $E$; тогда предельное отношение длины $DF$, на которую увеличивается $AD$, к длине $DG$, на которую уменьшается $DB$, будет равно отношению синуса угла падения к синусу угла выхода, которое задано, значит будет известно отношение увеличения длины $AD$ к уменьшению длины $DB$. Поэтому, если на оси $AB$ взять где бы то ни было точку $C$, через которую должна проходить искомая кривая, и брать отрезок $CM$, представляющий увеличение длины $AC$ в вышеупомянутом заданном отношении к отрезку $CN$, представляющему уменьшение длины $BC$, и из центров $A$ и $B$ радиусами $AM$ и $BN$ описывать два круга, пересекающихся в $D$, то эта точка $D$ и будет лежать на искомой кривой $CDE$, следовательно построение таких точек и послужит для определения требуемой кривой.

*Следствие 1.* Предполагая, что точка $A$ или $B$ или удаляется в бесконечность, или перемещается относительно $C$, занимая разные положения, получим все те кривые, которые исследованы *Декартом* в оптике и геометрии по отношению к преломлению света; но так как Декарт скрыл, каким образом он их изобрел, то в этом предложении и имелось в виду это показать.




Фиг. 131.

*Следствие 2.* Если частица, падающая на какую-либо поверхность по прямой $AD$ (фиг. 131), проводимой по какому-либо закону, выходит по какой-либо другой прямой $DK$, и из точки $C$ провести кривые $CP$ и $CQ$, постоянно перпендикулярные к $AD$ и $DK$, то приращения длин $PD$, $QD$, а следовательно, и самые длины $PD$ и $QD$, образуемые этими приращениями, будут относиться друг к другу, как синус угла падения к синусу угла выхода, и обратно.

### Предложение XCVIII. Задача XLVIII

*Предполагая то же, что и прежде, и что задана притягательная поверхность, правильная или неправильная, описанная вокруг оси $AB$, требуется определить вторую поверхность $EF$, которая заставила бы все частицы, выходящие из $A$ и проходящие через первую поверхность, собраться в заданную точку $B$.*

Пусть прямая $AB$ (фиг. 132) пересекает первую поверхность в $C$, вторую в $E$, точка же $D$ берется где бы то ни было. Положим, что отношение синуса угла падения на первую поверхность к синусу угла выхода из нее и отношение синуса угла выхода из второй поверхности к синусу угла падения на нее равны отношению двух заданных величин $M:N$. Продолжи $AB$ до $G$ так, чтобы было

$$BG:CE=(M-N):N$$

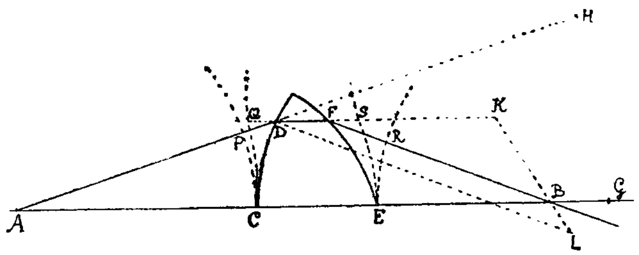
и $AD$ до $H$ так, чтобы было

$$AH=AG$$

и наконец, $DF$ до $K$ так, чтобы было

$$DK:DH=N:M.$$

Соедини $BK$ и из центра $D$ радиусом $DH$ опиши круг, пересекающий продолженную $KB$ в $L$, и проведи параллельно $DL$ прямую $BF$; точка $F$ опишет кривую $EF$, обращением которой около оси $AB$ и произведется искомая поверхность.




Фиг. 132.

Ибо вообрази, что кривые $CP$, $CQ$ постоянно перпендикулярны к линиям $AD$ и $DF$, кривые же $ER$ и $ES$ — к линиям $FB$ и $FD$; следовательно

$$QS=CE$$

тогда, по следствию 2 предложения XCVII, будет

$$\begin{aligned} PD:QD&=M:N=DL:DK=FB:FK\\ &=(DL-FB):FD=(PH-PD-FB):FD\\ &=(PH-PD-FB):(FQ-QD)\\ &=(PH-FB):FQ. \end{aligned}$$

Но по равенствам

$$PH=CG$$

и

$$QS=CE$$

предыдущее отношение равно отношению

$$(CE+CG-FR):(CE-FS).$$

А так как

$$BG:CE=(M-N):N$$

то

$$(CE+BG):CE=M:N$$

следовательно

$$FR:FS=M:N$$

и по следствию 2 предложения XCVII поверхность $EF$ заставляет частицу, падающую на нее по линии $DF$, продолжать свой путь по $FR$ в точку $B$.

*ПОУЧЕНИЕ*

По этому способу можно было бы перейти к трем или большему числу поверхностей, но для оптических приложений наиболее удобны сферические поверхности. Если бы составить объективы телескопов из двух стекол, ограниченных сферическими поверхностями, заполнив промежуток между ними водою, то, может быть, погрешности преломления, образующиеся на наружных поверхностях, были бы исправлены преломлением воды с достаточною точностью.

Такие объективы следует предпочесть эллиптическим или гиперболическим стеклам не только потому, что их легче изготовить, но и потому, что ими более правильно преломляются пучки лучей, расположенные вне оси стекол. Однако в действительности различная преломляемость разных лучей есть такое препятствие, вследствие которого в оптике сферическими или иными стеклами можно достичь лишь малого совершенства, и покуда не будут в состоянии исправить происходящие от этого погрешности, будет вполне бесполезно затрачивать труд на исправление прочих погрешностей.

---

**Примечание 116. К предложению LXVI**

В этом примечании мы приведем сперва вывод формул, выражающих изменения элементов эллиптического движения планет, ибо эти формулы служат основанием для учения о возмущениях Луны и планет.

§ 1. Тиссеран, излагая в своей «Небесной Механике» Ньютонову теорию движения Луны, пишет:

«В двадцати двух следствиях LXVI предложения Ньютон разбирает действие предыдущих сил по отношению к производимым ими возмущениям тела $P$. Соображения, которыми он руководствуется, весьма остроумны, но по сжатости изложения за ними иногда трудно следить.

«В превосходном мемуаре: „Théorie géometrique du mouvement des aphélies des planètes ponr servir d'addition aux Principes de Newton" (Oeuvres, t. V), Лагранж дал изящное геометрическое доказательство дифференциальных формул, полученных им перед тем аналитически, для движения афелиев и изменений большой оси и эксцентриситета.

«Lespiault [Théorie géométrique de la variation des éléments des planètes (Mémoires de la Societé des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 1867)], основываясь на лекциях, читанных в 1856 г. в Collège de France Бертраном, и пользуясь рассмотрением пар, сумел дать геометрические доказательства формул, относящихся к наклонности и долготе узла, дополнив таким образом мемуар Лагранжа.

«Исследования Ньютона и его последователей по указанному пути вытекают теперь весьма просто из формул, выражающих производные эллиптических элементов планеты в зависимости от составляющих возмущающей силы по радиусу-вектору $(fm'S)$, по перпендикуляру к нему в плоскости орбиты $(fm'T)$ и по перпендикуляру к этой плоскости $(fm'W)$.

«Обозначив через: $a$, $n$, $e$, $p$, $\varphi$, $\theta$, $\omega$, $\varepsilon$, $m$, $r$, $w$, $u$, $\Upsilon$ — большую полуось, среднее движение, эксцентриситет, параметр, наклонность, долготу узла, долготу перигелия, долготу эпохи, массу, радиус-вектор, истинную аномалию, эксцентрическую аномалию и, наконец, аргумент широты возмущаемой планеты $P$, через $m'$ — массу возмущающего тела $S$ и принимая массу $T$ за единицу, будем иметь такие формулы:

$$
(A)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2m'}{1+m}\cdot\frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin w+T\frac{p}{r}\right) && (1)\\
&\frac{de}{dt}=\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\,[S\sin w+T(\cos u+\cos w)] && (2)\\
&\frac{d\sqrt{p}}{dt}=\frac{m'}{1+m}na^{\frac{3}{2}}\,Tr && (3)\\
&\frac{d\varphi}{dt}=\frac{m'}{1+m}\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\cos\Upsilon && (4)\\
&\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}=\frac{m'}{1+m}\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\sin\Upsilon && (5)\\
&e\frac{d\omega}{dt}=\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right]+\\
&\qquad\qquad+2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt} && (6)\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2m'}{1+m}naSr+\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{d\omega}{dt}+\\
&\qquad\qquad+2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}\text{»}. && (7)
\end{aligned}
\right.
$$

Затем Тиссеран показывает, что Ньютону было известно выражение $\frac{d\omega}{dt}$, как это обнаружилось по оставшимся после него рукописям, перешедшим впоследствии к лорду Портсмуту, и продолжает: «весьма вероятно, что Ньютону были известны и выражения $\frac{d\theta}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$. Я склонен полагать, что он знал все формулы (1—7), но что он предпочел, вместо того чтобы их опубликовать, вывести из них большое число геометрических предложений, которые он получал, рассматривая всякий раз лишь действие, производимое одной из составляющих» (F. Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, t. III, ch. III).

Те же формулы приводятся и в главе XXVIII тома I, где Тиссеран говорит по поводу их: «формулы (A) весьма важны, в особенности, если желательно получить изменяющиеся значения элементов при помощи «Механических квадратур».

Обыкновенно приведенные выше по Тиссерану формулы выводят из общей теории изменения произвольных постоянных. Но эта теория требует для своего уставовления довольно сложных выкладок и соображений, между тем все эти формулы можно вывести непосредственно основываясь на предложении XVII ньютоновых «Начал». Но прежде чем привести этот вывод, обратим внимание на следующие слова Лагранжа в § 2 его мемуара, упомянутого выше: «Если сочинение Ньютона и не предлагает точной теории движения афелиев, то тем не менее оно содержит ее зачатки, и лишь трудность ее развития, может быть, мешала до сих пор воспользоваться ими. Они находятся в предложении XVII первой книги, в котором показано определение элементов конического сечения, описываемого телом, брошенным с заданною скоростью по заданному направлению и подверженным непрерывному действию центральной силы, обратно пропорциональной квадратам расстояний. В третьем следствии этого предложения Ньютон замечает, что если тело движется по коническому сечению и каким-либо натиском бу ет отклонено от своей орбиты, то можно найти его новую орбиту, по которой оно после того будет двигаться, присовокупив к тому количеству движения, которым тело уже обладало, то количество движения, которое натиск ему сообщил, ибо таким образом получится по величине и направлению то новое количество движения, с которым тело покинет то место, где на него подействовал натиск».

§ 2. Приведенное в словах Лагранжа следствие 3 предложения XVII и содержит всю теорию изменения элементов орбиты. В самом деле, если натиск внезапный и весьма малой продолжительности, вроде удара, то он производит лишь изменение количества движения тела, иначе скорости его, положение же тела за время действия этого натиска *не изменяется*; значит, по этому прежнему положению и новой скорости и найдутся элементы новой орбиты.

Если же натиск, иначе говоря возмущающая сила, действует постепенно и непрерывно, то и скорость изменяется непрерывным образом. Если рассмотреть то действие, которое произведет возмущающая сила в продолжение бесконечно малого промежутка времени $dt$, то скорость получит приращение, направление коего совпадает с направлением силы и величина которого пропорциональна напряжению силы и продолжительности ее действия $dt$, изменения же или приращения координат тела, вызываемые действием этой возмущающей силы, будут пропорциональны $dt^2$, т. е. *будут второго порядка относительно* $dt$.

Следовательно, надо взять формулы эллиптического движения, придать приращение лишь скорости; члены первого порядка в полученных приращениях элементов, по разделении на $dt$, и дадут так называемые «изменения эллиптических элементов», выражаемые в небесной механике приведенными выше формулами (A).

Остается теперь выполнить выкладки, вытекающие из приведенного выше указания.

Сам Лагранж, излагая в своей «Mécanique Analytique» теорию изменения произвольных постоянных и прилагая ее затем во II главе VII отдела к изменению эллиптических элементов планет, делает вышеприведенное указание, но, не развивая вытекающего из него способа получения требуемых формул, он находит их из общих формул изменения произвольных постоянных, являющихся результатом общей теории им данной.

§ 3. Основные формулы эллиптического движения, которые нам понадобятся и которые можно найти в любом курсе астрономии, следующие:

$$\left.\begin{aligned}
r^2\frac{dw}{dt} &= c \;.\;.\;.\; \text{интеграл площадей}\\
v^2 &= f\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \text{ интеграл живых сил}\\
f\mu &= f(1+m) = \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\cdot a^3 = n^2 a^3\\
c &= \sqrt{f\mu}\cdot\sqrt{p} = na^2\sqrt{1-e^2}\\
r &= \frac{p}{1+e\cos w} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}\\
r &= a(1-e\cos u)\\
r\sin w &= a\sqrt{1-e^2}\sin u\\
r\cos w &= a(\cos u - e)\\
u - e\sin u &= nt + \varepsilon - \omega.
\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Пусть $m'$ есть масса возмущающего тела; обозначим, как уже сказано, составляющие возмущающей силы (ускорения): по радиусу-вектору — через $fm'S$, по перпендикуляру к нему в плоскости орбиты — через $fm'T$ и по перпендикуляру к этой плоскости — через $fm'W$, и через $\alpha, \beta, \gamma$ — проекции или составляющие бесконечно малого изменения скорости, производимые этими силами в продолжение бесконечно малого промежутка времени $dt$. Тогда будет:

$$\alpha = f \cdot m' S\,dt; \quad \beta = fm' T\,dt; \quad \gamma = fm' W\,dt. \tag{8}$$

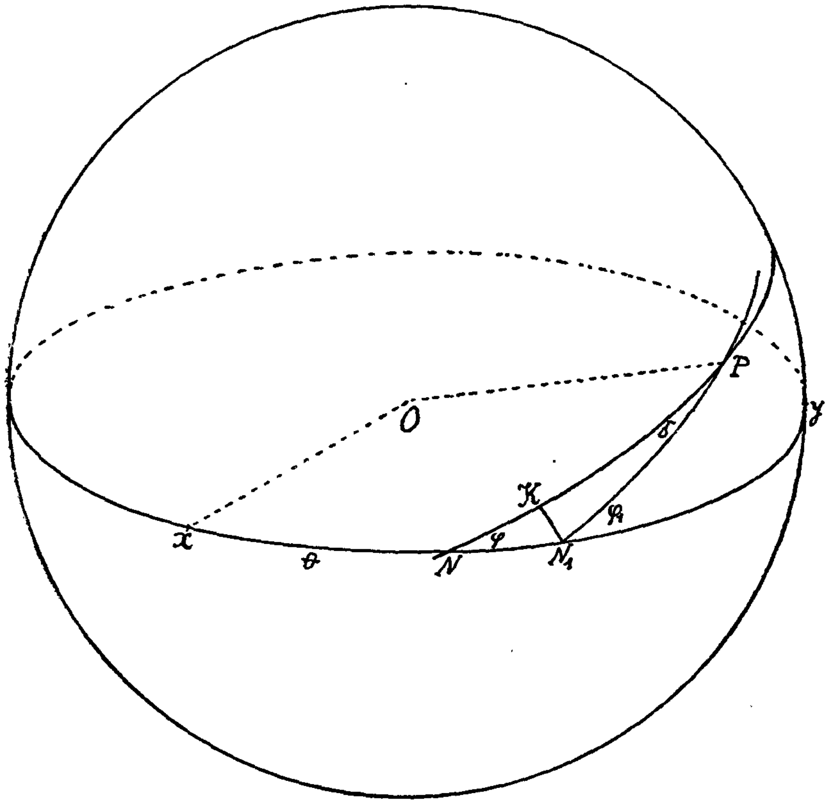
Начнем с нахождения изменений элементов, определяющих положение плоскости орбиты, т. е. долготы узла $\theta$ и наклонности $\varphi$.

Если в момент времени $t - dt$ тело проходило через какую-либо точку $P_0$ своей орбиты со скоростью $V_0$, то когда возмущающей силы нет, оно приходит в момент $t$ в некоторую точку $P$ той же самой орбиты, обладая скоростью $V$. Если определять элементы орбиты по положению $P$ и скорости $V$, то получится та же самая начальная или невозмущенная орбита. Но когда тело подвержено действию возмущающей силы, то выйдя в момент $t - dt$ из точки $P_0$ с тою же скоростью $V_0$, оно придет в момент $t$ в некоторую точку $P_1$, обладая в ней скоростью $V_1$. Это новое положение $P_1$ и новая скорость $V_1$ и дадут элементы возмущенной орбиты. Разность или приращение соответствующих элементов этих двух орбит, по разделении на $dt$, представят производные элементов по времени, которые и требуется найти.

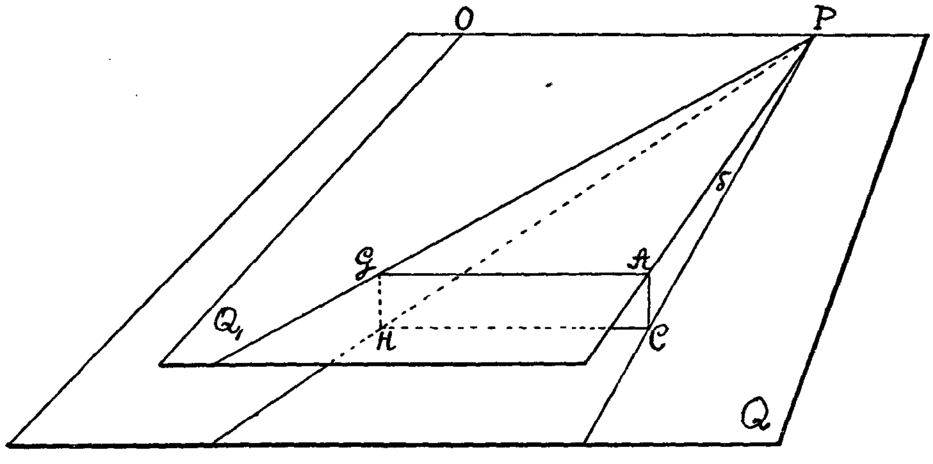
Но расстояние $PP_1$ двух вышеупомянутых положений тела $P$ есть величина второго порядка относительно $dt$, разности же соответствующих слагающих скоростей $V_1$ и $V$ суть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, т. е. величины первого порядка относительно $dt$. Поэтому, при разыскании производных элементов орбиты, можно рассматривать, что точки $P$ и $P_1$ совпадают, иначе — что положение тела $P$ не изменилось от действия возмущающей силы, но что тело обладает в этой точке скоростью $V_1$, коей составляющие отличаются от составляющих скорости $V$ на величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Следовательно, стоит только исчислить приращение каждого элемента в этом предположении и разделить это приращение на $dt$, частное и представит требуемое выражение изменения этого элемента.

Положение плоскости возмущенной орбиты определяется направлением новой скорости и центром $O$ главного тела (фиг. 134). Так как положение тела $P$ не изменилось (точнее говоря, так как изменения положения тела $P$, *вызываемые действием возмущающей силы*, — второго порядка относительно $dt$),




Фиг. 133.




Фиг. 134.

то прямая $OP$ есть пересечение этих двух плоскостей; пусть $PH$ есть вектор, представляющий скорость $V$ в рассматриваемый момент в невозмущенном движении и, следовательно, лежащий в плоскости $OPQ$ первоначальной орбиты; чтобы получить положение $OPQ_1$ новой орбиты (отбрасывая попрежнему члены второго порядка относительно $dt$), стоит только отложить длину $HG = \gamma$ по перпендикуляру к плоскости $POHQ$, плоскость $OPGQ$, проходящая через прямые $OP$ и $PG$, и есть требуемая.

Чтобы определить бесконечно малый угол $\delta$, составляемый ею с плоскостью первоначальной орбиты, проведем плоскость $PCA$, перпендикулярную к ребру $OP$, и спроектируем прямую $GH$ на эту плоскость.

Тогда будет

$$\delta = \frac{AC}{CP}.$$

Но

$$AC = HG = \gamma; \quad CP = r \cdot \frac{dw}{dt}$$

ибо $CP$ есть составляющая скорости тела $P$ по перпендикуляру к радиусу-вектору $OP$.

Но

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c$$

следовательно

$$CP = \frac{c}{r}$$

и предыдущая формула будет

$$\delta = \gamma \cdot \frac{r}{c}. \tag{9}$$

Чтобы получить изменения наклонности $\varphi$ и долготы узла $\theta$, обратимся к фиг. 133 и, составив сферический угол $NPN_1 = \delta$, получим новый узел $N_1$ и новую наклонность $\varphi_1$.

Сферический треугольник $NPN_1$ и доставит требуемые изменения этих элементов.

Проводим $N_1K$ перпендикулярно к $NP$, тогда

$$N_1K = \delta \cdot \sin N_1P = (\sin NP + \text{бескон. мал.}) \cdot \delta = \delta \cdot \sin \Upsilon,$$

причем члены высшего порядка отбрасываются.

Но в бесконечно малом треугольнике $NN_1K$ будет

$$NN_1 \cdot \sin \varphi = KN_1.$$

Но $NN_1 = d\theta$ есть изменение долготы узла, следовательно будет

$$\sin\varphi \cdot d\theta = \sin\Upsilon \cdot \delta = \sin\Upsilon \cdot \frac{\gamma \cdot r}{c}$$

и, подставляя вместо $\gamma$ его величину $fm'\,Wdt$, получим по разделении на $dt$:

$$\sin\varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{fm'}{c} rW \sin\Upsilon.$$

Но по формулам (E) имеем

$$\frac{f}{c} = \frac{c}{(1+m)p} = \frac{na}{(1+m)\sqrt{1-e^2}}$$

следовательно будет

$$\sin\varphi \frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, Wr \sin\Upsilon. \tag{5}$$

Это есть как раз формула (5) группы (A).

Чтобы получить изменение наклонности, возьмем треугольник $PNN_1$, и пусть

$$PN_1 y = \varphi_1 = \varphi + d\varphi,$$

тогда будет:

$$PNN_1 = \varphi;\quad PN_1 N = \pi - \varphi_1;\quad NPN_1 = \delta;\quad NP = \Upsilon,$$

следовательно

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta \cdot \cos\Upsilon.$$

Но

$$\cos\delta = 1,\quad \sin\delta = \delta$$

и значит,

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = -\sin\varphi \cdot d\varphi = -\sin\varphi \cdot \cos\Upsilon \cdot \delta.$$

Заменив $\delta$ и $f$ их величинами, получим по разделении на $dt$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, Wr \cos\Upsilon \tag{4}$$

это есть формула (4) группы (A).

Отсюда видно, что для вывода этих формул достаточно самых простых и элементарных соображений.

§ 4. Величина и вид эллипса в плоскости орбиты определяются элементами $a$ и $e$, т. е. большою полуосью и эксцентриситетом, от этих же элементов зависит и параметр орбиты $p$.

Нормальная составляющая $\gamma$ изменения скорости вызывает лишь изменение плоскости орбиты и не сказывается на ее виде и величине, поэтому придется рассматривать лишь влияние изменений скорости, обозначенных через $\alpha$ и $\beta$, именно:

$$\alpha = fm' S dt$$
$$\beta = fm' T dt$$

по направлению радиуса-вектора и по направлению, к нему перпендикулярному.

Обозначим через $v_1$ и $v_2$ — проекции первоначальной скорости на эти направления, т. е.

$$v_1 = \frac{dr}{dt}$$

и

$$v_2 = r\frac{dw}{dt}.$$

Их измененные величины будут

$$v_1 + \alpha \quad \text{и} \quad v_2 + \beta$$

и пусть

$$a_1 = a + da$$

новая большая полуось.

Уравнение живых сил дает:

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V_1^2 = (v_1 + \alpha)^2 + (v_2 + \beta)^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}\right)$$

ибо радиус-вектор $r$, как уже сказано, от действия возмущающих сил претерпевает лишь изменения второго порядка и, следовательно, должен считаться постоянным.

Разность этих уравнений дает

$$2v_1\alpha + 2v_2\beta = f\mu\frac{da}{a^2}$$

следовательно

$$f\mu\frac{da}{a^2} = fm'[Sv_1 + Tv_2]\,dt$$

Но, по формулам (E),

$$v_1 = \frac{e}{p}\sin w \cdot \frac{r^2\,dw}{dt} = \frac{ce\sin w}{p}; \quad v_2 = \frac{c}{r}$$

таким образом будет

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{\mu}\cdot a^2 \cdot \frac{c}{p}\left[eS\sin w + \frac{p}{r}T\right]$$

но

$$\mu = 1 + m$$

и

$$\frac{c}{p} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

следовательно

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}} \left[ Se \sin w + \frac{p}{r} T \right]. \tag{1}$$

Это есть формула (1) группы (A).

Затем имеем

$$c = \sqrt{p} \cdot \sqrt{f\mu} = v_2 r$$

для возмущенной орбиты будет

$$c_1 = \sqrt{p_1} \cdot \sqrt{f\mu} = (v_2 + \beta) r$$

причем

$$p_1 = p + dp.$$

Таким образом

$$\sqrt{f\mu} \cdot \left(\sqrt{p_1} - \sqrt{p}\right) = \sqrt{f\mu} \cdot d\left(\sqrt{p}\right) = \beta \cdot r$$

но

$$\beta = fm' T dt$$

и

$$\frac{f}{\sqrt{f\mu}} = \frac{na^{\frac{3}{2}}}{1+m}$$

следовательно

$$\frac{d(\sqrt{p})}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^{\frac{3}{2}} Tr. \tag{3}$$

Это есть формула (3) группы (A).

Большая полуось, параметр и эксцентриситет связаны соотношением

$$p = a(1 - e^2)$$

значит будет

$$2ae\frac{de}{dt} = (1 - e^2)\frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}$$

и, заменив $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ их величинами (1) и (3), получим

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1 - e^2} \left[ S \sin w + T (\cos u + \cos w) \right]. \tag{2}$$

Это есть формула (2) группы (A).

§ **5.** Направление большой оси орбиты в ее плоскости определяется долготою перигелия ω.

Обращаясь к фиг. 133, имеем:

$$xN + NP = \omega + w$$
$$xN_1 + N_1 P = \omega_1 + w_1$$

следовательно

$$(xN_1 - xN) + (N_1 P - NP) = (\omega_1 - \omega) + (w_1 - w) = d\omega + dw$$

но

$$xN_1 - xN = NN_1 = d\theta$$
$$NP_1 - NP = -NK = -NN_1 \cos\varphi = -\cos\varphi \cdot d\theta$$

значит будет

$$d\omega + dw = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot d\theta \qquad (*)$$

Но, по формуле (E),

$$1 + e\cos w = \frac{1}{r}p$$

и так как радиус-вектор не изменяется, то

$$-e\sin w\frac{dw}{dt} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dp}{dt} - \frac{de}{dt}\cos w.$$

Подставляя вместо $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$ их величины (3) и (2), получим

$$-e\sin w\frac{dw}{dt} = \frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\,[(2-\cos u\cos w-\cos^2 w)\,T - S\sin w\cos w].$$

Но, по формуле (E),

$$\cos u = \frac{1}{e}\left(1-\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{e}\,\frac{1+e\cos w - 1 + e^2}{1+e\cos w} = \frac{e+\cos w}{1+e\cos w}$$

следовательно

$$2 - \cos^2 w - \cos u\cos w = 1 + \sin^2 w - \frac{e\cos w + \cos^2 w}{1+e\cos w} =$$
$$= \sin^2 w\left[1 + \frac{1}{1+e\cos w}\right] = \sin^2 w\left(1+\frac{r}{p}\right)$$

таким образом

$$-e\frac{dw}{dt} = \frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right]$$

после чего формула (*) дает

$$e\frac{d\omega}{dt} = 2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt} +$$
$$+\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right]. \qquad (6)$$

Это есть формула (6) группы (A).

§ 6. Положение планеты $P$ на ее орбите определяется для любого момента времени $t$, когда известна средняя долгота для начального момента, или, как ее называют, долгота эпохи $\varepsilon$, при помощи Кеплерова уравнения

$$u - e\sin u = nt + \varepsilon - \omega. \qquad (*)$$

Во всех формулах, относящихся к возмущенному движению, величина $\varepsilon$ входит всегда в составе количества $nt + \varepsilon$, поэтому изменение всего этого количества относится на изменение $\varepsilon$, величина же $nt$ почитается неизменяющейся. Поэтому в уравнении (*), при его дифференцировании, будем $nt$ считать постоянным, и тогда будет

$$d\varepsilon = du + d\omega - e\cos u du - \sin u \cdot de. \qquad (**)$$

Но мы видели, что

$$dw = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}d\theta - d\omega. \qquad (***)$$

Уравнение

$$r\cos w = a(\cos u - e)$$

дает

$$-r\sin w\, dw = (\cos u - e)\, da - a\sin u\, du - a\, de$$

но

$$\sqrt{1-e^2}\, a\sin u = r\sin w$$

следовательно

$$du = \sqrt{1-e^2}\, dw + \frac{\cos u - e}{\sin u}\cdot\frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de$$

подставив вместо $dw$ его величину, имеем

$$du + d\omega = 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot d\theta + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}d\omega +$$

$$+\frac{\cos u - e}{\sin u}\cdot\frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de.$$

Обозначим, для сокращения письма, первые два члена в правой части этого уравнения через $\Delta$, тогда оно напишется так:

$$du + d\omega = \Delta + \frac{\cos u - e}{\sin u}\cdot\frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de.$$

По формуле (E) имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

отсюда

$$e du = \frac{\cos u}{\sin u}de - \frac{r}{a\sin u}\cdot\frac{da}{a}$$

следовательно

$$e\cos u du = \frac{\cos^2 u}{\sin u} de - \frac{r}{a}\cdot\frac{\cos u}{\sin u}\cdot\frac{da}{a}$$

и уравнение (**) будет

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{a(\cos u - e) + r\cos u}{a\sin u}\cdot\frac{da}{a} - \left(\frac{1}{\sin u} + \sin u + \frac{\cos^2 u}{\sin u}\right) de$$

$$= \Delta + \frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u}\cdot\frac{da}{a} - \frac{2}{\sin u} de.$$

Подставив вместо $da$ и $de$ их величины (1) и (2), получим

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{2m'}{1+m}\cdot\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[Se\sin w + \frac{p}{r}T\right]\cdot\frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u} dt$$

$$-\frac{2m'}{1+m}\cdot\frac{na^2}{\sin u}\sqrt{1-e^2}\,[S\sin w + T(\cos w + \cos u)]\,dt.$$

Соберем во второй части члены, содержащие $S$ и $T$, так, чтобы было

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{2m'}{1+m} na^2 [AS + BT]\,dt$$

тогда

$$A = \frac{e\sin w}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u} - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin w}{\sin u} =$$

$$= e(\cos w + \cos u) - \frac{a(1-e^2)}{r} = e\cos w + e\cos u - 1 - e\cos w = -\frac{r}{a}$$

$$B = (\cos w + \cos u)\left[\frac{pr}{ra\sqrt{1-e^2}} - \sqrt{1-e^2}\right] = 0$$

следовательно

$$d\varepsilon = \Delta - \frac{2m'}{1+m} narS\,dt.$$

Подставив вместо $\Delta$ его величину и разделив на $dt$, имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m} narS + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}. \quad (7)$$

Это есть формула (7) группы (А).

Таким образом все формулы группы (А) могут быть выведены весьма просто, прямым и непосредственным образом, на основании указания Ньютона, совершенно независимо от общей теории изменения произвольных постоянных. Вместе с тем вывод этот требует нахождения приращений или дифференцирования лишь самых простых функций и применения таких правил, которые все имеются в «Methodus Fluxionum»; поэтому надо думать, что Тиссеран был вполне прав утверждая, что Ньютону эти формулы были известны.

§ 7. Получив таким образом все формулы, дающие изменения эллиптических элементов в зависимости от проекций возмущающей силы, можно сделать и дальнейший шаг, введя вместо $S$, $T$ и $W$ производные так называемой пертурбационной функции $R$, через которые эти силы выражаются.

Положим сперва, что возмущающее тело только одно, масса его $m'$, масса возмущаемого тела $m$ и главного тела 1.

Как известно, проекции возмущающей силы на оси координат выражаются частными производными $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ пертурбационной функции по соответствующим координатам возмущаемого тела.

Пусть $x_1$, $y_1$, $z_1$ суть координаты возмущающего тела, $x$, $y$, $z$ — возмущенного и начало $O$ находится в центре главного тела, тогда полагая

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ R &= fm' \cdot \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

После этих предварительных замечаний обратимся опять к «Небесной Механике» Тиссерана и возьмем из нее следующее место главы XXVII тома I.

«По теореме проекций, воспользовавшись формулами сферической тригонометрии, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{fm'} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} &= S[\cos \Upsilon \cos \theta - \sin \Upsilon \sin \theta \cos \varphi] + \\ &\quad + T[-\sin \Upsilon \cos \theta - \cos \Upsilon \sin \theta \cos \varphi] + W \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{1}{fm'} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} &= S[\cos \Upsilon \sin \theta + \sin \Upsilon \cos \theta \cos \varphi] + \\ &\quad + T[-\sin \Upsilon \sin \theta + \cos \Upsilon \cos \theta \cos \varphi] - W \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{1}{fm'} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} &= S \sin \Upsilon \sin \varphi + T \cos \Upsilon \sin \varphi + W \cos \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где через $\Upsilon$ обозначено угловое расстояние планеты до ее восходящего узла, т. е. аргумент широты.

«Пусть $\sigma$ есть который-нибудь из эллиптических элементов, тогда будет

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \sigma}. \tag{12}$$

Величины производных $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ найдутся на основании формул эллиптического движения, именно:

$$\left.\begin{aligned}
x &= r(\cos\Upsilon\cos\theta - \sin\Upsilon\sin\theta\cos\varphi)\\
y &= r(\cos\Upsilon\sin\theta + \sin\Upsilon\cos\theta\cos\varphi)\\
z &= r\sin\Upsilon\sin\varphi\\
\Upsilon &= \omega - \theta + w\\
u - e\sin u &= nt + \varepsilon - \omega\\
r &= a(1 - e\cos u) = \frac{p}{1 + e\cos w}\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}w &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

«Производные по $\varphi$ вычисляются без всяких затруднений; по отношению к производным по $\theta$ необходимо заметить, что $\theta$ входит в формулы и явно и не явно при посредстве величины $\Upsilon$, затем

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \Upsilon} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Наконец, производные по $a$, $e$, $\varepsilon$ легко получаются заметив, что будет:

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a},\quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos w,\quad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin w$$

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial a} = 0,\quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial e} = \frac{2 + e\cos w}{1 - e^2}\sin w,\quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

«Мы не изменяем $a$ в выражении $nt + \varepsilon - \omega$, ибо мы предполагаем, что в формулы вводится $\int n\,dt$ вместо $nt$.

«Найдя, на основании такого вычисления, $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$, получим, на основании формул (11) и (12), производные $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$.

После простых приведений получатся следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial a}=S\frac{r}{a}\\
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi}=Wr\sin\Upsilon\\
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial e}=-Sa\cos w+T\frac{2+e\cos w}{1-e^2}r\sin w\\
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=S\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin w+T\frac{a^2}{r}\sqrt{1-e^2}\\
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial \theta}=-2Tr\sin^2\frac{\varphi}{2}-Wr\sin\varphi\cos\Upsilon\\
&\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega}=-\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+Tr.\text{»}
\end{aligned}\right\}\qquad (C)$$

Из этой выписки видно, что для получения формул (С) достаточно непосредственных дифференцирований и простых подстановок.

§ 8. Чтобы получить формулу (A), Тиссеран подставляет значения производных, даваемых формулами (С), в общие формулы изменений элементов, получаемые на основании общей теории.

Мы же будем следовать как раз обратному пути; так как группа формул (A) нами выведена непосредственно, стоит из формул (С), получаемых, как видно, также независимо от общей теории изменения произвольных постоянных, найти выражения $S$, $T$, $W$ через производные пертурбационной функции $R$ и подставить их в формулы (A), то мы и получим ту общую группу формул, установление которой требуется.

Обратив внимание на состав формул (A) и (С), нетрудно заметить, что величины $S$, $T$ и $W$ входят в обе группы одинаковыми между собою сочетаниями, поэтому из формул (С) надо непосредственно находить требуемые сочетания, которые и подставлять в формулы (A).

Так, формула (4) группы (С) дает непосредственно:

$$Se\sin w+\frac{Tp}{r}=\frac{1}{fm'}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

что, по подстановке в формулу (1) группы (A), в силу соотношения

$$f\cdot(1+m)=n^2a^3 \qquad (*)$$

дает

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{an}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \qquad (15)$$

Формула (2) группы (C) дает

$$Wr\sin\Upsilon = \frac{1}{fm'}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}$$

что, по подстановке в формулу (5) группы (A), на основании того же соотношения (*), дает

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}. \tag{16}$$

Формула (4) группы (A) содержит величину $Wr\cos\Upsilon$; в группе (C) эта величина содержится в уравнениях (5) и (6) совместно с $Tr$.

Исключив $Tr$ из уравнений (5) и (6), получим

$$Wr\cos\Upsilon = -\frac{1}{fm'}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{1}{fm'}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)$$

после чего подстановка в формулу (4) группы (A) дает

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^3\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{1}{fm'}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right). \tag{17}$$

Заметив, что

$$\frac{2+e\cos w}{e(1-e^2)}\cdot r = \frac{(1+1+e\cos w)\frac{p}{1+e\cos w}}{p} = 1+\frac{1}{1+e\cos w} = 1+\frac{r}{p}$$

можно формулу (3) группы (C) написать так:

$$\frac{1}{fm'}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} = -S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w \tag{3'}$$

после чего уравнение (6) группы (A) обратится в следующее:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2e}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

Заменив $\frac{d\theta}{dt}$ его величиною (16), получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial\varphi}. \tag{18}$$

Стоит только подставить в формулу (7) группы (A) значения $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ и выражение

$$Sr = \frac{1}{fm'}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial a}$$

и заменить $f\cdot(1+m)$ через $n^2a^3$, чтобы получить формулу

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi} + \sqrt{1-e^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{19}$$

Подстановка величины

$$Tr = \frac{1}{fm'}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)$$

в уравнение (3) группы (A) дает

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{1}{na^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right] \tag{20}$$

или иначе

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right). \tag{21}$$

Остается еще найти $\frac{de}{dt}$. Но мы имеем

$$p = a(1-e^2);$$

взяв логарифмическую производную, имеем

$$\frac{2e}{1-e^2}\cdot\frac{de}{dt} = \frac{1}{a}\cdot\frac{da}{dt} - \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt}.$$

Подставив вместо $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ их величины (15) и (21) получим,

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \tag{22}$$

Таким образом мы получаем следующую группу формул:

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} && (15)\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi} && (16)\\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} && (18)\\
&\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} && (22)\\
&\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) && (17)\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} && (19)\\
&\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right). && (21)
\end{aligned}\right.$$

Эта группа формул, приведенная на стр. 190 т. I «Небесной Механики» Тиссерана, составляет заключительный вывод главы XI этого тома и служит основанием для всей теории возмущенного движения планет по методе изменения постоянных произвольных, изложению которой и посвящен весь этот том.

Достаточно обратить внимание на то, что $R$ есть линейная и однородная функция масс $m'$, $m''$, ... возмущающих тел, именно:

$$R = \sum fm_i \left[ \frac{1}{\rho_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3} \right]$$

где

$$\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

и

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

так же как и *полные* составляющие возмущающих сил, чтобы видеть, что формулы (B) совершенно общие, т. е. что они имеют место при любом числе возмущающих тел.

Из этого примечания, нарочно изложенного с такою подробностью, видно то значение, которое имеет следствие 3 предложения XVII для «Небесной Механики»; вместе с тем стоит только сравнить вывод формулы (A) и затем (B), данный здесь, следуя истинному смыслу слов Ньютона, с выводом этих формул на основании общей теории изменения произвольных постоянных в «Механике» Тиссерана или в т. I Annales de l'Observatoire de Paris par U. J. Le Verrier, где этот вывод, опуская все простые и промежуточные выкладки, занимает 22 страницы мелкой печати большого in 4°, чтобы еще более убедиться в пользе изучения ньютоновых «Начал» при изучении даже и современной небесной механики.

§ 9. Приведем теперь выраженин сил $S$, $T$ и $W$. Примем за плоскость $xy$ плоскость орбиты тела $P$, и пусть массы этих тел суть: главного тела $T$ ... $M$, тела $P$ ... $m$ и возмущающего тела $S$ ... $m'$; обозначим соответственно расстояния:

$$TP = r; \quad TS = r_1; \quad PS = \rho.$$

Тогда можно рассматривать, что от взаимного притяжения на эти тела действуют соответственно силы, сообщающие им следующие ускорения:

$$\begin{array}{llllll}
\text{телу } T \ldots & \dfrac{fm'}{r_1^2} & \text{по } TS & \text{и } \dfrac{fm}{r^2} & \text{по } TP \\
\text{»} \quad S \ldots & \dfrac{fM}{r_1^2} & \text{» } ST & \text{и } \dfrac{fm}{\rho^2} & \text{» } SP \\
\text{»} \quad P \ldots & \dfrac{fM}{r^2} & \text{» } PT & \text{и } \dfrac{fm'}{\rho^2} & \text{» } PS,
\end{array}$$

причем порядок букв, напр. $TS$, указывает, что ускорение направлено по прямой $TS$ от $T$ к $S$, а $ST$ означает, что ускорение направлено по той же прямой от $S$ к $T$.

Но движение рассматриваемого тела $P$ относится к телу $T$, принимаемому за неподвижное, следовательно надо к прочим двум телам приложить такие силы, которые сообщали бы им ускорения, равные и противоположные ускорению тела $T$; таким образом к телу $P$ надо еще приложить ускорительные силы: $\frac{fm}{r^2}$ по $PT$ и $\frac{fm_1}{r_1^2}$ по направлению, параллельному $ST$; таким образом на тело $P$ будут действовать следующие ускорительные силы:

$$F_1 = \frac{f(M+m)}{r^2} \text{ по } PT$$

$$F_2 = \frac{fm'}{r_1^2} \text{ параллельно } ST$$

$$F_3 = \frac{fm'}{\rho^2} \text{ по } PS$$

и на тело $S$ — следующие силы:

$$P_1 = \frac{f(M+m')}{r_1^2} \text{ по } ST$$

$$P_2 = \frac{fm}{r^2} \text{ параллельно } PT$$

$$P_3 = \frac{fm}{\rho^2} \text{ по } SP.$$

Так как имеется в виду рассматривать движение тела $P$, то и разберем силы, на него действующие.

Сила $F_1$, направленная к принятому за неподвижное телу $T$ и обратно пропорциональная квадрату расстояния до него, дает невозмущенное эллиптическое движение. Возмущающие силы суть $F_2$ и $F_3$; их и надо разложить по вышеприведенным трем направлениям.

Для этого опустим из точки $S$ на плоскость орбиты тела $P$ перпендикуляр $SJ$ и из точки $J$ перпендикуляр $JH$ на радиус-вектор $TP$, тогда сила $F_3$ разлагается на следующие три:

$$F_3 \cdot \frac{PH}{\rho}; \quad F_3 \cdot \frac{HJ}{\rho}; \quad F_3 \cdot \frac{JS}{\rho}$$

и сила $F_2$ — на следующие три:

$$-F_2 \cdot \frac{TH}{r_1}; \quad -F_2 \cdot \frac{HJ}{r_1}; \quad -F_2 \frac{JS}{r_1},$$

таким образом будет:

$$fm'S = F_3 \cdot \frac{PH}{\rho} - F_2 \cdot \frac{TH}{r_1} = fm'\left[\frac{PH}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3}\right]$$

$$fm'T = fm'\left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] \cdot HJ$$

$$fm'W = fm'\left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] \cdot JS,$$

следовательно

$$S = \frac{PH}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3} = \frac{TH - r}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3} = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) TH - \frac{r}{\rho^3}$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \cdot HJ$$

$$W = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \cdot JS.$$

Условившись означать через $\lambda$ и $\lambda_1$ — долготу тела $P$ и тела $S$, считаемую в плоскости орбиты тела $P$, и через $\beta$ — широту тела $S$ от той же плоскости, будем иметь:

$$TH = r_1 \cos\beta \cos(\lambda_1 - \lambda)$$

$$HJ = r_1 \cos\beta \sin(\lambda_1 - \lambda)$$

$$JS = r_1 \sin\beta$$

таким образом будет:

$$\left.\begin{aligned} S &= -\frac{r}{\rho^3} + \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \cos(\lambda_1 - \lambda) \\ T &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \sin(\lambda_1 - \lambda) \\ W &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Предложение LXVI, как указано Ньютоном в предисловии, имеет в виду приложения к теории Луны, поэтому для общего обозрения главнейших неравенств он сперва пренебрегает наклонением лунной орбиты к эклиптике, т. е. полагает в формуле (23); $\cos\beta = 1$; тогда будет

$$\rho^2 = r_1^2 - 2rr_1 \cos(\lambda_1 - \lambda) + r^2 = r_1^2 \left[1 - 2\frac{r}{r_1}\cos(\lambda_1 - \lambda) + \frac{r^2}{r_1^2}\right],$$

вместе с тем отношение $\frac{r}{r_1}$ составляет около $\frac{1}{400}$, поэтому, если пренебречь квадратами и высшими степенями этой величины, то можно в первом приближении взять

$$\rho^{-3} = r_1^{-3}\left[1 + 3\frac{r}{r_1}\cos(\lambda_1 - \lambda)\right]$$

и тогда будет

$$S = -\frac{r}{r_1^3} + \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{3r}{r_1^4}\cos(\lambda_1 - \lambda) - \frac{1}{r_1^3}\right] r_1 \cos(\lambda_1 - \lambda)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{r}{r_1^3}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2(\lambda_1 - \lambda)\right] \\ \text{и}\qquad T &= \frac{3}{2}\cdot\frac{r}{r_1^3}\sin 2(\lambda_1 - \lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Эти величины, при подстановке в формулы группы (A), а также и при непосредственном рассмотрении действия на тело $P$ сил, ими представляемых, в значительной степени облегчают понимание высказываемых в следствиях предложения LXVI утверждений.

# О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ

## КНИГА ВТОРАЯ

## ОТДЕЛ I

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ СКОРОСТИ

### Предложение I. Теорема I

*Количество движения, теряемое телом от сопротивления, пропорционального скорости, пропорционально пройденному при движении пространству.*

Ибо количество движения, теряемое в продолжение каждого отдельного весьма малого промежутка времени, пропорционально скорости, т. е. и пройденному в этот промежуток весьма малому пути, следовательно, сложив, получим, что и полное потерянное количество движения пропорционально полному пройденному пути.

*Следствие.* Поэтому, если тело, никакому тяготению не подверженное, будет двигаться в свободном пространстве по инерции и будет известно как его начальное количество движения, так и остающееся после прохождения какого-либо заданного пути, то найдется и полное пространство, которое тело может описать в бесконечно большое время; именно, это пространство так относится к уже описанному, как полное начальное количество движения к потерянному.[128]

---

[128] Обозначив через $m$, $v$, $k$ — массу, скорость и коэффициент сопротивления и полагая, что точка движется по оси $x$, выйдя из начала координат со скоростью $v_0$, можем написать дифференциальное уравнение ее движения так:

$$m\frac{dv}{dt} = -k\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

откуда, при вышеуказанных начальных условиях, следует

$$mv_0 - mv = kx. \tag{2}$$

Это равенство и выражает высказанную теорему.

Наибольшее пространство $X$, проходимое телом, получится полагая в формуле (2):

$$v = 0 \quad \text{и} \quad x = X$$

### Лемма I

*Количества, пропорциональные своим разностям, образуют непрерывную пропорцию.*

Пусть будет

$$A : A - B = B : B - C = C : C - D \text{ и т. д};$$

тогда по обращении получится:

$$A : B = B : C = C : D \text{ и т. д.}$$[129]

### Предложение II. Теорема II

*Если тело испытывает сопротивление, пропорциональное скорости, и по инерции движется в однообразной среде и если взять равные последовательные промежутки времени, то скорости в начале каждого отдельного промежутка образуют геометрическую прогрессию, пространства же, пройденные в продолжение каждого промежутка, будут пропорциональны скоростям.*

*Случай 1.* Если время подразделить на равные промежутки и если бы в начале каждого промежутка сила сопротивления действовала бы мгновенным натиском, пропорциональным скорости, то уменьшение скорости для каждого промежутка было бы пропорционально самой скорости. Следовательно, такие скорости (по лем. I кн. II), пропорциональные своим разностям, составляют геометрическую прогрессию. Поэтому, если из одинакового числа этих равных малых промежутков составить новые равные промежутки времени, то скорости в начале этих новых промежутков будут относиться между собою, как те члены первоначальной геометрической прогрессии, которые будут в ней взяты скачками, пропуская соответственно по равному числу промежуточных членов. Вместе с тем эти члены обра-

---

так что будет

$$mv_0 = kX. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует

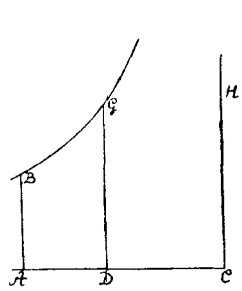
$$X : x = v_0 : (v_0 - v). \tag{4}$$

[129] Вместо непрерывных пропорций теперь рассматриваются обыкновенно геометрические прогрессии. Стоит только обозначить общую величину отношений через $q$, будем иметь:

$$B = Aq;\quad C = Bq^2;\quad D = Aq^3; \ldots N = Aq^n.$$

Если затем принять, что $n$ изменяется не скачками, а непрерывно, то $N$ будет показательною функцией от $n$. Эта функция будет попрежнему обладать тем же основным свойством, как и члены прогрессии, т. е. ее «разность» или приращение пропорционально самой функции. В дальнейшем Ньютон представляет показательную функцию в виде абсциссы или ординаты точки гиперболы, в зависимости от площади, ограниченной этой кривою и ее асимптотою.

зуют новую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен соответственной, сообразно числу пропущенных членов, степени знаменателя первоначальной прогрессии, следовательно и скорости, пропорциональные этим взятым членам, находятся в геометрической прогрессии. Если вышеуказанные малые равные промежутки, на которые подразделено время, уменьшить, число же их увеличить до бесконечности, так чтобы действие сопротивления сделать непрерывным, то скорости, в начале равных конечных промежутков времени находившиеся постоянно в непрерывной пропорции, останутся и в этом случае непрерывно пропорциональными.



Фиг. 135.

*Случай 2.* Составив разностную пропорцию, т. е. пропорцию последовательных утрат скорости, получим, что эти утраты пропорциональны полным скоростям, но пройденные в отдельные промежутки пространства пропорциональны потерям скорости (предл. I кн. II), а значит, и самой скорости.

*Следствие.* Поэтому, если описать равнобочную гиперболу $BG$, имеющую взаимно перпендикулярные асимптоты $AC$ и $CH$, и провести $AB$ и $DG$ перпендикулярно к асимптоте $AC$ (фиг. 135) и если начальную скорость тела, а также и сопротивление при начале движения, представить данною длиною $AC$, скорость же и сопротивление по прошествии какого-либо времени — переменною длиною $CD$, то время представится площадью $ABGD$, пройденное же в продолжение этого времени пространство — длиною $AD$. Ибо, если эта площадь при движении точки $D$ будет возрастать равномерно подобно времени, то длина $DC$ будет убывать в геометрической прогрессии подобно скорости; в том же отношении убывают и части прямой $AC$, описываемые в равные времена.[130]

---

130 Написав уравнение (1) примечания 128 в виде

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad (1)$$

и положив

$$\frac{k}{m} = n$$

получаем по интегрировании:

$$v = v_0 e^{-nt} \qquad (2)$$

и

$$x = \frac{v_0}{n}(1 - e^{-nt}). \qquad (3)$$

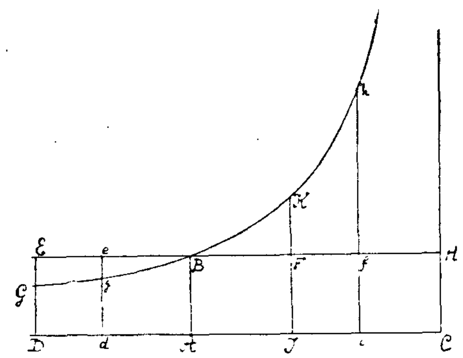
Взяв на чертеже (135) точку $A$ за начало координат, прямую $AC$ за ось $\xi$ и прямую $AB$ за ось $\eta$ и обозначая

$$AB = \lambda; \quad AC = a$$

### Предложение III. Задача I

*Определить движение тела, движущегося под действием постоянной силы тяжести прямолинейно вверх или вниз в однообразной среде, сопротивляющейся пропорционально скорости.*

Когда тело движется вверх, пусть сила тяжести представляется данным прямоугольником $BACH$, сопротивление среды при начале движения вверх — прямоугольником $BADE$, взятым по другую сторону прямой $AB$ (фиг. 136). Через точку $B$ проводится равнобочная гипербола, имеющая своими асимптотами взаимно перпендикулярные прямые $AC$ и $CH$, пересекающая перпендикуляры $DE$ и $de$ в $G$ и $g$. Тело при восходящем движении в течение времени $DGgd$ опишет пространство $EGge$, во время $DGBA$ — полную высоту подъема $EGB$; во время $ABKI$ опишет вниз пространство $BFK$, во время $KJki$ — вниз пространство $KFfk$. Пропорциональная сопротивлению среды скорость будет в соответствующие моменты: $ABED$,



Фиг. 136.

---

получим уравнение гиперболы $BG$:

$$\eta = \frac{a\lambda}{a - \xi}.$$

Площадь $ABGD$ этой гиперболы будет

$$S = a\lambda \log \frac{a}{a - \xi}.$$

Откуда

$$\xi = a\left(1 - e^{-\frac{S}{a\lambda}}\right). \tag{4}$$

Сличая формулу (4) с формулою (3), видно, что стоит только брать

$$\frac{S}{a\lambda} = nt \quad \text{и} \quad a = \frac{v_0}{n}$$

то будет

$$x = \xi = AD.$$

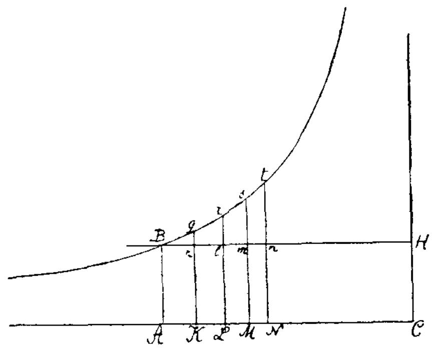
На основании же формулы (2) будет

$$\xi - a = -\frac{v}{n} = DC$$

т. е. если брать площадь $S$ пропорционально времени, то длина $DC$ будет пропорциональна величине скорости и длина $AD$ — пройденному пространству.

*ABed*, нуль, *ABFI*, *ABfi*; наконец, наибольшая скорость, которую тело при своем падении может достичь, будет *BACH*.

Если прямоугольник *BACH* подразделить на бесчисленное множество прямоугольников *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* и т. д. (фиг. 137), которые были бы пропорциональны приращениям скорости в соответствующие равные промежутки времени, то площади: 0, *Ak*, *Al*, *Am*, *An* и т. д. — будут пропорциональны полным скоростям, а значит, по предположению, и сопротивлению среды в начале сказанных равных промежутков времени; поэтому отношение *AC* к *AK* или *ABHC* к *ABkK* будет равно отношению силы тяжести к сопротивлению при начале второго промежутка времени; по отнятии сопротивления от силы тяжести будут оставаться площади *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC* и т. д., пропорциональные тем силам, которые действуют на тело в начале последующих промежутков времени, следовательно (по II закону) эти площади пропорциональны приращениям скорости, т. е. прямоугольникам *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* и т. д.; поэтому (лем. I кн. II) они образуют геометрическую прогрессию. Вследствие этого, если прямые *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn* и т. д. по продолжении пересекают гиперболу в $q$, $r$, $s$, $t$,…, то площади *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN* и т. д. будут между собою равны и, значит, пропорциональны как равным промежуткам времени, так и постоянной силе тяжести. Но площадь *ABqK* (след. 3 лем. VII и лем. VIII кн. I) относится к площади *Bkq*, как $Kq$ к $\frac{1}{2}\,kq$, т. е. как $AC$ к $\frac{1}{2}\,AK$, т. е. как сила тяжести к сопротивлению посредине первого промежутка времени; на основании такого же рассуждения видно, что площади *qKLr*, *rLMs*, *sMNt* и т. д. относятся к площадям *qklr*, *rlms*, *smnt* и т. д., как сила тяжести к сопротивлению посредине второго, третьего, четвертого и т. д. промежутка времени. А так как равные площади *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt* и т. д. пропорциональны силе тяжести, то площади *Bqk*, *qklr*, *rlms*, *smnt* и т. д. будут пропорциональны сопротивлениям в моменты посредине последовательных промежутков времени, т. е. (по предположению) пропорциональны скорости, а значит, и пройденным пространствам. Суммы этих пропорциональных величин будут также между собою пропорциональны,



Фиг. 137.

т. е. площади *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt* и т. д. — полному пройденному пространству, площади же *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN* — времени. Следовательно, тело при падении в продолжение какого-либо времени *ABrL* пройдет пространство *Blr* и в продолжение времени *LrtN* — пространство *rlnt*. Подобным же образом доказывается и восходящее движение.

*Следствие 1.* Следовательно, наибольшая скорость, которую может достигнуть тело при падении, так относится к скорости, достигнутой к концу какого-либо заданного промежутка времени, как постоянная сила тяжести, действующая на тело, относится к силе сопротивления, действующей в конце этого промежутка времени.

*Следствие 2.* Когда время возрастает в арифметической прогрессии, то сумма упомянутых в следствии 2 скоростей при движении вверх и разность их при движении вниз убывают в прогрессии геометрической.

*Следствие 3.* Пространства, описываемые в равные промежутки времени, убывают в той же геометрической прогрессии.

*Следствие 4.* Пространство, описанное телом, есть разность двух пространств, из коих одно пропорционально времени, протекшему от начала падения, второе же пропорционально скорости, так что при начале падения они между собою равны.[131]

---

[131] Приняв точку $D$ (фиг. 136) за начало координат, прямую $DC$ за ось $\xi$, прямую $DE$ за ось $\eta$ и полагая

$$DA = b;\quad AC = a;\quad DC = a + b = c;\quad AB = \lambda$$

получим уравнение гиперболы $GgB$:

$$\eta = \frac{a\lambda}{c - \xi}.$$

Площадь ее $DGgd$ будет

$$S = a\gamma \log \frac{c}{c - \xi},$$

откуда

$$c - \xi = ce^{-\frac{S}{a\lambda}} \tag{1}$$

С другой стороны, направляя ось $z$ вертикально вверх и обозначая через $g$ — ускорение силы тяжести, для движения тяжелого тела вверх имеем уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = -(mg + kv) \tag{2}$$

и начальное условие: при $t = 0$ должно быть $v = v_0$, $z = 0$; тогда, полагая

$$\frac{k}{m} = n$$

имеем

$$mg + kv = (mg + kv_0)\,e^{-nt} \tag{3}$$

**Предложение IV. Задача II**

*Предполагая, что сила тяжести в какой-либо среде постоянна и направлена перпендикулярно к горизонтальной плоскости, определить движение брошенного в этой среде тела, принимая сопротивление ее пропропорциональным скорости.*

Пусть из места $D$ (фиг. 138) брошено тело по направлению прямой $DP$, причем длина $DP$ представляет и начальную его скорость. Из точки $P$ на горизонтальную прямую $DC$ опускается перпендикуляр $PC$, и $DC$ рассекается точкою $A$ так, чтобы $DA$ относилось к $AC$, как сопротивление, происходящее при начале от движения по высоте, к силе тяжести, иначе, что то же самое, чтобы отношение $DA \cdot DP$ к $AC \cdot CP$ было равно отношению полного сопротивления при начале движения к силе тяжести. На асимптотах $DC$ и $CP$ описывается какая-либо гипербола $GTBS$, пересекающая перпендикуляры $DG$, $AB$ в $G$ и $B$, и дополняется

---

и затем, заменив $v$ его величиной $\frac{dz}{dt}$ и интегрируя еще раз, получим

$$C_1 + mg \cdot t + kz = -\frac{mg + kv_0}{n} e^{-nt}$$

или, на основании уравнения (2),

$$C_1 + mg \cdot t + kz = \frac{mg + kv}{n}.$$

Делая в этом уравнении

$$t = 0; \quad v = v_0 \quad \text{и} \quad z = 0$$

имеем

$$C_1 = \frac{mg + kv_0}{n}$$

и предыдущее уравнение напишется так:

$$kz = m(v_0 - v) - mg \cdot t$$

или

$$z = \frac{m}{k}(v_0 - v) - \frac{m}{k} g \cdot t \tag{4}$$

Уравнение же (3) можно написать так:

$$v_0 - v = \frac{mg + kv_0}{k}(1 - e^{-nt}). \tag{3'}$$

Сопоставляя уравнение (3') с уравнением (1), написавным так:

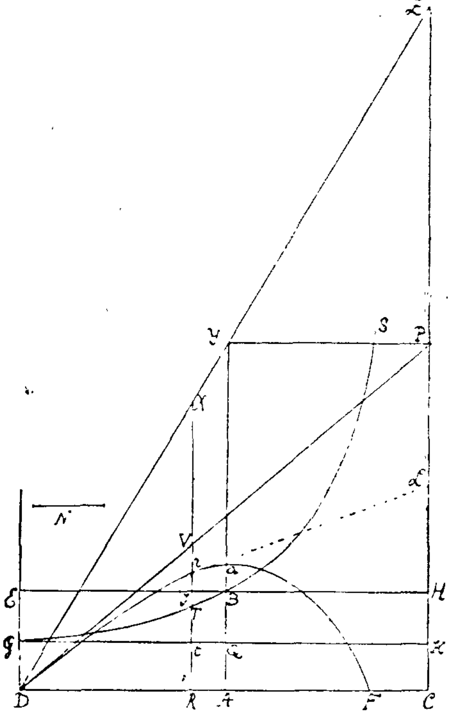
$$\xi = c\left(1 - e^{-\frac{S}{a\lambda}}\right) \tag{1'}$$

видим, что приняв длину $DA$ пропорциональной $kv_0$, $AC$—пропорциональной $mg$, или, что то же, считая площадь $EDAB$ пропорциональной $kv_0$ и площадь $ABHC$ пропорциональной $mg$, видим, что $S = DGdg$ можно принять пропорциональной времени $t$, длина $DA$ представит скорость $v$, и площадь $EGeg$, на основании формулы (4), представит пройденное пространство. Из этих формул вытекают и все высказанные следствия.

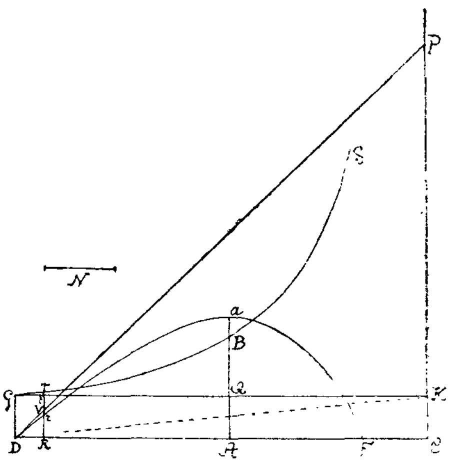
параллелограмм $DGKC$, коего сторона $GK$ пересекает $AB$ в $Q$. Длина $N$ берется так, чтобы было

$$N : QB = DC : CP.$$

По перпендикуляру $RT$, восставленному из какой-либо точки $R$ прямой $DC$ и пересекающему гиперболу в $T$ и прямые $EH$, $GK$, $DP$ в $J$, $t$ и $V$, берется длина $Vr = \frac{tGT}{N}$, или, что то же самое, длина $Rr = \frac{GTJE}{N}$; тогда брошенное тело в конце времени $DRTG$ придет в точку $r$, описав кривую линию $DraF$, на которой эта точка постоянно лежит, причем наибольшей высоты оно достигает в $a$ на перпендикуляре $AB$, после чего



Фиг. 138a.



Фиг. 138b.

оно асимптотически приближается к $PC$. Вместе с тем скорость его в любой точке $r$ пропорциональна[132] касательной $rL$.

---

132 Решение этой задачи основано на двух предыдущих, причем движение точки разлагается на движение по горизонтальной оси (по дальности) и по вертикальной (по высоте). На основании теоремы I, обозначая через $v_1$ — проекцию начальной скорости на ось $x$ и через $v_x$ — проекцию скорости в какой-либо момент на ту же ось, имеем (прим. 128)

$$mv_x + kx = mv_1$$

или

$$x + \frac{m}{k} v_x = \frac{m}{k} v_1 \tag{1}$$

Действительио,

$$N : QB = DC : CP = DR : RV$$

следовательно,

$$RV = \frac{DR \cdot QB}{N}$$

и

$$Rr = RV - Vr = \frac{DR \cdot QB - tGT}{N} = \frac{DR \cdot AB - RDGT}{N}.$$

Пусть время представляется площадью $RDGT$, движение же тела разлагается (по след. II законов) на два — вертикальное и горизонтальное· так как сопротивление пропорционально скорости, то и оно разлагается на две составляющих, соответственно пропорциональных и противоположных по направлению скоростям этих двух составляющих движений; таким образом путь, пройденный телом горизонтально (по предл. II кн. II), пропорционален длине $DR$, высота же (по предл. III) пропорциональна площади

$$DR \cdot AB - RDGT$$

т. е. длине $Rr$.

При самом начале движения площадь $RDGT$ равна $DR \cdot AQ$, поэтому длина

$$Rr = \frac{DR \cdot AB - DR \cdot AQ}{N} = \frac{DR}{N} \cdot (AB - AQ) = \frac{DR}{N} \cdot QB$$

---

и, в силу уравнения (3) прим. 128, для наибольшей дальности,

$$X = \frac{m}{k} v_1.$$

За величину X Ньютон берет (фиг. 138) длину $DC$, а так как эта же величина представляет и горизонтальную проекцию начальной скорости, то, значит, длины

$$DP = \frac{m}{k} v_0; \quad CP = \frac{m}{k} v_2$$

где через $v_0$ обозначена начальная скорость и через $v_2$ — ее вертикальная проекция

Уравнение (1) показывает, что длина

$$RC = \frac{m}{k} v_x$$

т. е. представляет $v_x$; значит, отрезок касательной $rL$ представляет скорость $v$, когда точка находится в $r$.

В выражения самих координат движущейся точки входят показательные функции времени, которые Ньютон представляет, как уже указано, зависимостью между координатами точек гиперболы и площадью, заключенной между гиперболою и ее асимптотою.

За эту вспомогательную гиперболу Ньютон берет здесь такую, у которой одною асимптотою служит ось $x$-ов, другою — прямая $PC$, т. е. асимптота траектории движущейся точки, и время представляется площадью $RDGT$ этой гиперболы, которая, при рассмотрении движения по высоте, и играет ту же роль, как гипербола $GgBKk$ на фиг. 136 при решении задачи 1.

т. е.

$$Rr : DR = QB : N = CP : DC,$$

т. е. как вертикальная составляющая начальной скорости к горизонтальной. Так как $Rr$ постоянно пропорционально пройденному пути по высоте и $DR$— пройденному пути по дальности, и при начале движения $Rr$ относится к $DR$, как путь, проходимый по высоте, к пути, проходимому по дальности, то, чтобы и во все время движения $Rr$ находилось к $DR$ в этом отношении, т. е. как высота к дальности, необходимо, чтобы тело двигалось по кривой $DraF$, на которой постоянно лежит точка $r$.

*Следствие 1.* Так как

$$Rr = \frac{DR \cdot AB}{N} - \frac{RDGT}{N},$$

то если продолжить $RT$ до $X$ так, чтобы было

$$RX = \frac{DR \cdot AB}{N}$$

т. е., дополнив параллелограмм $ACPY$, соединить $DY$, которая пересекает $CP$ в $Z$, и продолжить $RT$ до встречи с $DY$ в $X$, то будет

$$Xr = \frac{RDGT}{N},$$

т. е. эта длина пропорциональна времени.

*Следствие 2.* Поэтому, если брать бесчисленное множество абсцисс $CR$ или, что то же, $ZX$ в геометрической прогрессии, то все $Xr$ будут в прогрессии арифметической, и таким образом кривая $DraF$ легко строится при помощи таблицы логарифмов.[133]

---

[133] Координаты $x$ и $z$ точки $r$ траектории при избранных осях ($DC$ за ось $x$-ов и $DH$ за ось $z$-ов) выражаются формулами:

$$DR = x = m\frac{v_1}{k}(1 - \epsilon^{-nt}) \tag{1}$$

$$Rr = z = \frac{m}{k} \cdot \frac{mg + kv_2}{k}(1 - \epsilon^{-nt}) - \frac{m}{k}gt. \tag{2}$$

Уравнение же вспомогательной гиперболы

$$\eta = \frac{b\lambda}{a - \xi}$$

где

$$a = DC; \quad b = AC; \quad \lambda = AB.$$

Площадь $S = RDGT$ этой гиперболы будет

$$S = b\lambda \log \frac{a}{a - \xi}$$

*Следствие 3.* Если при вершине $D$ и диаметре $DG$, продолженном вниз, построить такую параболу, коей параметр так относился бы к $2DP$, как полное сопротивление при начале движения относится к силе тяжести, то скорость, с которою тело должно быть брошено по направлению $DP$,

---

отсюда

$$\xi = a\left(1 - e^{-\frac{S}{b\lambda}}\right). \tag{3}$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (1), видим, что взяв

$$a = \frac{m}{k} v_1 \quad \text{и} \quad nt = \frac{S}{b\lambda}$$

иначе

$$t = \frac{1}{n} \cdot \frac{S}{b\lambda} = \frac{m}{k} \cdot \frac{S}{b\lambda}$$

будет

$$x = \xi$$

По уравнению вспомогательной гиперболы:

$$DG = \frac{b\lambda}{a}$$

значит

$$QB = \frac{a-b}{a} \cdot \lambda$$

и

$$N = \frac{QB \cdot DC}{CP} = \frac{a-b}{a} \cdot \lambda \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Но, по условию построения чертежа.

$$(a - b : b = kv_2 : mg$$

следовательно

$$a - b) : a = kv_2 : (mg + kv_2)$$

и

$$N = \frac{kv_1}{mg + kv_2} \cdot \lambda$$

и формула

$$Rr = \frac{DR \cdot AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$$

на основании равенств

$$\frac{DR \cdot AB}{N} = \frac{x}{v_1} \cdot \frac{kv_2 + mg}{k}$$

$$\frac{RDGT}{N} = \frac{S}{N} = \frac{kb\lambda}{m} \cdot \frac{a}{b-a} \cdot \frac{v_2}{\lambda v_1} \cdot t = \frac{a}{v_1} gt = \frac{mg}{k} \cdot t$$

принимает вид

$$z = \frac{kv_2 + mg}{k} \cdot \frac{x}{v_1} - \frac{mg}{k} t \tag{4}$$

что равносильно формуле (2).

Для вычисления по формуле (1) и (2) и равносильным им (3) и (4) необходимо знать величину

$$n = \frac{k}{m} = \frac{g}{v_0} \cdot \frac{kv_0}{mg}$$

чтобы в однородно сопротивляющейся среде описывать кривую $DraF$, есть та самая, с которою оно должно бы быть брошено, чтобы описывать сказанную параболу.

Ибо при самом начале движения параметр этой параболы, соответствующий начальной точке $D$, равен $\frac{DV^2}{Vr}$, при этом

$$Vr = \frac{tGT}{N} = \frac{DR \cdot Tt}{2N}.$$

Но если провести к гиперболе $GTS$ касательную в точке $G$, то она будет параллельна прямой $DK$, следовательно будет

$$tT = \frac{CK \cdot DR}{DC},$$

но было

$$N = \frac{QB \cdot DC}{CP},$$

поэтому

$$Vr = \frac{DR^2 \cdot CK \cdot CP}{2DC^2 \cdot QB}$$

а так как

$$DR : DC = DV : DP,$$

то будет

$$Vr = \frac{DR^2 \cdot CK \cdot CP}{2DP^2 \cdot QB},$$

и следовательно, параметр будет

$$\frac{DV^2}{Vr} = \frac{2DP^2 \cdot QB}{CK \cdot CP} = \frac{2DP^2 \cdot DA}{AC \cdot CP},$$

ибо

$$QB : CK = DA : AC.$$

---

но $kv_0$ есть сила сопротивления при начале движения, $mg$ — вес тела, отношение же $\frac{v_0}{g}$ Ньютон выражает в следствии 3 этого предложения через параметр параболы, описываемой телом при движении в пустоте.

Представление показательной функции в виде координат точки гиперболы в зависимости от площади, заключенной между этой кривою, ее асимптотою, постоянной ординатой и переменной, встречается в дальнейшем много раз, и на нем мы более останавливаться не будем, отсылая к этому примечанию. Обратив внимание на заключительные слова следствия 2: «таким образом кривая $DraF$ легко строится при помощи таблицы логарифмов», нетрудно прийти к выводу, что геометрическое представление служило Ньютону лишь средством рассуждения, для практических же применений полученный окончательный результат представлялся аналитически или же выражался числами.

Отсюда следует, что параметр так относится к $2DP$, как $DP \cdot DA$ к $CP \cdot AC$, т. е. как сопротивление к силе тяжести.[134]

*Следствие 4.* Следовательно, если тело брошено по направлению какой-либо данной по положению прямой $DP$ с заданною скоростью и сопротивление среды при начале движения известно, то может быть найдена и описываемая телом кривая $DraF$. Ибо по заданной скорости находится, как известно, параметр параболы; если затем взять $2DP$ в таком отношешении к этому параметру, как сила тяжести к силе сопротивления, то найдется $DP$; после того, если рассечь прямую $DC$ в точке $A$ так, чтобы отношение $CP \cdot AC$ к $DP \cdot AD$ было равно упомянутому отношению силы тяжести к сопротивлению, то положение точки $A$ будет известно, и значит, кривая $DraF$ определится.

*Следствие 5.* Наоборот, когда известна кривая $DraF$, то может быть определено и сопротивление среды и скорость тела в отдельных точках $r$. Ибо по известному отношению $\frac{CP \cdot AC}{DP \cdot AD}$ найдется как сопротивление среды при начале, так и параметр параболы, а следовательно, и начальная скорость. Затем по известной длине касательной $rL$ найдется и пропорциональная ей скорость в точке $r$ и пропорциональное этой скорости сопротивление.

*Следствие 6.* Так как длина $2DP$ относится к параметру параболы, как сила тяжести к сопротивлению в точке $D$, и при увеличении скорости сопротивление возрастает в таком же отношении, как и скорость,

---

[134] Принимая на время касательную $DP$ в начальной точке за ось $x$ и проходящую через точку $D$ отвесную линию за ось $y$ и обозначая попрежнему начальную скорость через $v_0$, получим уравнения движения тяжелого тела в пустоте:

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

следовательно уравнение описываемой им параболы есть

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot y$$

так что параметр $q$ этой параболы, относящийся к вершине $D$, есть

$$q = \frac{2v_0^2}{g}.$$

Но на фиг. 138, как указано в примечании 132,

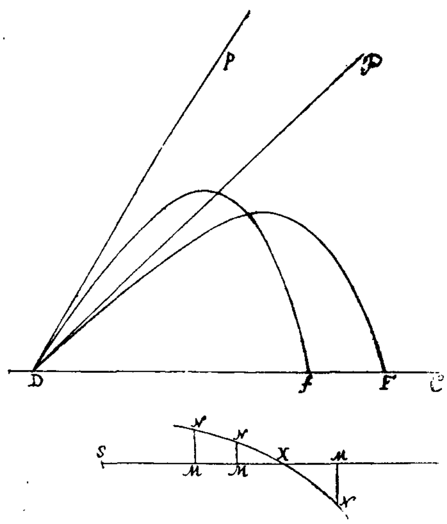
$$DP = \frac{m}{k} \cdot v_0 = \frac{mg}{kv_0} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

значит

$$\frac{2DP}{q} = \frac{mg}{kv_0} = \frac{\text{вес тела}}{\text{сопротивление при начале}}$$

параметр же — как квадрат скорости, то длина $2DP$ будет возрастать пропорционально скорости и, значит, не зависит от угла $CDP$ и не изменяется при изменениях его, а лишь при изменении скорости.

*Следствие 7.* Отсюда вытекает способ приближенного определения кривой $DraF$ из опыта, а следовательно, нахождение сопротивления и скорости, с которою тело брошено. Следует бросить два равных и подобных тела из точки $D$ (фиг. 139) под разными углами $CDP$ и $CDp$ и заметить места $F$ и $f$ их падения на горизонтальную плоскость $CD$; взяв затем какую-либо длину за $DP$ или $Dp$, надо принять, что сопротивление в $D$ находится в каком-либо отношении к силе тяжести; пусть длина $SM$ представляет это отношение. После этого по принятой величине $DP$ вычислением находятся длины $DF$ и $Df$, и из найденного по вычислению отношения $\frac{Ff}{DF}$ вычитается то же отношение, найденное по опыту, и разность их представляется ординатою $MN$.




Фиг. 139.

То же самое делается вторично и в третий раз, принимая постоянно новые значения за величину отношения тяжести к сопротивлению и выводя новые значения разности $MN$. Положительные разности откладываются при этом по одну сторону прямой $SM$, отрицательные — по другую, через точки $N$, $N$, $N$,... проводится правильная кривая $NNN$, пересекающая прямую $SMMM$ в $X$; тогда $SX$ и представит величину отношения сопротивления к тяжести, которое и требовалось определить. По этому отношению выводится при помощи вычисления длина $DF$. Длина, так относящаяся к принятой $DP$, как длина $DF$, найденная из опыта, к длине $DF$, определенной по расчету, и будет истинной величиною $DP$. После того как эта величина найдена, получится как кривая $DraF$, описываемая телом, так и его скорость и сопротивление в отдельных ее точках.[135]

[135] В этом следствии Ньютон описывает прием графического решения сложного уравнения, которое он не находит нужным даже и составлять; к такому графическому приему он прибегает и в других местах своих «Начал». Сопоставляя сказанное здесь с поучением

*ПОУЧЕНИЕ*

Впрочем, предположение, что сопротивление пропорционально скорости, более математическое, нежели соответствующее природе. В срединах, совершенно лишенных твердости, сопротивления телам пропорциональны квадратам скорости, ибо действием более быстро движущегося тела тому же количеству среды во время, но столько раз меньшее, во сколько скорость больше, сообщается во столько же раз большее количество движения; следовательно, в равные времена, вследствие большего количества возмущаемой среды, сообщится количество движения, пропорциональное квадрату скорости, сопротивление же (по II и III законам движения) пропорционально сообщаемому количеству движения. Поэтому рассмотрим, какие происходят движения при таком законе сопротивления.

## ОТДЕЛ II

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ

### Предложение V. Теорема III

*Если тело, испытывая сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, движется по инерции в однородной среде и взяты возрастающие в геометрической прогрессии промежутки времени, то скорости в начале каждого промежутка составят такую же, но убывающую прогрессию, пройденные же в продолжение каждого промежутка пространства будут между собою равны.*

Так как сопротивление пропорционально квадрату скорости, уменьшение же скорости пропорционально сопротивлению, то при подразделении времени на бесчисленное множество равных промежутков, квадраты скорости в начале каждого из этих промежутков будут пропорциональны разностям самих скоростей. Пусть сказанные весьма малые промежутки времени представляются отрезками $AK$, $KL$, $LM$ и т. д. (фиг. 140), откладываемыми на прямой $CD$, и пусть проведены ординаты $AB$, $Kk$, $Ll$,

---

в конце отдела VI книги I, а также с предложением XLII книги III, нетрудно видеть, что получение корня с любою степенью точности выполнялось Ньютоном по тому способу, который и теперь носит его имя. Заметим также, что Ньютон считает очевидным, что если частные значения непрерывной функции при двух частных значениях переменной независимой имеют разные знаки, то эта функция при некотором промежуточном частном значении переменной обращается в нуль.

$Mm, \ldots$ точек $B, k, l, m, \ldots$ гиперболы $BklmG$, имеющей своими асимптотами $CH$ и $CD$ и центром точку $C$, тогда будет

$$AB : Kk = CK : CA,$$

значит

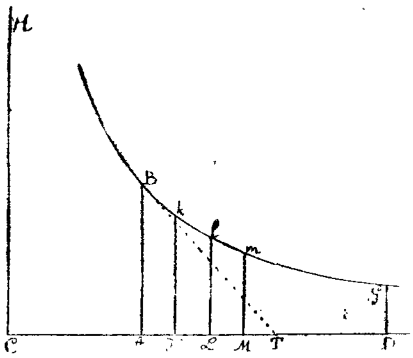
$$(AB - Kk) : Kk = AK : CA$$

следовательно

$$(AB - Kk) : AK = Kk : CA = AB \cdot Kk : AB \cdot CA.$$

Но так как $AK$ задано и произведение $AB \cdot CA$ постоянное, то $AB - Kk$ пропорционально произведению $AB \cdot Kk$, т. е. в пределе, когда точки $B$ и $K$ совпадают, пропорционально $AB^2$.

На основании подобного же рассуждения, $Kk - Ll$, $Ll - Mm$ и т. д. будут пропорциональны $Kk^2$, $Ll^2$ и т. д. Таким образом разности длин $AB$, $Kk$, $Ll$, $Mm$ и т. д. пропорциональны квадратам этих длин, а так как и разности скоростей также пропорциональны квадратам самих скоростей, то для обеих величин прогрессия[136] одинакова, из чего следует, что и площади, описываемые сказанными длинами, находятся в прогрессии, подобной с пространствами, проходимыми вследствие упомянутых скоростей. Поэтому, если скорость в начале первого промежутка времени $AK$ представить длиною $AB$, скорость в начале второго $KL$ — длиною $Kk$ и пространство, пройденное в течение первого промежутка, — площадью $AKkB$, то все последующие скорости представятся последующими длинами $Ll$, $Mm, \ldots$ и пройденные пространства — площадями $Kl$, $Lm$ и т. д. Сложив, получим, что если полное протекшее время представляется суммою $AM$ частных его промежутков, то полное пройденное пространство представится полною площадью $AMmB$, составляющею сумму частных площадок. Вообрази теперь, что время $AM$ подразделено на промежутки $AK$, $KL$, $LM$ и т. д. так, что $CA$, $CK$, $CL$ $CM$ и т. д. образуют геометрическую прогрессию, тогда и эти промежутки составят такую же прогрессию, скорости $AB$, $Kk$, $Ll$, $Mm$ и т. д. составят



Фиг. 140.

136 Здесь под словом «прогрессия» Ньютон разумеет «закон изменяемости» вообще.

тогда такую же обратную прогрессию, пройденные же пространства *Ak*, *Kl*, *Lm* будут между собою равны.

*Следствие 1.* Отсюда следует, что если время представить отрезком $AD$ асимптоты и начальную скорость ординатою $AB$, то скорость в конце этого времени представится ординатою $DG$, пройденное же пространство — прилегающею к ним гиперболическою площадью $ABGD$; вместе с тем пространство, описываемое телом в то же время при движении с начальною скоростью $AB$ в среде несопротивляющейся, представляется прямоугольником $B \cdot AD$.

*Следствие 2.* Поэтому пространство, проходимое в сопротивляющейся среде, определяется взяв его к пространству, которое тело прошло бы с постоянною скоростью $AB$ в среде несопротивляющейся, в отношении[137] гиперболической площади $ABGD$ к прямоугольнику $AB \cdot AD$.

---

[137] Предполагая, что движение происходит по оси $x$ и обозначая через $m$ — массу движущегося тела, через $v = \frac{dx}{dt}$ — его скорость, через $k$ — коэффициент сопротивления и через $v_0$ — начальную скорость, имеем уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2 \tag{1}$$

откуда, полагая

$$\frac{k}{m} = n$$

следует

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = nt. \tag{2}$$

Принимая на фиг. 140 точку $A$ за начало координат, прямую $AD$ за ось $\xi$ и прямую $AB$ за ось $\eta$ и обозначая

$$AC = a; \quad AB = \lambda = \eta_0; \quad AD = \xi; \quad DG = \eta$$

получим уравнение гиперболы $BklmG$:

$$\eta = \frac{a\lambda}{a + \xi}$$

откуда

$$\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{a\lambda} \cdot \xi. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) показывают, что если брать

$$\frac{1}{a\lambda} \xi = nt$$

и

$$\eta_0 = v_0 = \lambda$$

то будет

$$\eta = v.$$

Из уравнения (2) следует

$$\frac{v_0 \, dt}{nv_0 t + 1} = dx$$

откуда имеем

$$\log (nv_0 t + 1) = nx. \tag{4}$$

*Следствие 3.* Сопротивление среды определяется полагая, что при начале движения оно равно такой постоянной центростремительной силе, которая могла бы сообщить падающему в среде без сопротивления телу в продолжение времени $AC$ скорость $AB$. Ибо, если провести касательную $BT$ к гиперболе в точке $B$, то отрезок $AT$ асимптоты будет равен $AC$ и представит время, в течение которого постоянное сопротивление, равное начальному, может уничтожить скорость $AB$.

*Следствие 4.* Таким образом может быть определено отношение силы сопротивления к силе тяжести или к какой-либо иной заданной центростремительной силе.

*Следствие 5.* Обратно, если известно отношение сопротивления к какой-либо заданной центростремительной силе, то определяется время $AC$, в продолжение которого эта центростремительная сила может произвести заданную скорость $AB$; следовательно будет известна точка $B$, через которую должна проходить гипербола, имеющая асимптоты $CH$ и $CD$, значит найдется и пространство $ABGD$, проходимое в среде с таким сопротивлением в продолжение времени $AD$ телом, начинающим свое движение со скоростью $AB$.

---

С другой стороны, площадь $S = ABGD$ выражается формулою

$$\frac{S}{a\lambda} = \log\left(\frac{\xi}{a} + 1\right). \tag{5}$$

Сопоставляя эту формулу с формулою (4), видим, что если брать

$$\xi = anv_0\, t = an\lambda t$$

то будет

$$x = \frac{S}{an\lambda}.$$

Обозначим через $A$ — площадь прямоугольника $AB \cdot AD$; так как

$$AB = \lambda = v_0 \quad \text{и} \quad AD = \xi = an\lambda t$$

то

$$A = v_0 \cdot an\lambda t;$$

с другой стороны, пространство $h$, проходимое в продолжение времени $t$ при равномерном движении со скоростью $v_0$, равно $v_0\, t$, значит

$$A = an\lambda h$$

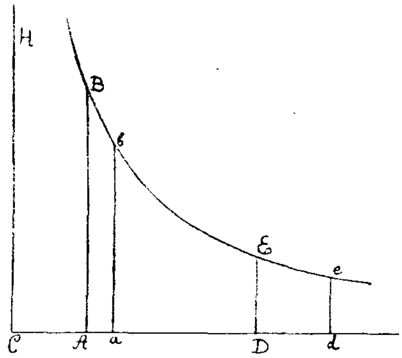
и следовательно,

$$x : h = S : A,$$

т. е. когда пространство $x$, проходимое в сопротивляющейся среде, изображается площадью $S$, то в среде несопротивляющейся, при той же начальной скорости в то же время, было бы пройдено пространство, изображаемое площадью $A$.

### Предложение VI. Теорема IV

*Равные и однородные шары, встречающие сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, и движущиеся лишь по инерции, описывают в продолжение промежутков времени, обратно пропорциональных их начальным скоростям, равные пространства и теряют равные доли от полных своих скоростей.*



Фиг. 141.

Пусть начальные скорости представляются ординатами $AB$, $DE$ (фиг. 141), времена — абсциссами $Aa$, $Dd$ точек $B$, $b$, $E$, $e$ какой-либо гиперболы[138] $BbEe$, имеющей взаимно перпендикулярные асимптоты $CD$, $CH$. Так как по предположению

$$Aa : Dd = DE : AB,$$

по свойству же гиперболы

$$DE : AB = CA : DC,$$

---

[138] Так как по условию теоремы оба шара равны и одинаковой массы и движутся в той же самой среде, то для них величина $n$ (см. прим. 136) одна и та же, следовательно, для представления их движения может служить та же самая гипербола.

Обозначим через $v_0$ и $V_0$ — начальные скорости шаров и через $v$ и $V$ — их скорости по прошествии времени $t$. На основании уравнения (2) примечания 137 будем иметь

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = nt \quad \text{и} \quad \frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = nt \qquad (1)$$

причем, так как шары равны между собою по размерам и по массе и движутся в той же самой среде, величина $n$ для обоих одна и та же.

Уравнения (1) можно написать так:

$$\frac{v_0 - v}{v} = nv_0 t \quad \text{и} \quad \frac{V_0 - V}{V} = nV_0 t \qquad (2)$$

поэтому, если взять промежутки времени $t_1$ и $t_2$ так, чтобы было

$$v_0 t_1 = V_0 t_2 \qquad (3)$$

т. е. обратно пропорциональные начальным скоростям, то будет

$$\frac{v_0 - v}{v} = \frac{V_0 - V}{V} \qquad (4)$$

т. е. утраты скорости в продолжение этих промежутков будут пропорциональны скоростям, остающимся к концу их.

Пройденные пространства $x$ и $X$, по уравнению примечания 137, выражаются формулами

$$x = \log(nv_0 t + 1) \quad \text{и} \quad X = \log(nV_0 t + 1) \qquad (5)$$

очевидно, что к концу промежутков времени $t_1$ и $t_2$, обратно пропорциональных $v_0$ и $V_0$, эти пространства между собою равны.

то будет

$$(CA + Aa):(CD + Dd) = Ca : Cd = CA : CD = DE : AB,$$

следовательно площади $ABba$ и $DEed$, т. е. пройденные пространства, равны между собою и начальные скорости $AB$ и $DE$ пропорциональны окончательным $ab$, $de$, а следовательно, и их потерянным частям $AB - ab$ и $DE - de$.

**Предложение VII. Теорема V**

*Шаровые тела, испытывающие сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, утрачивают в промежутки времени, прямо пропорциональные начальным количествам движения и обратно пропорциональные начальным величинам сопротивления, равные доли своих начальных количеств движения и описывают пространства, пропорциональные этим промежуткам времени и начальным скоростям.*

Утрачиваемые части количества движения пропорциональны сопротивлению и времени; чтобы эти части были пропорциональны своим целым, произведение сопротивления на время должно быть пропорционально количеству движения, значит время прямо пропорционально количеству движения и обратно пропорционально сопротивлению. Поэтому, если брать весьма малые последовательные промежутки времени, находящиеся в таком отношении, то тела будут утрачивать одинаковые доли своих полных количеств движения в продолжение каждого такого промежутка, следовательно будут обладать остающимися скоростями, составляющими одинаковые доли от начальных их скоростей; так как отношение скоростей после этого будет оставаться постоянным, то описываемые пространства будут пропорциональны начальным скоростям и времени.

*Следствие 1.* Если сопротивления, испытываемые телами при равных скоростях, пропорциональны квадратам диаметров, то шары одной и той же плотности, двигаясь с какими угодно скоростями при прохождении пространств, пропорциональных своим диаметрам, утрачивают одинаковые доли своего начального количества движения. Ибо количество движения какого-либо шара пропорционально его скорости и массе, т. е. скорости и кубу диаметра, по предположению же сопротивление пропорционально квадрату диаметра и скорости; на основании доказанной теоремы время пропорционально количеству движения и обратно пропорционально сопротивлению, т. е. оно прямо пропорционально диаметру и обратно пропорционально скорости, поэтому пространство, которое пропорционально скорости и времени, пропорционально диаметру.

*Следствие 2.* Если тела при равных скоростях испытывают сопротивления, находящиеся в полукубическом отношении диаметров, то шары одной и той же плотности при движении с какими угодно скоростями утрачивают одинаковые доли своего начального количества движения при прохождении пространств, находящихся в полукубическом же отношении диаметров.

*Следствие 3.* Вообще, если тела при равных скоростях испытывают сопротивления, пропорциональные какой-либо степени $n$ диаметров, то пространства, при прохождении которых шары одной и той же плотности, двигаясь с любыми скоростями, утрачивают одинаковые доли своих полных количеств движения, будут пропорциональны степени $3 - n$ диаметров. Пусть диаметры суть $D$ и $E$ и сопротивления, когда скорости равны, пропорциональны $D^n$ и $E^n$, — пространства, при прохождении коих шары, двигающиеся с какими угодно скоростями, утрачивают одинаковые доли своих полных количеств движения, пропорциональны $D^{3-n}$ и $E^{3-n}$; таким образом шары одной и той же плотности, пройдя пространства, относящиеся как $D^{3-n}$ и $E^{3-n}$, будут обладать скоростями, находящимися в таком же отношении, как и при начале движения.

*Следствие 4.* Если же шары не одной и той же плотности, то пространство, проходимое шаром более плотным, надо увеличить в отношении плотностей, ибо количества движения при одинаковых скоростях пропорциональны плотностям, поэтому время, по доказанной теореме, возрастет пропорционально количеству движения, пройденное же пространство — пропорционально времени.

*Следствие 5.* Когда шары движутся в различных средах, то пространство для среды более сопротивляющейся должно быть уменьшено пропорционально этому большему сопротивлению; по доказанной теореме время уменьшится в этом же отношении и пространство уменьшится пропорционально времени.

## Лемма II

*Момент произведения равен сумме моментов отдельных производителей, умноженных на показатели их степеней и коэффициенты.*

Я называю «произведением» вообще всякое количество, которое в арифметике происходит от умножения, деления и извлечения корней из отдельных его сомножителей, в геометрии же оно образуется нахождением объемов, площадей, сторон, крайних и средних пропорциональных, не делая сложения и вычитания. К такого рода количествам относятся: произведения,

12. Зак. 3350

частные, корни, прямоугольники, квадраты, кубы, стороны квадратов и кубов и т. п. Я рассматриваю здесь эти количества как неопределенные и изменяющиеся и как бы возрастающие и убывающие от постоянного движения или течения, и их мгновенные приращения или уменьшения разумею под словом *моменты*, так что приращения почитаются за положительные или прибавляемые моменты, уменьшения — за вычитаемые или за отрицательные. Но озаботься, чтобы не принимать за таковые конечных частиц. Конечные частицы не суть моменты, но сами суть количества, из моментов происходящие. Надо подразумевать, что это суть лишь едва-едва зарождающиеся начала конечных величин. Поэтому в этой лемме никогда и не рассматриваются величины моментов, но лишь их начальные отношения. То же самое получится, если вместо моментов брать или скорости увеличений, или уменьшений [которые поэтому можно называть движениями, изменениями или потоками (флюксиями) количеств], или же какие угодно конечные количества, этим скоростям пропорциональные. Коэффициент же при какой-либо переменной есть количество, получаемое от разделения произведения на эту переменную.

Таким образом смысл леммы тот, что если моменты каких-либо возрастающих или убывающих непрерывным течением количеств $A, B, C$ и т. д. суть $a, b, c$ и т. д., то момент произведенного прямоугольника $AB$ есть $aB + bA$, момент же произведенного объема $ABC$ есть $aBC + bAC + cAB$; моменты произведенных степеней, $A^2$, $A^3$, $A^4$, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{-1}$, $A^{-2}$, и $A^{-\frac{1}{2}}$, соответственно будут: $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$.

Вообще момент какой-либо степени $A^{\frac{n}{m}}$ будет $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Точно так же для произведения $A^2B$ момент будет $2aAB + bA^2$, для произведения $A^3B^4C^2$ момент равен $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$, и для произведения $\frac{A^3}{B^2}$ или $A^3B^{-2}$ момент есть $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$ и т. д.

Доказывается эта лемма следующим образом.

*Случай 1.* Пусть какой-либо возрастающий непрерывным движением прямоугольник $AB$, когда до сторон $A$ и $B$ не хватало по половине их моментов $\frac{1}{2}a$ и $\frac{1}{2}b$, был

$$\left(A - \frac{1}{2}a\right) \cdot \left(B - \frac{1}{2}b\right),$$

т. е.

$$AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab,$$

после же того как стороны увеличились на вторую половину своих моментов, прямоугольник стал

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right)\cdot$$

т. е.

$$AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab;$$

по вычитании из этого прямоугольника предыдущего получается избыток $aB + bA$. Следовательно, от приращений сторон $a$ и $b$ образуется приращение прямоугольника, равное $aB + bA$.

*Случай 2.* Если положить $AB = G$, то по доказанному в следствии 1 для объема $ABC$ или $GC$ момент будет равен $gC + Gc$; заменив $G$ и $g$ их величинами $AB$ и $aB + bA$, получим $aBC + bAC + cAB$, что относится до объема с какими угодно сторонами.

*Случай 3.* Если предположить, что стороны $A$, $B$, $C$ между собою равны, тогда момент $A^2$, т. е. прямоугольника $AB$, будет $aB + bA = 2aA$ и момент $A^3$, т. е. объема $ABC$, который был $aAC + bAC + cAB$, обратится в $3aA^2$. На основании такого же рассуждения момент какой угодно степени $A^n$ будет $naA^{n-1}$.

*Случай 4.* Так как $\frac{1}{A} \cdot A = 1$, то момент $\frac{1}{A}\cdot$ умноженный на $A$, плюс $\frac{1}{A}$, умноженное на $a$, будет равен моменту 1, т. е. нулю; поэтому момент $\frac{1}{A}$, или, что то же, момент $A^{-1}$, будет равен $-\frac{a}{A^2}\cdot$ Вообще, так как $\frac{1}{A^n} \cdot A^n = 1$, то момент $A^n$, умноженный на $A^n$, плюс $naA^{n-1}$, умноженное на $\frac{1}{A^n}$, равен нулю; поэтому момент $\frac{1}{A^n}$ или $A^{-n}$ будет $-\frac{na}{A^{n+1}}\cdot$

*Случай 5.* Так как $A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = A$, то момент $A^{\frac{1}{2}}$, умноженный на $2A^{\frac{1}{2}}$, будет равен $a$ (по доказанному в случае 3), следовательно момент самого $A^{\frac{1}{2}}$ будет $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Вообще, если положить $A^{\frac{m}{n}} = B$, то будет $A^m = B^n$, следовательно $maA^{m-1} = nbB^{n-1}$ или $maA^{-1} = nbB^{-1} = nbA^{-\frac{m}{n}}$ значит $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}} = b$, т. е. равно моменту $A^{\frac{m}{n}}$.

*Случай 6.* Следовательно, момент какого угодно произведения $A^m B^n$ равен моменту $A^m$, умноженному на $B^n$, плюс момент $B^n$, умноженный на $A^m$, т. е. $maA^{m-1} \cdot B^n + nbB^{n-1} \cdot A^m$, причем показатели степени $m$ и $n$ могут быть числами целыми или дробными, положительными или отрицательными.

*Следствие 1.* Таким образом для членов прогрессии, в которой задан какой-либо член, моменты прочих будут пропорциональны этим членам, умноженным на число промежутков между этим членом и заданным. Так, если $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ составляют прогрессию и задается член $C$, то моменты прочих пропорциональны $-2A$, $-B$, $D$, $2E$, $3F$.

*Следствие 2.* Если из четырех пропорциональных два средних даны, то моменты крайних будут пропорциональны этим крайним. Это относится также и до моментов сторон какого угодно прямоугольника, коего площадь задана.

*Следствие 3.* Если же задана сумма или разность двух квадратов, то моменты сторон обратно пропорциональны сторонам.

## *ПОУЧЕНИЕ*

В письме к *Д. И. Коллинсу*, от 10 декабря 1672 г., в котором я описывал методу (проведения) касательных, относительно которой я подозревал, что она та же самая, как и данная *Слузием*, тогда еще не опубликованная, я добавил: *Это составляет лишь частный случай или следствие гораздо более общего метода, который распространяется без всяких трудных выкладок не только на проведение касательных к каким угодно кривым, как геометрическим, так и механическим, или как бы то ни было связанным с другими прямыми или кривыми линиями, но и на решение других, более трудных, родов задач: о кривизне, площадях, длинах и центрах тяжести кривых и т. д., причем не приходится ограничиваться (как в методе Гуддена для наибольших и наименьших) случаем уравнений, не содержащих иррациональностей. Этот метод я сочетал с другим, относящимся к решению уравнений при помощи бесконечных рядов.* Этой выдержки из письма достаточно. Последние же слова относятся к сочинению, написанному об этих предметах в 1671 г. Основание же этого общего способа содержится в предыдущей лемме [139].

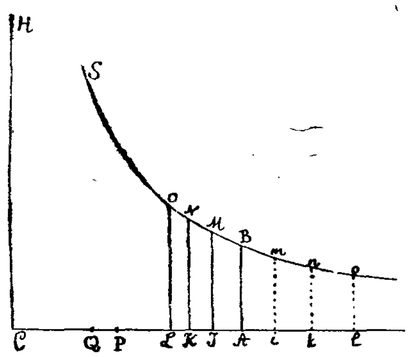
---

139 Это есть то знаменитое место «Начал», которое в 3-м издании заменяет следующее в первых двух: «В письмах, которыми около десяти лет тому назад я обменивался с весьма искусным математиком Г. Г. Лейбницем, я ему сообщал, что я обладаю методою для определения максимумов и минимумов, проведения касательных и решения тому подобных вопросов, одинаково приложимою как для членов рациональных, так и для иррациональных,

### Предложение VIII. Теорема VI

*Если тело в однородной сопротивляющейся среде под действием силы тяжести движется прямо вверх или вниз, полное же пройденное пространство разбито на равные части и требуется найти для начала каждой части (прилагая сопротивление к силе тяжести, когда тело движется вверх, и вычитая, когда оно движется вниз) величину полной силы, то я утверждаю, что величины этой силы составляют геометрическую прогрессию.*

Положим, что сила тяжести представляется заданною длиною $AC$ (фиг. 142), сопротивление — переменною длиною $AK$, действующая на тело сила — их разностью $KC$, скорость тела — длиною $AP$, среднею пропорциональною между $AK$ и $AC$ и, следовательно, пропорциональной корню квадратному из сопротивления, приращение сопротивления, происходящее в продолжении весьма малого заданного промежутка времени, — отрезочком $KL$ и одновременное с ним приращение скорости — отрезочком $PQ$. Пусть какая-либо гипербола $BNS$, имеющая своими взаимно перпендикулярными асимптотами прямые $CA$ и $CH$ и центром точку $C$, пересекает перпендикуляры $AB$, $KN$, $LO$ в точках $B$, $N$, $O$. Так как $AK$ пропорционально $AP^2$, то ее момент $KL$ будет пропорционален моменту $AP^2$, равному $2AP\cdot PQ$, а следовательно, и $AP\cdot KC$, ибо приращение скорости $PQ$ (по II закону) пропорционально действующей силе $KC$. Умножив $KL$ на $KN$, получим, что прямоугольник $KL\cdot KN$ пропорционален $AP\cdot KC\cdot KN$, а так как (по свойству гиперболы) произведение $KC\cdot KN$ постоянное, то $KL\cdot KN$ пропорционально $AP$. Но предельное отношение гиперболической площади $KNOL$ к прямоугольнику $KL\cdot KN$, когда точки $K$ и $L$ совпадают, равно




Фиг. 142.

---

причем я ее скрыл, переставив буквы следующего предложения: «data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa» (когда задано уравнение, содержащее любое число переменных количеств, найти флюксии и наоборот). Знаменитейший муж отвечал мне, что он также напал на такую методу, и сообщил мне свою методу, которая оказалась едва отличающейся от моей, и то только терминами и начертанием формул».

Перестановка букв, упомянутая Ньютоном, была следующая:

*6a, 2c, d, ae, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 9t, 12v, x.*

единице, следовательно эта гиперболическая площадь пропорциональна $AP$. Но так как полная гиперболическая площадь $ABOL$ слагается из таких частиц, как $KNOL$, постоянно пропорциональных скорости $AP$, то эта площадь пропорциональна пройденному пространству. Если эту площадь разделить на равные части $ABMJ$, $JMNK$, $KNOL$ и т. д., то действующие силы $AC$, $JC$, $KC$, $LC$ и т. д. будут составлять геометрическую прогрессию.

На основании подобного же рассуждения, если взять в противоположную сторону от точки $A$ равные площади $ABmi$, $imnk$, $knol$ и т. д., то окажется, что действующие силы $AC$, $iC$, $kC$, $lC$ и т. д. образуют непрерывную пропорц'ю; следовательно, если взять все части пройденного пространства как при восходящем, так и при нисходящем движении, между собою равными, то все силы $lC$, $kC$, $iC$, $AC$, $JC$, $KC$, $LC$ и т. д. составят геометрическую прогрессию.[140]

*Следствие 1.* Поэтому, если пройденное пространство представляется гиперболическою площадью $ABNK$, то сила тяжести, скорость тела и сопротивление среды могут быть соответственно представлены отрезками $AC$, $AP$ и $AK$, и обратно.

*Следствие 2.* Наибольшая скорость, которую только может достичь тело падая бесконечно долго, представляется длиною $AC$.

*Следствие 3.* Следовательно, если известна величина сопротивления среды при какой-либо заданной скорости, то эта наибольшая скорость най-

---

[140] Уравнение восходящего движения тела, взяв ось $z$ вертикально вверх, будет, при очевидных обозначениях,

$$\frac{m\,dv}{dt} = -(mg + kv^2) \tag{1}$$

Это уравнение можно написать так:

$$\frac{mv\,dv}{mg + kv^2} = -vdt = -dz \tag{2}$$

откуда следует

$$\frac{1}{2}\frac{m}{k}\cdot\log(mg + kv^2) + C_1 = -z.$$

Обозначая начальную скорость через $v_0$ и $\frac{k}{m}$ через $n$, получим

$$mg + kv^2 = (mg + kv_0^2)\,e^{-2nz}. \tag{3}$$

Но $mg + kv^2$ есть полная сила $F$, действующая на тело в рассматриваемый момент, $mg + kv_0^2 = F_0$ — та же сила при начале движения, следовательно

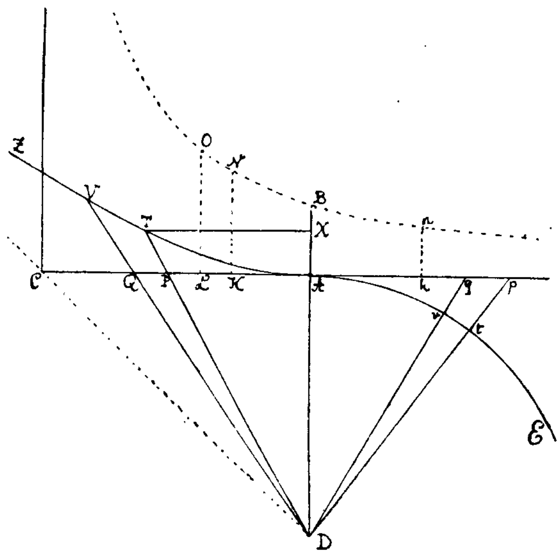
$$F = F_0\,e^{-2nz}. \tag{4}$$

Из геометрического представления этого уравнения, уже не раз объясненного, и получается все высказанное в теореме и ее следствиях.

дется взяв ее в таком отношении к вышеупомянутой заданной скорости, как корень квадратный из отношения силы тяжести к известной силе сопротивления.

### Предложение IX. Теорема VII

*Принимая уже доказанное, я утверждаю, что если при радиусе надлежащей величины брать тангенсы секторов круговых и секторов гиперболических пропорциональными скоростям, то время подъема до наибольшей высоты будет пропорционально сектору круговому, время же падения от наивысшей точки — гиперболическому.*



Фиг. 143.

Прямая $AD$ (фиг. 143) проводится перпендикулярно к $AC$, представляющей силу тяжести, и по ней откладывается длина $AD = AC$. Центром $D$ и полудиаметром $AD$ описывается как четверть круга $AtE$, так и равнобочная гипербола $AVZ$, имеющая ось $AX$, главную вершину $A$ и асимптоту $DC$. Если провести $Dp$ и $DP$, то всякий круговой сектор $AtD$ будет пропорционален времени подъема до наибольшей высоты, и гиперболический сектор $ATD$ будет пропорционален времени падения с наивысшей точки, предполагая, что тангенсы $Ap$ и $AP$ пропорциональны скоростям.

*Случай 1.* Пусть прямая $Dvq$ отсекает от сектора $ADt$ и треугольника $ADp$ моменты или весьма малые, совместно описываемые, площадки $tDv$ и $qDp$.

Так как эти площадки, имея общий угол, относятся, как квадраты сторон, то будет

$$tDv = qDp \cdot \frac{tD^2}{pD^2}$$

а так как $tD$ задано, то $tDv$ пропорционально $\frac{qDp}{pD^2}$, но

$$pD^2 = AD^2 + Ap^2 = AD^2 + AD \cdot Ak = AD \cdot Ck$$

и

$$qDp = \frac{1}{2} AD \cdot pq.$$

Следовательно, площадка $tDv$ пропорциональна $\frac{pq}{Ck}$, т. е. прямо пропорциональна весьма малому уменьшению скорости $pq$ и обратно пропорциональна силе $Ck$, которая производит это уменьшение скорости, следовательно пропорциональна весьма малому промежутку времени, соответствующему этому уменьшению скорости. При сложении окажется, что сумма всех площадок $tDv$, образующих сектор $ADt$, пропорциональна сумме всех промежутков времени, соответствующих утрачиваемым частицам $pq$ скорости, пока эта скорость не исчезнет, т. е. весь сектор $ADt$ пропорционален полному времени движения тела вверх до наивысшей точки.[141]

---

[141] Уравнение (1) примечания 140, будучи написано в виде

$$\frac{m\,dv}{mg + kv^2} = -dt \tag{1}$$

дает при теперешних обозначениях:

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) + C_1 = -t. \tag{2}$$

Обозначая через $T$ — время в момент достижения телом наибольшей высоты, т. е. когда $v = 0$, имеем

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = T - t \tag{3}$$

Совершенно так же при движении вниз будет

$$\frac{m\,dv}{mg - kv^2} = -dt$$

откуда следует

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{ArgTghyp}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = t \tag{4}$$

если время $t$ в этом уравнении считать с того момента, когда $v = 0$.

Уравнениями (3) и (4) и выражается высказанное предложение.

*Случай 2.* Если прямую $DQV$ провести так, чтобы ею отсекались от сектора $DAV$ и треугольника $DAQ$ весьма малые площадки $TDV$ и $PDQ$, то отношение этих площадок будет равно $DT^2:DP^2$, или, что то же, $DX^2:DA^2$; проведя $TX$ параллельно $AP$, имеем

$$DX^2:DA^2=TX^2:AP^2=(DX^2-TX^2):(DA^2-AP^2).$$

Но по свойству гиперболы:

$$DX^2-TX^2=AD^2$$

по предположению же:

$$AP^2=AD\cdot AK$$

следовательно будет

$$TDV:PDQ=AD^2:(AD^2-AD\cdot AK)=AD:(AD-AK)=AC:CK.$$

Итак,

$$TDV=PDQ\cdot\frac{AC}{CK}.$$

Но так как $AC$ и $AD$ заданы, то $TDV$ пропорционально $\frac{PQ}{CK}$, т. е. прямо пропорционально приращению скорости $PQ$ и обратно пропорционально действующей силе $CK$, т. е. пропорционально весьма малому промежутку времени, соответствующему изменению скорости. По сложении окажется, что сумма всех промежутков времени, в продолжение которых скорость $AP$ образуется из своих частиц $PQ$, пропорциональна сумме всех площадок, составляющих сектор $ATD$, т. е. полное время пропорционально площади всего сектора.

*Следствие 1.* Поэтому, если взять $AB=\frac{1}{4}AC$, то пространство, описываемое телом при падении в продолжение какого-либо времени, относится к пространству, которое тело прошло бы в то же время, двигаясь равномерно с наибольшею скоростью $AC$, как площадь $ABNK$, представляющая путь, пройденный при падении, к площади $ATD$, представляющей время.

Действительно, так как

$$AC:AP=AP:AK$$

то по следствию 1 леммы II этой книги будет

$$LK:PQ=2AK:AP=2AP:AC,$$

и значит,

$$LK : \frac{1}{2} PQ = AP : \frac{1}{4} AC = AP : AB.$$

Но вместе с тем

$$KN : AD = AB : CK$$

следовательно будет

$$LKNO : DPQ = AP : CK.$$

Но, как было показано,

$$DPQ : DTV = CK : AC.$$

Значит, будет

$$LKNO : DTV = AP : AC$$

т. е. это отношение равно отношению скорости тела к наибольшей скорости, которую оно может приобрести при падении. А так как моменты $LKNO$ и $DTV$ площадей $ABNK$ и $ATD$ пропорциональны скоростям, то образующиеся приращения этих площадей пропорциональны проходимым одновременно частицам пути, следовательно полные площади $ABNK$ и $ATD$, образовавшиеся от начала падения, пропорциональны полным пространствам, пройденным за это время.

*Следствие 2.* На основании этого находится также пространство, пройденное при движении вверх, а именно, оно так относится к пространству, которое тело могло бы пройти при равномерном движении со скоростью $AC$ в течение того же времени, как площадь $ABnk$ к площади сектора $ADt$.

*Следствие 3.* Скорость тела в конце промежутка времени, при падении в сопротивляющейся среде $ATD$, относится к скорости, которую тело приобрело бы в продолжение того же времени при падении в среде без сопротивления, как площадь треугольника $APD$ к площади гиперболического сектора $ATD$, ибо в среде не сопротивляющейся скорость возрастает, как время $ATD$, в среде же сопротивляющейся — как длина $AP$, т. е. как площадь треугольника $APD$; при начале же движения вниз эти скорости были равны, так же как и сказанные площади $ATD$ и $APD$.

*Следствие 4.* На основании такого же рассуждения, скорость в любой момент при движении вверх так относится к скорости, которую тело утратило бы в продолжение того же времени в среде не сопротивляющейся, как площадь треугольника $ApD$ к площади кругового сектора $AtD$, иначе — как прямая $Ap$ к длине дуги $At$.

*Следствие 5.* Время, в продолжение которого тело, падая в сопротивляющейся среде, приобретает скорость $AP$, относится ко времени, в продолжение которого тело, падая в среде не сопротивляющейся, приобрело бы скорость, равную наибольшей $AC$, как площадь сектора $ADT$ к треугольнику $ADC$; время же, в продолжение которого тело, двигаясь вверх. могло бы утратить скорость $Ap$, относится ко времени, в течение которого та же скорость утратилась бы при движении вверх в среде не сопротивляющейся, как дуга $At$ к своему тангенсу $Ap$.

*Следствие 6.* По заданному времени движения вверх или вниз найдется и пройденное пространство, ибо для тела, падающего вниз бесконечно, наибольшая скорость находится по следствиям 2 и 3 теоремы VI книги II, следовательно найдется и время, в продолжение которого тело могло бы приобрести эту скорость, падая в среде не сопротивляющейся. Тогда, взяв сектор $ADT$ или $ADt$ в том же отношении к треугольнику $ADC$, как заданный промежуток к вышенайденному, найдем скорости $AP$ и $Ap$, а также и площади $ABNK$ и $ABnk$, относящиеся к площадям секторов $ADT$ или $ADt$, как искомое пройденное пространство к тому, которое тело могло бы описать в течение заданного времени, двигаясь равномерно с вышенайденною наибольшею скоростью.

*Следствие 7.* Обратно, по заданному пройденному при движении вверх или вниз пространству $ABnk$ или $ABNK$ найдется время $ADt$ или $ADT$.

### Предложение X. Задача III

***Предполагая, что постоянная сила тяжести направлена перпендикулярно к горизонтальной плоскости и что сопротивление пропорционально плотности среды и квадрату скорости, требуется найти такую плотность среды в любом месте, при которой тело двигалось бы по заданной как бы то ни было кривой, а также скорость тела и сопротивление среды на него.***

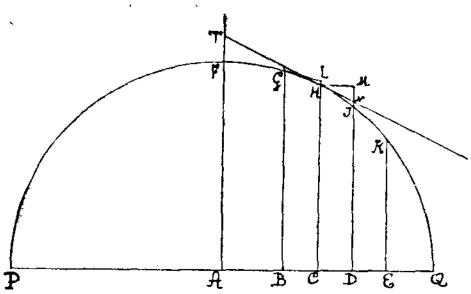
Пусть $PQ$ (фиг. 144) есть сказанная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа; $PFHQ$ — заданная кривая, пересекающая в точках $P$ и $Q$ плоскость $PQ$; $G$, $H$, $J$, $K$ — четыре последовательных места на этой кривой, считая по направлению от $F$ к $Q$; $GB$, $HC$, $JD$, $KE$ — четыре ординаты, проведенные от этих точек до плоскости $PQ$, пересекающие ее в точках $B$, $C$, $D$, $E$, причем расстояния $BC$, $CD$, $DE$ между ординатами равны. Из точек $G$ и $H$ проводятся прямые $GL$ и $HN$, касающиеся к кривой в точках $G$ и $H$ и пересекающие продолженные вверх ординаты в $L$ и $N$, и дополняется параллеллограмм $HCDM$. Промежутки времени, в продолжение которых тело описывает дуги $GH$ и $HJ$, пропорциональны корням квадратным из высот $LN$ и $NJ$, на которые тело в продолжение этих промежутков опустилось бы падая от касательных, скорости же пропорциональны $GH$ и $HJ$ и обратно пропорциональны этим промежуткам времени.

Обозначим эти промежутки через $T$ и $t$ и скорости через

$$\frac{GH}{T} \text{ и } \frac{HJ}{t}$$

тогда уменьшение скорости в продолжение времени $t$ будет

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t}.$$




Фиг. 144.

Это уменьшение происходит от сопротивления, замедляющего движение тела, и от силы тяжести, его ускоряющей. Сила тяжести, когда тело при своем падении проходит пространство $NJ$, производит такую скорость, с которою, двигаясь равномерно, тело прошло бы в то же самое время удвоенный путь, как то доказал *Галилей*, т. е. скорость, равную $\frac{2NJ}{t}$. Вследствие этой скорости, когда тело описывает дугу $HJ$, эта дуга увеличивается на величину разности $HJ - HN$, равной $NJ \cdot \frac{MJ}{HJ}$, и следовательно, сила тяжести производит увеличение скорости тела на $\frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ}$. Придавая это увеличение скорости к указанному выше уменьшению ее, получим, что полное изменение скорости, происходящее от сопротивления среды, равно

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ}.$$

Так как в продолжение того же времени сила тяжести производит при свободном падении тела скорость $\frac{2NJ}{t}$, то сопротивление относится к тяжести, как

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ} \text{ к } \frac{2NJ}{t}$$

иначе как

$$\left(\frac{t \cdot GH}{T} - HJ + \frac{2MJ \cdot NJ}{HJ}\right) : 2NJ.$$

Примем теперь абсциссы $CB$, $CD$, $CE$ соответственно равными: $-\alpha$, $\alpha$, $2\alpha$. Ординату $CH$ обозначим через $P$ и величину $MJ$ положим равной сумме некоторого ряда

$$MJ = Q\alpha + R\alpha^2 + S\alpha^3 + \ldots$$

Тогда все члены этого ряда, следующие за первым, представят $NJ$, так что

$$NJ = R\alpha^2 + S\alpha^3 + \ldots$$

и ординаты $DJ$, $EK$ и $BG$ будут:

$$DJ = P - Q\alpha - R\alpha^2 - S\alpha^3 - \ldots$$
$$EK = P - 2Q\alpha - 4R\alpha^2 - 8S\alpha^3 - \ldots$$
$$BG = P + Q\alpha - R\alpha^2 + S\alpha^3 - \ldots$$

Возвысив в квадрат разности ординат $BG - CH$ и $CH - DJ$ и приложив к ним $BC^2$ и $CD^2$, получим квадраты дуг $GH$, $HJ$:

$$GH^2 = \alpha^2 + Q^2\alpha^2 - 2QR\alpha^3 + \ldots$$
$$HJ^2 = \alpha^2 + Q^2\alpha^2 + 2QR\alpha^3 + \ldots,$$

коих корни квадратные и дадут самые дуги:

$$GH = \alpha\sqrt{1 + Q^2} - \frac{QR \cdot \alpha^2}{\sqrt{1 + Q^2}} + \ldots$$
$$HJ = \alpha\sqrt{1 + Q^2} + \frac{QR \cdot \alpha^2}{\sqrt{1 + Q^2}} + \ldots$$

Затем, если из ординаты $CH$ вычесть полусумму ординат $BG$ и $DJ$ и из ординаты $DJ$ вычесть полусумму ординат $CH$ и $EK$, то останутся стрелки дуг $GJ$ и $HK$, равные $R\alpha^2$ и $R\alpha^2 + 3S\alpha^3$, которые пропорциональны отрезочкам $LH$ и $NJ$, т. е. относятся между собою, как квадраты бесконечно малых промежутков $T$ и $t$, поэтому будет

$$\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R + 3S\alpha}{R}} = \frac{R + \frac{3}{2}S\alpha}{R}.$$

Подставляя эту величину, а также и вышенайденные значения $GH$, $HJ$, $MJ$ и $NJ$, получим

$$\frac{t}{T}GH - HJ + \frac{2MJ \cdot NJ}{HJ} = \frac{3}{2}\frac{S}{R}\alpha^2\sqrt{1+Q^2},$$

а так как

$$2NJ = 2R\alpha^2,$$

то отношение силы сопротивления к силе тяжести будет[142]

$$\frac{3}{2}\frac{S}{R}\cdot\alpha^2\sqrt{1+Q^2} : 2R\alpha^2 = \frac{3S}{4R^2}\cdot\sqrt{1+Q^2}.$$

---

[142] Лагранж уделяет в своей «Théorie des Fonctions Analytiques» всю IV главу третьей части аналитическому решению этой задачи, подробно разбирая ошибку, которая была сделана Ньютоном в первом издании «Начал».

Хотя решение, даваемое Ньютоном, в сущности также аналитическое и изложено настолько подробно, что не представляет никаких трудностей, но мы приведем и лагранжево решение, заметив предварительно, что если уравнение траектории задано в виде $z = f(x)$, то величина

$$DJ = f(x + \alpha)$$

т. е.

$$DJ = f(x) + \alpha \cdot f'(x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot f''(x) + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x) + \ldots$$

следовательно будет:

$$P = f(x), \quad Q = -f'(x); \quad R = -\frac{1}{2}f''(x); \quad S = -\frac{1}{6}f'''(x)\ldots$$

Вместо буквы $\alpha$ у Ньютона написана в латинском издании «Начал» буква o; неудобство этой буквы в формулах заставило заменить ее здесь через $\alpha$.

Обозначим через $F$ — силу сопротивления, которое по предположению пропорционально квадрату скорости $v$ так, что $F = kv^2$; пусть масса точки равна $m$; положив $\frac{F}{mv} = q$, будем иметь уравнения движения:

$$z'' = -g - qz'; \quad x'' = -qx'. \tag{1}$$

Уравнение траектории

$$z = f(x). \tag{2}$$

Дифференцируя по времени уравнения (1) один раз и уравнение (2) три раза, получим:

$$z''' = -qz'' - q'z'; \quad x''' = -qx'' - x'q' \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} z' &= x'f'(x); \quad z'' = x''f'(x) + x'^2 f''(x) \\ z''' &= x'''f'(x) + 3x'x''f''(x) + f'''(x)\cdot x'^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или, положив, для краткости письма,

$$f'(x) = A; \quad f''(x) = B; \quad f'''(x) = C,$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} z' &= Ax'; \quad z'' = Ax'' + Bx'^2 \\ z'' &= Ax''' + 3Bx'x'' + Cx'^3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом имеем семь уравнений, а именно: два уравнения (1), два уравнения (3) и три уравнения (5). Исключив из этих уравнений величины $x'$, $x''$, $x'''$, $z'$, $z''$, $z'''$, получим одно уравнение, связывающее неизвестную $q$, а значит, и $F$ с $A$, $B$ и $C$.

Скорость же тела такова, что выходя с этою скоростью из какой-либо точки $H$ по направлению касательной $HN$, оно могло бы, двигаясь в пустоте, описывать параболу, коей диаметр есть $HC$ и соответствующий параметр

$$\frac{HN^2}{NJ}=\frac{1+Q^2}{R}.$$

Сопротивление же пропорционально плотности среды и квадрату скорости, поэтому плотность среды прямо пропорциональна сопротивлению и обратно пропорциональна квадрату скорости, т. е. пропорциональна отношению

$$\frac{3S}{4R^2}\sqrt{1+Q^2}:\frac{1+Q^2}{R}$$

или, что то же,

$$\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}.$$

*Следствие 1.* Если касательную $HN$ продолжить, пока она пересечет какую-либо ординату $AF$ в точке $T$, то будет

$$\sqrt{1+Q^2}=\frac{HT}{AC}$$

что и можно подставить в предыдущие формулы, после чего окажется, что сопротивление относится к силе тяжести, как $3S\cdot HT:4R^2\cdot AC$, что скорость пропорциональна $\dfrac{HT}{AC\cdot\sqrt{R}}$ и что плотность среды пропорциональна $\dfrac{S\cdot AC}{R\cdot HT}$.

---

Это исключение выполняется так: из уравнений (1) и (3), на основании первых двух уравнений (5), находим

$$x'^2=-\frac{g}{B}\quad\text{и}\quad x'''=x'(q^2-q'). \tag{6}$$

Тогда последнее из уравнений (5), в связи с первым из уравнений (3), дает

$$q(g+Aqx')-Ax'q'=Ax'(q^2-q')+3Bx'^2q+Cx'^3$$

т. е.

$$-2gq=Cx'^3$$

но

$$q=\frac{F}{mv}=\frac{F}{mx'\sqrt{1+A^2}}$$

следовательно

$$\frac{F}{mg}=-\frac{C\sqrt{1+A^2}}{2B^2}. \tag{7}$$

При ньютоновом обозначении:

$$A=-Q,\quad B=-2R\quad\text{и}\quad C=-6S,$$

так что формула (7) и есть та самая, которая дана в тексте.

*Следствие 2.* Таким образом, если кривая $PFHQ$ будет задана, как обыкновенно, уравнением, связывающим абсциссу $AC$ и ординату $CH$, то по разложении выражения ординаты в сходящийся ряд легко получить решение задачи по первым членам этого ряда подобно тому, как в следующих примерах.

*Пример 1.* Пусть кривая $PFHQ$ есть полукруг, описанный на диаметре $PQ$, требуется определить плотность среды так, чтобы она заставила бы брошенное тело двигаться по этой кривой.

Разделим диаметр $PQ$ пополам в точке $A$, и пусть будет:

$$AQ = n, \quad AC = a, \quad CH = e, \quad CD = \alpha,$$

тогда

$$DJ^2 = AQ^2 - AD^2 = n^2 - a^2 - 2a\alpha - \alpha^2 = e^2 - 2a\alpha - \alpha^2.$$

По извлечении по нашему способу корня, получим

$$DJ = e - \frac{a}{e}\alpha - \frac{1}{2e}\alpha^2 - \frac{a^2}{2e^3}\alpha^2 - \frac{a}{2e^3}\alpha^3 - \frac{a^3}{2e^5}\alpha^3 - \text{и т. д.},$$

заменив $e^2 + a^2$ через $n^2$, имеем

$$DJ = e - \frac{a}{e}\alpha - \frac{n^2}{2e^3}\alpha^2 - \frac{an^2}{2e^5}\alpha^3 - \text{и т. д.}$$

В рядах такого рода я распределяю члены следующим образом: первым членом я называю тот, который не содержит бесконечно малой $\alpha$, вторым — тот, где эта величина входит в первой степени, третьим — тот, где она во второй степени, четвертым — где она в третьей и т. д. до бесконечности. Первый член, который в этом примере есть $e$, всегда представляет длину ординаты $CH$, проведенной через начало неопределенного количества $\alpha$. Второй член, который здесь равен $\frac{a\alpha}{e}$, представляет разность между $CH$ и $DN$, т. е. отрезочек $MN$, получаемый дополнением параллелограмма $HCDM$, им определяется положение касательной $HN$; так, для этого примера, взяв отношение $\frac{MN}{HM}$, имеем

$$\frac{MN}{HM} = \frac{a\alpha}{e} : \alpha = \frac{a}{e}.$$

Третий член, равный здесь $\frac{n^2\alpha^2}{2e^3}$, представляет отрезочек $JN$, лежащий между касательной и кривой; этот член определяет угол касания $JHN$, иначе — кривизну кривой в точке $H$. Когда этот отрезочек $JN$ — конечной величины,[143] то он представляется третьим членом вместе с суммою всех прочих до бесконечности, но когда этот отрезочек уменьшается до бесконечности, то все члены, следующие за третьим, становятся бесконечно меньше третьего, и поэтому ими можно пренебречь. Четвертый член определяет изменяемость кривизны, пятый — изменяемость этой изменяемости, и так же продолжается далее.

Отсюда ясно немаловажное применение этих рядов при решении задач, зависящих от касательных и кривизны кривых.

Сопоставляя ряд

$$e - \frac{a}{e}\alpha - \frac{n^2}{2e^3}\alpha^2 - \frac{an^2}{2e^5}\alpha^3 \text{ и т. д.}$$

с рядом

$$P - Q\alpha - R\alpha^2 - S\alpha^3 \text{ и т. д.,}$$

получаем:

$$P = e; \quad Q = \frac{a}{e}; \quad R = \frac{n^2}{2e^3}; \quad S = \frac{an^2}{2e^5}.$$

следовательно,

$$\sqrt{1 + Q^2} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{e^2}} = \frac{n}{e}$$

и получится: что плотность среды должна быть пропорциональна $\frac{a}{ne}$, т. е. $\frac{a}{e}$, ибо $n$ есть величина постоянная, иначе — отношению $\frac{AC}{CH}$, т. е. длине $HT$ того отрезка касательной в точке $H$, который заключен между этою точкою и диаметром $AF$, перпендикулярным к $PQ$, и что сопротивление относится к силе тяжести, как $3a : 2n$, или, что то же, как $3AC : PQ$, скорость же будет пропорциональна $\sqrt{CH}$.

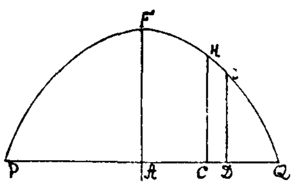
Таким образом, если тело выходит с надлежащею скоростью из места $F$ по направлению прямой параллельной $PQ$, если плотность среды во всяком месте его пути пропорциональна длине касательной $HT$ и сопротивление относится к силе тяжести, как $3AC : PQ$, то это тело опишет четверть окружности $FHQ$.

Но если то же тело выйдет из точки $P$ по направлению прямой, перпендикулярной $PQ$, и начнет двигаться по дуге полукруга $PFQ$, то $AC$ или $a$ будет расположено по другую сторону от центра $A$, поэтому надо

[143] Под словами «отрезочек $JN$ конечной величины» (finitae est magnitudinis) надо разуметь, что величина $\alpha$ в рассматриваемом разложении конечная, кроме того, что $f''(x)$ не равно нулю.

переменить знак и писать $-a$ вместо $a$. При таком условии получится, что плотность среды пропорциональна $-\frac{a}{e}$, т. е. отрицательная, при которой движение тела должно бы ускоряться, чего природа не допускает, поэтому естественно не может быть такого движения, при котором тело описывало бы четверть круга $PF$, для этого необходимо, чтобы среда, напирая, ускоряла бы движение тела, а не препятствовала бы ему своим сопротивлением.

*Пример 2.* Пусть кривая $PFQ$ (фиг. 145) — парабола, коей ось $AF$ перпендикулярна к горизонту $PQ$; требуется определить плотность среды, при которой брошенное тело могло бы двигаться по этой кривой.



Фиг. 145.

По свойству параболы произведение $PD \cdot DQ$ равно произведению ординаты $DJ$ на некоторую постоянную длину, поэтому, если обозначить эту длину через $b$ и положить:

$$PC = a, \quad PQ = c, \quad CH = e, \quad CD = \alpha,$$

то будет

$$(a + \alpha)(c - a - \alpha) = ac - a^2 - 2a\alpha + c\alpha - \alpha^2 = b \cdot DJ,$$

и следовательно,

$$DJ = \frac{ac - a^2}{b} + \frac{c - 2a}{b}\alpha - \frac{\alpha^2}{b},$$

и значит,

$$\frac{c - 2a}{b} = Q \quad \text{и} \quad \frac{1}{b} = R,$$

и так как дальнейших членов нет, то коэффициент при четвертом члене $S = 0$, и поэтому количество $\frac{S}{R\sqrt{1 + Q^2}}$, которому пропорциональна плотность среды, уничтожается; следовательно, брошенное тело движется по параболе в среде нулевой плотности, как это и доказано *Галилеем*.

*Пример 3.* Пусть кривая $AGK$ (фиг. 146) есть гипербола, коей асимптота $NX$ перпендикулярна к горизонтальной плоскости, и требуется определить плотность среды, при которой брошенное тело будет двигаться по этой кривой.

Пусть $MX$ есть вторая асимптота, пересекающая продолжение ординаты $DG$ в точке $V$. По свойству гиперболы произведение $XV \cdot VG$ есть постоянное, а так как отношение $DN$ к $VX$ также постоянное, то постоянно и произведение $DN \cdot VG$.

Пусть это произведение равно $b^2$; дополним параллелограмм $DNXZ$ и положим:

$$BN = a; \quad BD = \alpha; \quad NX = c \quad \text{и} \quad \frac{VZ}{DN} = \frac{m}{n}.$$

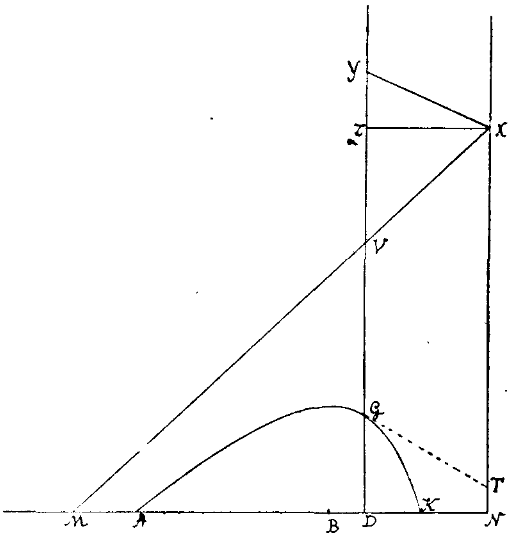
Тогда будет:

$$ND = a - \alpha; \quad VG = \frac{b^2}{a-\alpha}; \quad VZ = \frac{m}{n}(a-\alpha)$$

$$GD = NX - VZ - VG = c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}\alpha - \frac{b^2}{a-\alpha}.$$

По разложении члена $\frac{b^2}{a-\alpha}$ в сходящийся ряд получится

$$DG = c - \frac{m}{n}a - \frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\alpha - \frac{b^2}{a^2}\alpha - \frac{b^2}{a^3}\alpha^2 - \frac{b^2}{a^4}\alpha^3 - \ldots$$




Фиг. 146.

Второй член этого ряда $\left(\frac{m}{n} - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha$ надо принять за $Q\alpha$, третий, взятый с обратным знаком $\frac{b^2}{a^3}\alpha^2$, — за $R\alpha^2$, четвертый также с обратным знаком $\frac{b^2}{a^4}\alpha^3$ — за $S\alpha^3$, следовательно их коэффициенты $\left(\frac{m}{n} - \frac{b^2}{a^2}\right)$, $\frac{b^2}{a^3}$ и $\frac{b^2}{a^4}$ и надо подставить вместо $Q$, $R$, $S$ в предыдущую формулу, тогда получится, что плотность среды пропорциональна

$$\frac{b^2}{a^4} : \frac{b^2}{a^3}\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} - \frac{2mb^2}{na^2} + \frac{b^4}{a^4}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mb^2}{n} + \frac{b^4}{a^2}}}.$$

Отложив от точки $V$ по прямой $GV$ длину $VY = VG$, построим длину $XY$, которая и представляет знаменатель в предыдущей формуле, ибо

$$a^2 = XZ^2 \quad \text{и} \quad \frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mb^2}{n} + \frac{b^4}{a^2} = ZY^2.$$

Значит, плотность обратно пропорциональна длине $XY$. Сопротивление получится по отношению его к силе тяжести, равному $3\,XY:2\,GY$, скорость же такова, какую тело имело бы двигаясь по параболе, коей вершина $G$, диаметр $DG$ и параметр $\frac{XY^2}{VG}$.

Таким образом, если принять, что плотность среды в каждом месте $G$ обратно пропорциональна расстоянию $XY$ и что сопротивление в любом месте $G$ относится, как $3XY:2YG$, то тело, пущенное из точки $A$ с надлежащею скоростью, и опишет заданную гиперболу $AGK$.

*Пример 4.* Предполагается, что $AGK$ есть вообще некоторая гиперболическая кривая, коей центр $X$ и асимптоты $MX$ и $NX$, обладающая тем свойством, что если построить прямоугольник $XZDN$, коего сторона $ZD$ пересекает кривую в $G$ и ее асимптоту в $V$, то $VG$ обратно пропорционально $DN^n$, причем показатель $n$ задается; требуется определить плотность среды, брошенное в которой тело будет двигаться по этой гиперболической кривой.

Положим:

$$BN=a;\quad BD=\alpha;\quad NX=c,$$

и пусть

$$VZ:DN=d:e \quad \text{и} \quad VG=\frac{b^2}{DN^n}$$

тогда будет:

$$DN=a-\alpha;\quad VG=\frac{b^2}{(a-\alpha)^n};\quad VZ=\frac{d}{e}(a-\alpha)$$

$$GD=NX-VZ-VG=c-\frac{d}{e}(a-\alpha)-\frac{b^2}{(a-\alpha)^n}.$$

По разложении члена $\frac{b^2}{(a-x)^n}$ в ряд получится

$$GD=c-\frac{d}{e}a-\frac{b^2}{a^n}+\frac{d}{e}\alpha-\frac{nb^2}{a^{n+1}}\alpha-\frac{n^2+n}{2a^{n+2}}b^2\alpha^2-\frac{n^3+3n^2+2n}{6a^{n+3}}b^2\alpha^3$$

и т. д.

Второй член этого ряда $\left(\frac{d}{e}-\frac{nb^2}{a^{n+1}}\right)\alpha$ надо принять за $Q\alpha$, третий $\frac{n^2+n}{2a^{n+2}}b^2\alpha^2$ — за $R\alpha^2$, четвертый $\frac{n^3+3n^2+2n}{6a^{n+3}}b^2\alpha^3$ — за $S\alpha^3$, тогда плотсреды $\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$ в какой-либо точке $G$ будет

$$\frac{n+2}{3\sqrt{a^2+\frac{d^2}{e^2}a^2-\frac{2dnb^2a}{ea^n}+\frac{n^2b^4}{a^{2n}}}},$$

поэтому, если отложить по $VZ$ длину $VY = nVG$, то плотность будет обратно пропорциональна $XY$, ибо

$$a^2 \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{e^2} a^2 - \frac{2dnb^2}{ea^{n-1}} + \frac{nb^4}{a^{2n}}$$

суть квадраты длин $XZ$ и $ZY$.

Сопротивление вместе с тем относится к силе тяжести, как

$$\frac{3S \cdot XY}{a} : 4R^2$$

т. е. как

$$XY : \frac{2n^2 + 2n}{n + 2} VG;$$

скорость же повсюду такая, с которою брошенное тело шло бы по параболе, имеющей вершину $G$, диаметр $GD$ и параметр

$$\frac{1 + Q^2}{R} = \frac{2XY^2}{(n^2 + n) VG}.$$

## *ПОУЧЕНИЕ.*

Подобно тому как в следствии 1 получено, что плотность среды пропорциональна $\frac{S \cdot AC}{R \cdot HT}$, получается, если положить сопротивление пропорциональным $n$-ой степени скорости $V$, т. е. $V^n$, что плотность пропорциональна[144]

---

[144] В примечании 142 получены формулы

$$q = \frac{F}{mv} = -\frac{Cx'^3}{2g}$$

и

$$x'^2 = -\frac{g}{B}.$$

Если сопротивление $F$ пропорционально плотности среды $\delta$ и $n$-ой степени скорости $v$, так что $F = k\delta \cdot v^n$, причем $k$ постоянное, то получим

$$\delta = -\frac{m}{2kg} C \cdot \frac{x'^3}{v^{n-1}} = -\frac{m}{2kg} \cdot \frac{x'^3 \cdot C}{x'^{n-1} \cdot (1 + A^2)^{\frac{n-1}{2}}};$$

подставляя вместо $x'$ его значение и вместо $A$, $B$ и $C$ их значения: $-Q$, $-2R$ и $-6S$, получим

$$\delta = N_1 \frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}} \cdot (1 + Q^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

где через $N_1$ обозначен постоянный множитель. Это и есть формула, приводимая в тексте, ибо

$$\frac{HT}{AC} = \sqrt{1 + Q^2}.$$

$\dfrac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\dfrac{AC}{HT}\right)^{n-1}$; поэтому, если может быть найдена такая кривая, для которой отношение $\dfrac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \left(\dfrac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, иначе $\dfrac{S^2}{R^{4-n}} : (1+Q^2)^{n-1}$, постоянное, то тело будет двигаться по этой кривой в однородной среде, коей сопротивление пропорционально $n$-ой степени скорости $V$. Однако обратимся к более простым кривым.

Так как движение по параболе происходит не иначе, как в среде не сопротивляющейся, по описанным же выше гиперболам может происходить и при непрестанном сопротивлении, то очевидно, что кривая, описываемая брошенным телом в однородно сопротивляющийся среде, ближе подходит к этим гиперболам, нежели к параболе. Во всяком случае эта кривая гиперболического рода, но близ вершины она более отходит от асимптот, а в своих отдаленных частях более приближается к асимптотам, нежели вышеописанные гиперболы; однако эта разница не настолько велика, чтобы в практических приложениях было неудобно пользоваться этими кривыми, и может быть они более полезны, нежели эта более точная, но и гораздо более сложная гиперболическая кривая. Для приложений они выводятся следующим образом.

Дополняют параллелограм $XYGT$, тогда прямая $GT$ есть касательная к гиперболе в точке $G$, поэтому в месте $G$ плотность обратно пропорциональна $GT$, а скорость пропорциональна $\dfrac{GT}{\sqrt{GV}}$ и отношение сопротивления к силе тяжести равно

$$GT : \frac{2n^2+2n}{n+2} \cdot GV.$$

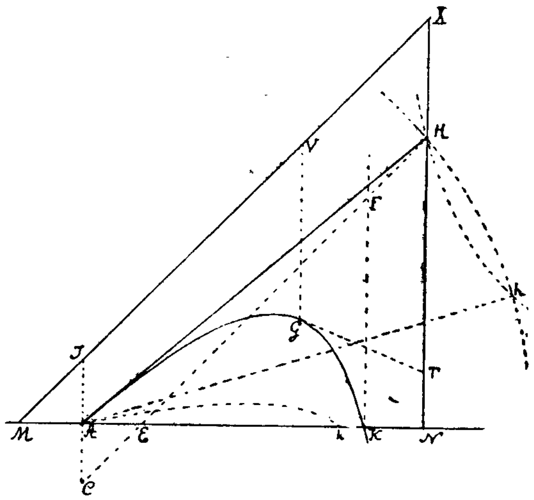
Поэтому, если брошенное из $A$ по направлению прямой $AH$ тело описывает гиперболу $AGK$, и $AH$ по продолжении пересекает асимптоту $NX$ в точке $H$, прямая же $AJ$, проведенная параллельно $NX$, пересекает другую асимптоту $MX$ в $J$, то плотность среды в точке $A$ будет обратно пропорциональна $AH$, скорость тела пропорциональна $\dfrac{AH}{\sqrt{AJ}}$ и отношение сопротивления к силе тяжести равно

$$AH : \frac{2n^2+2n}{n+2} \cdot AJ.$$

Отсюда происходят следующие правила.

*Правило 1.* Если плотность среды в $A$ и скорость, с которою тело брошено, сохраняются, а изменяется лишь угол $NAH$, то и длины $AH$, $AJ$, $HX$ останутся неизменными; поэтому, если эти длины будут найдены для какого-либо случая, то затем гипербола для любого заданного угла $NAH$ может быть весьма быстро определена.

*Правило 2.* Если сохраняются угол $NAH$ (фиг. 147) и плотность среды в $A$, а изменяется лишь скорость, с которою бросается тело, то длина $AH$ сохранится неизменной, а изменится $AJ$ обратно пропорционально квадрату скорости.




Фиг. 147.

*Правило 3.* Если сохраняются угол $HAN$, скорость тела в точке $A$ и ускорительная сила тяжести, отношение же сопротивления в $A$ к движущей силе тяжести * увеличивается в какое-либо число раз, то во столько же раз увеличится и отношение $AH$ к $AJ$, при сохранении величины параметра вышеупомянутой параболы и пропорциональной ему величины $\frac{AH^2}{AJ}$, поэтому $AH$ уменьшится в указанное число раз, а $AJ$ — в это число, возвышенное в квадрат. Отношение же сопротивления к весу увеличится или когда удельный вес тела станет меньше, или же плотность среды станет больше, или же когда при уменьшении величины тела сопротивление уменьшится в меньшем отношении, нежели вес.

*Правило 4.* Так как плотность среды близ вершины гиперболы больше, нежели в $A$, то, чтобы получить среднюю плотность, надо найти отношение наименьшей из касательных $GT$ к $AH$ и увеличить плотность в $A$ в отношении немного большем, нежели отношение полусуммы этих касательных к наименьшей.

---

* См. примечание 9.

*Правило 5.* Если длины $AH$, $AJ$ заданы и требуется описать кривую $AGK$, то надо продолжить $HN$ до $X$ так, чтобы было

$$HX : AJ = (n + 1) : 1,$$

и, приняв точку $X$ за центр и прямые $MX$ и $NX$ за асимптоты, провести через точку $A$ такую гиперболическую кривую, для всякой точки $G$ которой

$$AJ : VG = XV^n : XJ^n.$$

*Правило 6.* Чем число $n$ больше, тем точнее представляется этою гиперболою выходящая от $A$ ветвь траектории тела и менее точно — нисходящая к $K$, и наоборот. Обыкновенная гипербола занимает среднее положение и проще, нежели прочие; если взята гипербола такого рода и требуется найти ту точку $K$, в которой брошенное тело пересекает какую-либо данную прямую $AN$, проведенную через $A$, то надо отложить длину $NK = AM$, причем $M$ и $N$ суть точки пересечения асимптот $MX$ и $NX$ с данною прямою $AN$.

*Правило 7.* Отсюда следует простой способ определения этой гиперболы по испытаниям. Пусть два равных и подобных тела брошены с одинаковыми скоростями, но под разными углами $HAK$ и $hAk$, и точки их падения на горизонтальную плоскость суть $K$ и $k$.

Определяется отношение $AK$ к $Ak$, пусть будет

$$AK : Ak = d : e.$$

Затем, восставив перпендикуляр $AJ$ и отложив по нем какую-либо постоянную длину $AJ$, прими некоторую произвольную длину за $AH$ или $Ah$ и построй чертежом по правилу 6 длины $AK$ и $Ah$. Если отношение $AK : Ak$ окажется равным $d : e$, то длина $AH$ взята правильно. Если же нет, то отложи по неограниченной прямой $SM$ длину $SM$, равную принятой $AH$, и по восстановленному в точке $M$ перпендикуляру отложи длину $MN$, равную произведению разности $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ на некоторую постоянную длину. Подобным же образом, задаваясь различными значениями длины $AH$, надо найти несколько точек $N$ и провести через них правильную кривую $NNXN$, пересекающую (фиг. 139) прямую $SMMM$ в точке $X$. Приняв затем $AH$ равной $SX$, надо найти соответствующее $AK$, тогда длины, которые так относятся к принятым $AJ$ и $AH$, как определенная по опыту длина $AK$ к определенной указанным построением, и будут истинными значениями $AJ$ и $AH$, которые и требовалось найти. После того как они определены, найдется и сопротивление среды в точке $A$, ибо оно относится к силе тяжести, как $AH$ к $2AJ$. Затем плотность среды надо увеличивать по правилу 4, и если в том же отношении увеличить и сопротивление, найденное как указано выше, то оно получится точнее.

*Правило 8*. Когда длины $AH$ и $HX$ найдены и желательно получить направление прямой $AH$, по которой надо бросить тело с заданною скоростью, чтобы оно упало в данную точку $K$, то следует: в точках $A$ и $K$ восставить к горизонтальной плоскости перпендикуляры $AC$, $KF$, из коих $AC$ направлен вниз и равен $AJ$ или $\frac{1}{2}$ $HX$; на асимптотах $AK$, $KF$ построить такую гиперболу, сопряженная ветвь которой проходит через точку $C$, точкою $A$, как центром, и радиусом $AH$ описать круг, пересекающий эту гиперболу в точке $H$, — тело, брошенное по прямой $AH$, упадет в точку $K$. Ибо длина $AH$ задана, поэтому точка $H$ лежит где-либо на круге, описанном как сказано выше; если провести $CH$, пересекающую соответственно $AK$ и $KF$ в $E$ и $F$, то по параллельности $CH$ и $MX$ и равенству $AC = AJ$ будет $AE = AM$, и следовательно, $AE = KN$. Но

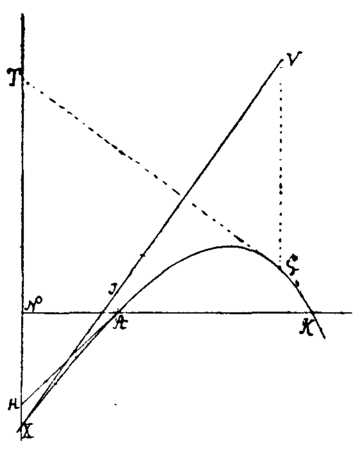
$$CE : AE = FH : KN,$$

следовательно

$$CE = FH$$

Значит, точка $H$ лежит на гиперболе, описанной на асимптотах $AK$ и $KF$, и такой, что сопряженная с нею ветвь проходит через точку $C$, т. е. эта точка $H$ находится в пересечении сказанного круга и этой гиперболы. Необходимо также заметить, что это построение выполняется одинаково, горизонтальная ли прямая $AK$, или наклонная, и что, в виду пересечения круга и гиперболы в двух точках $H$ и $h$, получаются два угла $NAH$ и $NAh$; при самом исполнении чертежа достаточно провести только круг, а затем приложить неопределенной длины линейку $CH$ так, чтобы она проходила через точку $C$ и чтобы отрезок ее $FH$, заключенный между кругом и прямою $FK$, равнялся бы отрезку $CE$, заключенному между точкою $C$ и прямою $AK$.

Что сказано о гиперболах, легко прилагается и к параболам. Пусть $XAGK$ (фиг. 148) представляет такую параболу, имеющую своею касательною в точке $X$ прямую $XV$, что ее ординаты $AJ$ и $GV$ пропорциональны $n$-ой степени абсцисс $XJ^n$ и $XV^n$. Если провести $XT$, $GT$, $AH$, причем $XT$ параллельно $VG$, прямые же $GT$ и $AH$ касаются параболы в точках $G$ и $A$, то тело, брошенное с надлежащею скоростью из точки $A$ по направлению прямой $AH$, опишет эту параболу, когда плотность среды во всяком месте $G$ обратно пропорциональна касательной $GT$. Скорость в точке $G$ такая же, с которою тело шло бы в среде не сопротивляющейся по обыкновенной параболе, имеющей своею вершиною $G$, диаметром продолженную вниз прямую $VG$ и параметром $\frac{2GT^2}{(n^2-n)VG}$; сопротивление же в точке $G$ будет относится к силе тяжести, как



Фиг. 148.

$$GT : \frac{2n^2-2n}{n-2} \cdot VG.$$

Поэтому, если $NAK$ представляет горизонтальную прямую и если, сохраняя плотность среды в точке $A$ и скорость, с которою тело бросается, как бы то ни было изменять угол $NAH$, то длины $AH$, $AJ$, $HX$ останутся без изменения, и следовательно, найдется точка касания $X$ и положение прямой $XJ$; принимая затем

$$VG : AJ = XV^n : XJ^n,$$

можно определить все точки $G$ параболической кривой, через которые проходит брошенное тело.

## ОТДЕЛ III

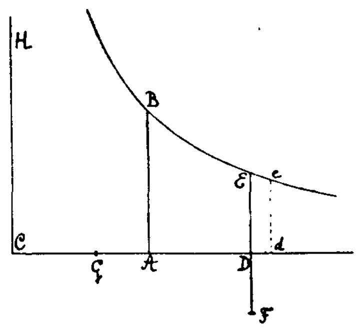
## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ, ЧАСТЬЮ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ, ЧАСТЬЮ — ВТОРОЙ

### Предложение XI. Теорема VIII

*Если тело, испытывая сопротивление, частью пропорциональное первой степени скорости, частью — второй, движется в однородной среде по инерции, и времена взяты в прогрессии арифметической, то количества, обратно пропорциональные скорости, сложенные с некоторою постоянною величиною, составят прогрессию геометрическую.*

При центре $C$ и взаимно перпендикулярных асимптотах $CADd$ и $CH$ (фиг. 149) описывается гипербола $BEe$, и пусть $AB$, $DE$, $de$ параллельны асимптоте. На асимптоте $CD$ задаются точки $G$ и $A$; если представить время равномерно возрастающею гиперболическою площадью $ABED$, то я утверждаю, что скорость может быть представлена длиною $DF$, коей обратная $DG$, сложенная с заданною $CG$, образуют длину $CD$, возрастающую в геометрической прогрессии.

В самом деле, пусть площадка $DEed$ представляет постоянное весьма малое приращение времени, тогда $Dd$ будет обратно пропорционально $DE$, т. е. прямо пропорционально $CD$. Уменьшение же $\frac{1}{GD}$ (по лем. II этой книги), равное $\frac{Dd}{GD^2}$, будет пропорционально $\frac{CD}{GD^2}$, т. е. $\frac{CG+GD}{GD^2}$ или $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$. Следовательно, когда время $ABED$ возрастает равномерно от присоединения постоянных частиц $EDde$, величина $\frac{1}{GD}$ убывает в таком же отношении, как и скорость, ибо уменьшение скорости пропорционально сопротивлению, которое по предположению состоит из суммы двух членов — одного пропорционального скорости, другого — квадрату ее; уменьшение же величины $\frac{1}{GD}$ пропорционально сумме количеств $\frac{1}{GD}$ и $\frac{CG}{GD^2}$, из них первое есть само $\frac{1}{GD}$, второе же $\frac{CG}{GD^2}$ пропорционально $\frac{1}{GD^2}$; поэтому величина $\frac{1}{GD}$, по подобию ее убывания, пропорциональна скорости. Если же количество $GD$, обратно пропорциональное $\frac{1}{GD}$, увеличить на постоянную величину $CG$, то сумма $CD$, при равномерном возрастании времени $ABDE$, будет возрастать в геометрической прогрессии [145].



Фиг. 149.

---

[145] Уравнение движения в этом случае может быть написано, при само собою понятных обозначениях, так:

$$m\frac{dv}{dt} = -(k_1 v + k_2 v^2). \tag{1}$$

Полагая

$$k_1 = mn_1, \quad k_2 = mn_2,$$

будем иметь

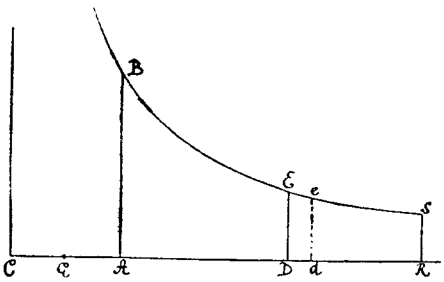
$$-\frac{dv}{n_1 v + n_2 v^2} = dt \tag{2}$$

*Следствие 1.* Следовательно, если при заданных точках $A$ и $G$ время представляется гиперболическою площадью $ABED$, то скорость представится через $\frac{1}{GD}$, обратную с $GD$.

*Следствие 2.* Беря отношение $GD$ к $GA$ равным отношению начальной скорости к скорости по прошествии какого-либо времени $ABDE$, найдем точку $G$, когда же она найдена, то найдется и скорость в конце любого заданного времени.

### Предложение XII. Теорема XI

*При тех же предположениях утверждаю: что если брать пройденные пространства в арифметической прогрессии, то скорости, увеличенные на некоторую постоянную величину, составят прогрессию геометрическую.*



Фиг. 150.

На асимптоте $CD$ берется точка (фиг. 150) $R$ и восставляется перпендикуляр $RS$, пересекающий гиперболу в точке $S$; пусть пройденное пространство представляется гиперболическою площадью $RSED$, тогда скорость будет пропорциональна такой длине $GD$, которая, будучи сложена с постоянною длиною $CG$, образует длину $CD$, убывающую в геометрической прогрессии, когда пространство $RSED$ возрастает в арифметической. Ибо, при постоянном приращении $EDde$ пространства, отрезочек $Dd$, представляющий уменьшение длины $GD$, обратно пропорционален $ED$, следовательно прямо пропорционален $CD$, т. е. сумме $GD + GC$.

---

откуда следует

$$\frac{d\left(\frac{n_1}{v} + n_3\right)}{\frac{n_1}{v} + n_2} = n_1\, dt \tag{3}$$

и, по интегрировании,

$$n_2 + \frac{n_1}{v} = \left(n_2 + \frac{n_1}{v_0}\right) e^{n_1 t} \tag{4}$$

где через $v_0$ обозначена скорость в момент $t = 0$.

Формула (4) и выражает высказанную теорему.

Но уменьшение скорости в продолжение каждого весьма малого промежутка времени, обратно ей пропорционального, в течение которого проходится постоянная частица $DdeE$ пути, пропорционально сопротивлению и этому времени, т. е. это уменьшение прямо пропорционально сумме двух величин, из коих одна пропорциональна скорости, другая — квадрату ее, и обратно пропорционально скорости, следовательно это уменьшение прямо пропорционально сумме двух количеств, из коих одно постоянное, другое пропорциональное скорости. [146] Таким образом уменьшение скорости и уменьшение длины $GD$ следуют одинаковому закону, при одинаковом же законе своих уменьшений сами убывающие количества пропорциональны, т. е. скорость и длина $GD$.

*Следствие 1.* Если скорость представлять длиною $GD$, то пройденное пространство будет пропорционально гиперболической площади $DESR$.

*Следствие 2.* Если принять где бы то ни было точку $R$, то точка $G$ получится, если взять $GR$ к $GD$ в отношении начальной скорости к скорости после прохождения какого-либо пространства $RSED$. После того как точка $G$ найдена, найдется и пройденное пространство по заданной скорости, и наоборот.

*Следствие 3.* Так как (предл. XI) при задании времени находится скорость, по этому же предложению по заданной скорости находится пространство, то пространство найдется и по заданному времени, и наоборот.

### Предложение XIII. Теорема X

*Предполагая, что тело, находящееся под действием силы тяжести, направленной вниз, движется прямо вверх или вниз и что оно испытывает сопротивление, частью пропорциональное первой степени скорости, частью второй, я утверждаю: что если для круга или гиперболы провести через конец диаметра прямую, параллельную диаметру, с первым сопряженному*

---

[146] Это рассуждение равносильно тому, когда мы, написав равенство

$$dt = \frac{dx}{v}$$

получаем из уравнения (2) примечания 145 такое:

$$-\frac{v\,dv}{n_1 v + n_2 v^2} = dx$$

или, по сокращении,

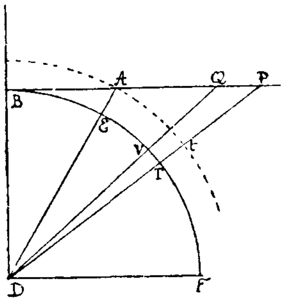
$$\frac{dv}{n_1 + n_2 v} = -dx$$

из которого следует

$$n_1 + n_2 v = (n_1 + n_2 v_0)\,e^{-n_2(x - x_0)}.$$

***и перпендикулярному ему, и представлять скорость отрезками этой прямой от заданной на ней точки, то времена будут представляться площадями секторов, ограниченных прямыми, проводимыми из центра к концам сказанных отрезков, и обратно.***

*Случай 1.* Положим сперва, что тело движется вверх; при центре $D$ (фиг. 151) каким-либо радиусом $DB$ описывается четверть круга $BETF$, и через конец диаметра $B$ проводится неограниченная прямая $BAP$, параллельная полудиаметру $DF$. На ней задается точка $A$, и берется отрезок $AP$, пропорциональный скорости. Так как сопротивление частью пропорционально скорости, частью квадрату ее, то пусть полное сопротивление пропорционально




Фиг. 151.

$$AP^2 + 2BA \cdot AP.$$

Проводятся прямые $DA$ и $DP$, пересекающие круг в точках $E$ и $T$; пусть сила тяжести представляется длиною $DA^2$, т. е. что отношение силы тяжести к сопротивлению равно

$$DA^2 : (AP^2 + 2BA \cdot AP),$$

тогда полное время движения вверх будет пропорционально площади кругового сектора $EDT$.

Пусть прямая $DVQ$ отсекает от скорости $AP$ ее приращение $PQ$ и от сектора $DET$ — приращение $DTV$, соответствующие заданному приращению времени. Это изменение скорости $PQ$ будет пропорционально сумме сил тяжести $DA^2$ и сопротивления $AP^2 + 2BA \cdot AP$, т. е. пропорционально $DP^2$ (Эвкл. «Элем.», кн. II, пр. 12). Поэтому площадь $DPQ$, пропорциональная $PQ$, пропорциональна и $DP^2$, площадь же $DTV$, относящаяся к площади $DPQ$, как $DT^2 : DP^2$, будет пропорциональна постоянной $DT^2$. Следовательно, площадь $EDT$, от отнятия частиц $DTV$ постоянной величины, будет убывать равномерно, подобно будущему времени, поэтому эта площадь пропорциональна полному времени движения вверх. [147]

---

[147] Направив ось $z$ вертикально вверх и полагая коэффициент сопротивления

$$k_1 = 2mn_1 \quad \text{и} \quad k_2 = mn_2,$$

где $m$ есть масса тела, будем иметь при движении вверх уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -(g + 2n_1 v + n_2 v^2). \tag{1}$$

*Случай 2.* Если скорость при движении вверх представлять, как и раньше, длиною $AP$ (фиг. 152), и принять сопротивление пропорциональным $AP^2 + 2BA \cdot AP$, и если сила тяжести окажется меньше такой, которую можно бы было представить длиною $DP^2$, то надо взять длину $BD$ так, чтобы разность $AB^2 - BD^2$ была пропорциональна силе тяжести; пусть $DF$ перпендикулярно и равно $BD$. На осях $BD$ и $DF$ описывается гипербола $FTVE$, имеющая своею вершиною точку $F$ и пересекающая $DA$ в $E$, $DP$ в $T$ и $DQ$ в $V$, — полное время движения вверх будет пропорционально гиперболическому сектору $TDE$.

---

Пусть будет

$$n_1 = a \cdot n_2 \quad \text{и} \quad g = b^2 \cdot n_2$$

тогда предыдущее уравнение напишем так:

$$\frac{dv}{(v-a)^2 + b^2 - a^2} = -n_2\,dt. \tag{2}$$

Величина $a$ у Ньютона представлена длиною $AB$, и в дальнейшем он различает два случая: 1) когда $b^2 - a^2 > 0$ и 2) когда $b^2 - a^2 < 0$.

В первом случае он берет $b = DA$ (фиг. 151) и, полагая

$$\overline{BD}^2 = c^2 = b^2 - a^2$$

строит круг $BETF$, площадь сектора коего и будет пропорциональна времени.

Действительно, уравнение (2) в этом случае будет

$$\frac{dv}{c^2 + (v+a)^2} = -n_2\,dt \tag{2}$$

из него следует

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{v+a}{c}\right) - \operatorname{arctg}\frac{a}{c} = cn^2\,[T-t] \tag{3}$$

где через $T$ обозначено время подъема до наивысшей точки, т. е. той, где скорость $v=0$. Это время определяется из равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{v_0+a}{c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{c} = cn^2\,T \tag{4}$$

следующего из (3), если сделать

$$t = 0 \quad \text{и} \quad v = v_0.$$

Равенства (3) и (4) и представлены Ньютоном геометрически, причем вместо углов он рассматривает пропорциональные им площади секторов.

Во втором случае Ньютон берет (фиг. 152) длину $c = BD$ так, чтобы было

$$b^2 = a^2 - c^2$$

тогда уравнение (2) будет

$$\frac{dv}{(v+a)^2 - c^2} = -n_2 dt \tag{2'}$$

и вместо формулы (3) будем иметь

$$\text{sect. tghyp}\left(\frac{v+a}{c}\right) - \text{sect. tghyp}\left(\frac{a}{c}\right) = cn_2\,[T-t] \tag{3'}$$

т. е. вместо круговых секторов — гиперболические.

Ибо уменьшение скорости $PQ$, происходящее в продолжение заданного весьма малого промежутка времени, пропорционально сумме сил — тяжести $AB^2 - BD^2$ и сопротивления $AP^2 + 2BA \cdot AP$, т. е. пропорционально $BP^2 - BD^2$. Но площадь $DTV$ относится к площади $DPQ$, как $DT^2 : DP^2$, поэтому, если на $DF$ опустить перпендикуляр $GT$, то так как

$$GT^2 = GD^2 - DF^2$$

и

$$DT : DP = GT : BD = GD : BP$$

то

$$DT^2 : DP^2 = GT^2 : BD^2 = (GD^2 - DF^2) : BD^2 = GD^2 : BP^2 =$$
$$= [GD^2 - (GD^2 - DF^2)] : (BP^2 - BD^2) = DF^2 : (BP^2 - BD^2).$$

Так как площадь $DPQ$ пропорциональна $PQ$, т. е. $BP^2 - BD^2$, то площадь $DTV$ будет пропорциональна постоянной $DF^2$. Следовательно, площадь $EDT$ убывает равномерно, уменьшаясь в продолжение каждого из весьма малых равных промежутков времени на равные же весьма малые частицы $DTV$, поэтому эта площадь пропорциональна времени.

*Случай 3.* Пусть $AP$ (фиг. 153) есть скорость тела при его движении вниз, $AP^2 + 2BA \cdot AP$ — сопротивление, $BD^2 - AB^2$ — сила тяжести, угол $DBA$ предполагается прямым. Если описать равнобочную гиперболу $BETV$, коей центр $D$, главная вершина $B$ и которая пересекает продолжения прямых $DA$, $DP$ и $DQ$ в $E$, $T$ и $V$, то сектор $DET$ этой гиперболы будет пропорционален полному времени падения.

Ибо приращение скорости $PQ$ и пропорциональная ему площадь $DPQ$ пропорциональны избытку тяжести над сопротивлением, т. е.

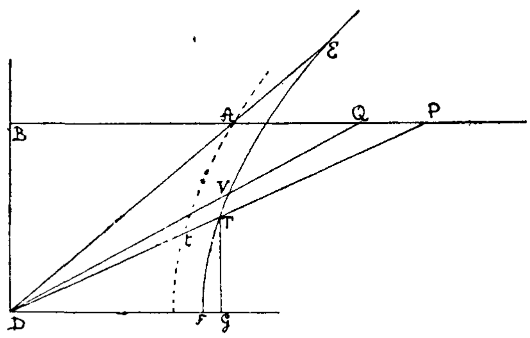
$$BD^2 - AB^2 - 2BA \cdot AP - AP^2 \quad \text{или} \quad BD^2 - BP^2.$$

Площадь же $DTV$ относится к площади $DPQ$, как

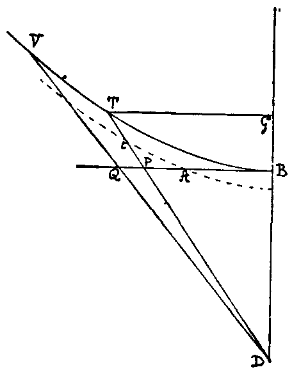
$$DT^2 : DP^2 = GT^2 : BP^2 = (GD^2 - BD^2) : BP^2 = GD^2 : BD^2 =$$
$$= BD^2 : (BD^2 - BP^2).$$

А так как площадь $DPQ$ пропорциональна $BD^2 - BP^2$, то площадь $DTV$ будет пропорциональна постоянной $BD^2$. Следовательно, площадь $EDT$ возрастает равномерно, увеличиваясь за каждый из весьма малых равных между собою промежутков времени на постоянную величину $DTV$, таким образом эта площадь пропорциональна времени падения.

*Следствие.* Если из центра $D$ радиусом $DA$ описать дугу круга $At$, проходящую через точку $A$ и подобную дуге $ET$, т. е. стягивающую угол $ADT$, то скорость $AP$ так относится к скорости, которую в среде не сопротивляющейся тело в течение времени $EDT$ утрачивало бы при движении вверх или приобретало при движении вниз, как площадь треугольника $DAP$ относится к площади сектора $DAt$, и значит, эта скорость находится по заданному времени. Ибо скорость в среде не сопротивляющейся пропорциональна времени, а значит, и сказанному сектору, в среде же, сопротивляющейся — треугольнику, в любой же среде, когда эти скорости весьма малы, их отношение приближается к равенству единице, подобно тому как отношение площади сектора к площади треугольника.




Фиг. 152.




Фиг. 153.

*ПОУЧЕНИЕ*

Так же может быть доказан тот случай при движении тела вверх, когда тяжесть меньше такой силы, которая может быть представлена через $DA^2$ или $AB^2 + BD^2$, и больше, нежели такая, которую можно представить через $AB^2 - BD^2$, и когда ее надо представить через $AB^2$. Но я перехожу к другому.

### Предложение XIV. Теорема XI

*При тех же предположениях я утверждаю, что пространство, проходимое при движении вверх или вниз, пропорционально разности двух площадей, из коих первая есть та, которою представлялось время, вторая же возрастает или убывает в арифметической прогрессии, причем силы,* *составленные из тяжести и сопротивления, берутся в прогрессии геометрической.*

Длина $AC$ (фиг. 154 a, b, c) берется пропорциональной силе тяжести, длина $AK$ — сопротивлению, причем точки $C$ и $K$ берутся по одну сторону от точки $A$, когда тело движется вниз, и по разные, когда оно движется вверх; перпендикуляр $Ab$ восставляется такой длины, чтобы было

$$Ab : DB = DB^2 : 4BA \cdot AC.$$

Если, построив гиперболу $bN$, имеющую своими взаимно перпендикулярными асимптотами $CK$ и $CH$, проводить $KH$ перпендикулярно к $CK$, то площадь $AbNK$ будет возрастать или убывать в арифметической прогрессии, когда сила $CK$ возрастает в прогрессии геометрической. [148]

Я утверждаю, что расстояние тела до наивысшего его положения будет пропорционально избытку площади $AbNK$ над площадью $DET$.

Так как $AK$ пропорционально сопротивлению, т. е. $AP^2 + 2BA \cdot AP$, то возьмем какую-либо постоянную длину $Z$ и положим

$$AK = \frac{AP^2 + 2BA \cdot AP}{Z},$$

тогда (по лем. II этой книги) $KL$ — приращение длины $AK$ — будет выражаться так:

$$KL = \frac{2AP \cdot PQ + 2BA \cdot PQ}{Z} = \frac{2BP \cdot PQ}{Z},$$

приращение же $KLON$ площади $AbNK$ будет

$$KLON = \frac{2BP \cdot PQ}{Z} \cdot OL = \frac{BP \cdot PQ \cdot BD^3}{2Z \cdot CK \cdot AB}.$$

---

[148] Уравнеиие (1) примечания 147, иа основании равенства $dz = v\,dt$, напишется

$$\frac{v\,dv}{n_2 v^2 + 2n_1 v + g} = -dz \qquad (1)$$

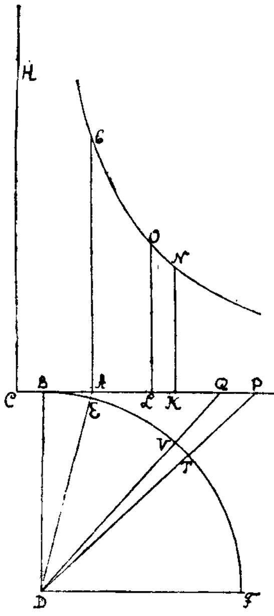
Этому уравнеиию можио придать вид

$$\frac{(2n_2 v + 2n_1)\,dv}{n_2 v^2 + 2n_1 v + g} - \frac{2n_1\,dv}{n_2 v^2 + 2n_1 v + g} = -2n_2\,dz.$$

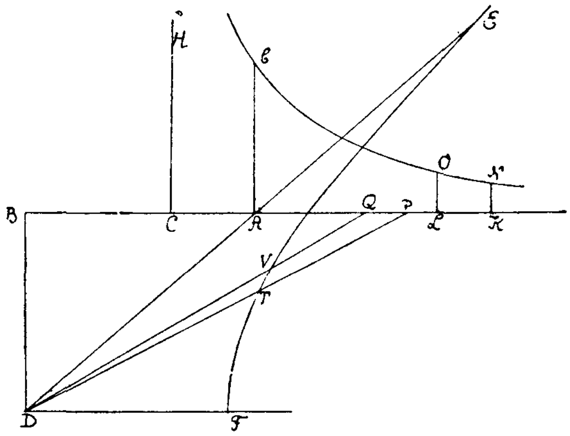
Откуда следует

$$\mathrm{Log}\,\frac{n_2 v^2 + 2n_1 v + g}{g} - 2n_1 S = 2n_2 [H - z] \qquad (2)$$

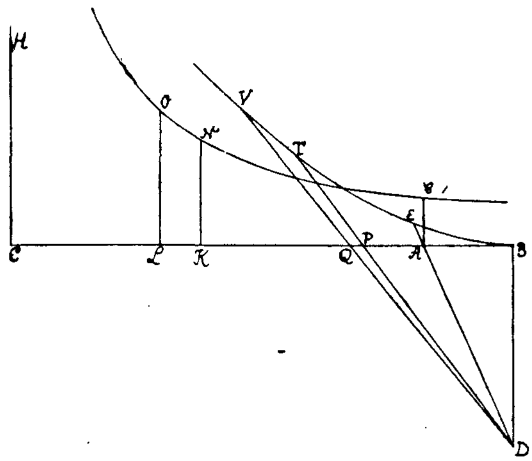
где через $S$ обозиачеиа та круговая или гиперболическая площадь, которою представляется время в примечании 147, и через $H$ — иаибольшая высота подъема. Равенство (2) и выражает высказанную теорему.




Фиг. 154a.




Фиг. 154b.




Фиг. 154c.

*Случай 1.* Когда тело движется вверх и сила тяжести пропорциональна $AB^2+BD^2$, причем $BET$ есть круг (фиг. 154a), то длина, пропорциональная тяжести, будет

$$AC=\frac{AB^2+BD^2}{Z}$$

и

$$DP^2 = AP^2 + 2BA \cdot AP + AB^2 + BD^2 = AK \cdot Z + AC \cdot Z = CK \cdot Z,$$

поэтому площадь $DTV$ будет относиться к площади $DPQ$, как $DT^2$ или $DB^2$ к $CK \cdot Z$.

*Случай 2.* Если тело движется вверх и тяжесть пропорциональна $AB^2 - BD^2$, то линия $AC$ (фиг. 154b) будет

$$AB = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$$

и

$$DT^2 : DP^2 = DF^2 : (BP^2 - BD^2) = BD^2 : (BP^2 - BD^2) =$$
$$= BD^2 : (AP^2 + 2BA \cdot AP + AB^2 - BD^2) = DB^2 : (AK \cdot Z + AC \cdot Z) =$$
$$= BD^2 : CK \cdot Z,$$

следовательно площадь $DTV$ будет относиться к площади $DPQ$, как

$$BD^2 : CK \cdot Z.$$

*Случай 3.* На основании такого же рассуждения, когда тело движется вниз и поэтому тяжесть пропорциональна $BD^2 - AB^2$ и линия $AC$ на (фиг. 154b) будет

$$AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$$

то, как и выше, площадь

$$DTV : DPQ = BD^2 : CK \cdot Z.$$

Итак, площади эти всегда находятся в этом отношении.

Если вместо площади $DTV$, которою представляется всегда самому себе равное весьма малое приращение времени, написать какой-либо определенный прямоугольник, положим $BD \cdot m$, то площадь $DPQ$, равная $\frac{1}{2} BD \cdot PQ$, будет относится к $BD \cdot m$, как $CK \cdot Z : BD^2$. Поэтому будет

$$PQ \cdot BD^3 = 2BD \cdot m \cdot CK \cdot Z$$

и вышенайденное приращение $KLON$ площади $AbNK$ будет

$$KLON = \frac{PB \cdot BD \cdot m}{AB}.$$

Отнимая приращение $DTV$ площади $DET$

$$DTV = BD \cdot m$$

останется

$$KLON - DTV = \frac{AP \cdot BD \cdot m}{AB}.$$

Но разность приращений равна приращению разности самих площадей, которое, таким образом, есть $\frac{AP}{AB} \cdot m \cdot BD$; а так как $\frac{BD}{AB} \cdot m$ есть величина постоянная, то это приращение пропорционально $AP$, т. е. скорости, а значит, и весьма малому приращению пространства, описываемого телом при движении вверх или вниз. Следовательно, упомянутая разность площадей и это пространство, коих приращения пропорциональны и которые совместно начинаются или исчезают, пропорциональны между собою.

*Следствие.* Если обозначить через $M$—длину, получаемую от разделения площади $DET$ на длину $BD$, и длину $V$ взять так, чтобы было

$$V:M = DA:DE$$

то пространство, проходимое телом при движении вверх или вниз в сопротивляющейся среде, будет так относиться к пространству, которое тело прошло бы в продолжение того же времени в среде несопротивляющейся, свободно падая из состояния покоя, как упомянутая выше разность площадей относится к $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$, и значит, когда время задано, то пространство найдется. Ибо в среде не сопротивляющейся пройденное пространство пропорционально квадрату времени, т. е. $V^2$, а так как $BD$ и $AB$ — постоянные, то оно пропорционально и $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$.

Но

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} = \frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$$

и так как приращение $M$ есть $m$, то приращение предыдущей площади есть

$$2\frac{DA^2 \cdot BD}{DE^2 \cdot AB} \cdot M \cdot m.$$

Но это приращение относится к приращению разности площадей $AbNK - DET$, т. е. к $\frac{AP \cdot BD \cdot m}{AB}$, как

$$\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M}{DE^2} : \frac{1}{2} BD \cdot AP = \frac{DA^2}{DE^2} \cdot DET : DAP$$

это же отношение, когда площади $DET$ и $DAP$ весьма малы, имеет своим пределом единицу. Следовательно, площадь $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ и разность площадей

$AbNK - DET$, когда все эти площади весьма малы, имеют равные приращения, и значит, равны между собою. Так как скорости, а поэтому и одновременно описываемые пространства, в обеих средах при начале движения вниз или при конце движения вверх приближаются к равенству, т. е. находятся в таком же друг к другу отношении, как площадь $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ к разности площадей $AbNK - DET$, и так как пространство, проходимое в среде несопротивляющейся, постоянно пропорционально $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$, пространство же, проходимое в среде сопротивляющейся, постоянно пропорционально разности площадей $AbNK - DET$, то необходимо, чтобы пространства, проходимые в той и другой среде в любые равные промежутки времени, относились бы друг к другу, как площадь $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ относится к разности площадей $AbNK - DET$.

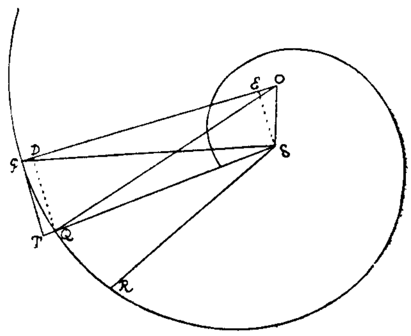
## *ПОУЧЕНИЕ*

Сопротивление, испытываемое шарами при движении в жидкости, происходит частью от ее сцепления, частью от трения и частью от плотности. Та часть сопротивления, которая происходит от плотности жидкости, как уже нами сказано, пропорциональна квадрату скорости; вторая часть, которая происходит от сцепления жидкости, постоянна, т. е. ее действие пропорционально приращению времени, поэтому следовало бы перейти к рассмотрению движения тел, испытывающих сопротивление частью постоянное, частью пропорциональное квадрату скорости. Но достаточно приложить уже изложенное в предложениях VIII и IX и их следствиях к этому исследованию, так как в них можно заменить происходящее от силы тяжести постоянное сопротивление, испытываемое телом при движении вверх, постоянною частью сопротивления жидкости, происходящей от ее сцепления, когда тело движется по инерции. Если тело движется прямо вверх, то эту часть сопротивления надо приложить к силе тяжести, если же тело падает вниз — то вычесть. Затем следовало бы перейти к рассмотрению движения тел, испытывающих сопротивление частью постоянное, частью пропорциональное первой степени скорости, частью — второй. Путь указан в предложениях XIII и XIV, в которых стоит только или заменить силу тяжести постоянною частью силы сопротивления, происходящей от сцепления среды, или же приложить ее, как и раньше, к силе тяжести. Но я перехожу к другому.

# ОТДЕЛ IV
# О КРУГОВОМ ОБРАЩЕНИИ ТЕЛ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

## Лемма III

*Пусть $PQR$ есть спираль, пересекающая все радиусы, такие как $SP$, $SQ$, $SR$ и т. д., под одним и тем же углом; проводится прямая $PT$, касающаяся спирали в какой-либо точке $P$ и пересекающая радиус $SQ$ в $T$, полюс $S$ соединяется прямою $SO$ с точкою $O$ пересечения нормалей $PO$ и $QO$ к спирали. Я утверждаю, что когда точки $P$ и $Q$, приближаясь друг к другу, совместятся, то в пределе угол $PSO$ обратится в прямой и предельное отношение прямоугольника $2PS \cdot TQ$ к $PQ^2$ равно единице.*




Фиг. 155.

Если из прямых углов $OPQ$, $OQR$ (фиг. 155) вычесть равные углы $SPQ$, $SQR$, то останутся равные углы $OPS$ и $OQS$, поэтому круг, проходящий через точки $O$, $S$, $P$, пройдет и через точку $Q$. Когда точки $P$ и $Q$ совпадут, то этот круг будет касаться спирали в месте совпадения и, значит, будет пересекать прямую $OP$ перпендикулярно, следовательно эта прямая будет диаметром круга, а угол $OSP$, вписанный в полуокружность,—прямым.

На $OP$ опускаются перпендикуляры $QD$ и $SE$; предельные отношения линий будут таковы:

$$TQ : PD = TS : PE = PS : PE = 2PO : 2PS$$

точно так же

$$PD : PQ = PQ : 2PO.$$

Отсюда следует [149]

$$2PS \cdot TQ = 2PO \cdot PD = PQ^2.$$

[149] Если принять точку $S$ за полюс и какую-либо постоянную прямую за полярную ось, то уравнение данной логарифмической спирали будет

$$r = ae^{n\theta}.$$

Точка $O$ есть центр кривизны для точки $P$ этой спирали. Обозначая через $\alpha$ — угол $SPO$ между радиусом-вектором и нормалью, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = n$$

и

$$\rho = PO = r \cdot \sqrt{1 + n^2}$$

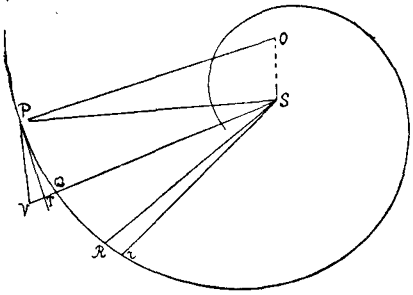
и приведенная в тексте формула равносильна такой:

$$2r \cdot TQ = r^2 (1 + n^2)\, d\theta^2.$$

### Предложение XV. Теорема XII

*Если плотность среды в отдельных местах обратно пропорциональна их расстояниям до неподвижного центра и если центростремительная сила пропорциональна квадрату плотности, то я утверждаю, что тело может обращаться по спирали, пересекающей под постоянным углом все радиусы, исходящие из этого центра.*

Полагая то же самое, как и в предыдущей лемме, продолжаем $SQ$ до $V$ так, чтобы $SV$ было равно $SP$ (фиг. 156). Пусть в течение какого-либо промежутка времени тело, двигаясь в сопротивляющейся среде, описывает весьма малую дугу $PQ$, в продолжение же двойного такого промежутка — дугу $PR$. Утраты в длине этих дуг, происходящие от сопротивления, иначе утраты по сравнению с дугами, которые были бы описаны в среде несопротивляющейся в продолжение тех же промежутков времени, относятся друг к другу, как квадраты этих промежутков, так что



Фиг. 156.

утрата в длине дуги $PQ$ составляет одну четверть от утраты в длине дуг $PR$; поэтому, если взять площадь $QSr$, равную $PSQ$, то утрата в длине дуги $PQ$ будет равна половине длины отрезочка $Rr$, следовательно отношение силы сопротивления к центростремительной будет равно отношению отрезочков $\frac{1}{2}Rr$ и $TQ$, образуемых одновременно. [150]

---

[150] Ньютон сравнивает здесь движение в среде сопротивляющейся с движением под действием той же центростремительной силы при отсутствии сопротивления, причем он, для нахождения отношения между силами, берет отношение отклонений, производимых этими силами в продолжение бесконечно малого промежутка времени. Обозначим этот промежуток через $\tau$, скорость тела в точке $P$ — через $v$ и ускорения от силы сопротивления — через $w$, проекцию ускорения центростремительной силы на касательную — через $w_1$, полную же величину этой силы — через $\frac{\mu^2}{r^2}$, массу тела будем считать равной 1. Тогда имеем:

$$PQ = v\tau - \frac{1}{2}w_1\tau^2 - \frac{1}{2}w\tau^2$$

$$PR = v \cdot 2\tau - \frac{1}{2}w_1(2\tau)^2 - \frac{1}{2}w(2\tau)^2 = 2v\tau - 2w_1\tau^2 - 2w_2\tau^2.$$

Так как центростремительная сила, действующая на тело в $P$, обратно пропорциональна $SP^2$ и так как по лемме X книги I отрезочек $TQ$ пропорционален этой силе и квадрату времени, в продолжение коего описывается дуга $PQ$ (ибо в этом случае сопротивлением, как бесконечно меньшим

---

Отклонение, производимое силою сопротивления среды, Ньютон представляет длиною $\frac{1}{2} Rr$, так что

$$\frac{1}{2} Rr = \frac{1}{2} w\tau^2$$

чтобы получить эту длину, надо вообразить, что из точки $P$ выходит тело, находящееся под действием той же центростремительной силы, во сопротивления не испытывающее, с такою скоростью, что в продолжение промежутка времени $\tau$ оно проходит тот же самый путь $PQ$. Очевидно, что эта скорость

$$v_1 = v - \frac{1}{2} w\tau,$$

и тогда действительно:

$$PQ = v_1 \tau - \frac{1}{2} w_1 \tau^2 = v\tau - \frac{1}{2} w\tau^2 - \frac{1}{2} w_1 \tau^2.$$

В продолжение времени $2\tau$ тело пройдет путь

$$Pr = v_1 \cdot 2\tau - \frac{1}{2} w_1 (2\tau)^2 = 2v\tau - w\tau^2 - 2w_1 \tau^2,$$

и следовательно, будет

$$Rr = Pr - PR = w\tau^2$$

вместе с тем площадь $PSQ = QSr$, ибо, по предположению, на тело сопротивление не действует.

Дальнейшие рассуждения пояснений не требуют. Чтобы вместо пропорциональностей получить равенства, стоит только заметить, что будет:

$$TQ = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{SP^2} \cdot \tau^2; \quad TQ \cdot SP^2 = \frac{1}{2} PQ^2 \cdot SP = \frac{1}{2} \mu^2 \tau^2,$$

отсюда следует

$$\frac{PQ^2}{\tau^2} = v^2 = \frac{\mu^2}{SP} \tag{1'}$$

На основании формулы (4) текста имеем

$$Rr = \frac{1}{2} \frac{OS}{OP} \cdot \frac{PQ^2}{SP} = w \cdot \tau^2.$$

Значит,

$$w = \frac{1}{2} \frac{OS}{OP} \cdot \frac{PQ^2}{\tau^2} \cdot \frac{1}{SP} = \frac{1}{2} \frac{OS}{OP} \cdot \frac{v^2}{SP}.$$

Но, по предположению, $w = N\Delta v^2$, где $\Delta$ есть плотность среды и $N$ — постоянный коэффициент, и так как

$$\frac{1}{2} OS : OP = \frac{1}{2} n : \sqrt{1 + n^2}$$

то предыдущая формула дает

$$N\Delta = \frac{1}{2} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \cdot \frac{1}{SP}. \tag{7}$$

Затем, на основании формулы (1'),

$$w = N\Delta v^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \cdot \frac{\mu^2}{SP^2} = \frac{1}{2} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \cdot w_1. \tag{8}$$

Отношение же $w : w_1$ есть отношение силы сопротивления к центростремительной.

центростремительной силы, я пренебрегаю), то $TQ \cdot SP^2$, т. е. по предыдущей лемме $\frac{1}{2}\ PQ^2 \cdot SP$, пропорционально квадрату времени, следовательно время пропорционально $PQ \cdot \sqrt{SP}$ и скорость тела, с которою в это время описывается дуга $PQ$, будет пропорциональна

$$\frac{PQ}{PQ \cdot \sqrt{SP}} = \frac{1}{\sqrt{SP}} \tag{1}$$

т. е. обратно пропорциональна $\sqrt{SP}$. На основании подобного рассуждения, скорость, с которою описывается дуга $QR$, обратно пропорциональна $\sqrt{SQ}$. Но эти дуги пропорциональны скоростям, с которыми они описываются, т. е. относятся друг к другу, как $\sqrt{SQ}$ к $\sqrt{SP}$, иначе как $SQ$ к $\sqrt{SP \cdot SQ}$, по равенству же углов $SPQ = SQr$ и равенству площадей $PSQ = QSr$ отношение дуги $PQ$ к $Qr$ равно отношению $SQ$ к $SP$.

Из этих пропорций следует, что разность $Rr$, равная $Qr - QR$, будет

$$Rr - \frac{PQ}{SQ}[SP - \sqrt{SP \cdot SQ}] = \frac{1}{2}\, VQ \cdot \frac{PQ}{SP}, \tag{2}$$

ибо в пределе, когда точки $P$ и $Q$ совпадают, отношение $SP - \sqrt{SP \cdot SQ}$ к $\frac{1}{2}\ VQ$ равно единице. Но так как происходящая от сопротивления утрата длины дуги $PQ$, или величина $Rr$, вдвое ее бо́льшая, пропорциональна сопротивлению и квадрату времени, то сопротивление пропорционально

$$\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP}. \tag{3}$$

На основании же приведенного выше выражения $Rr$, будет

$$\frac{Rr}{PQ^2 \,.\, SP} = \frac{1}{2}\ \frac{VQ}{PQ \cdot SP \cdot SQ} = \frac{1}{2}\ \frac{OS}{OP \cdot SP^2} \tag{4}$$

ибо в пределе, при совпадении точек $P$ и $Q$, $SP = SQ$, угол $PVQ$—прямой, и по подобию треугольников $PVQ$ и $PSO$ будет

$$PQ : \frac{1}{2}\, VQ = OP : \frac{1}{2}\, OS. \tag{5}$$

Таким образом $\frac{OS}{OP \cdot SP^2}$ пропорционально сопротивлению, а следовательно, плотности среды в точке $P$ и квадрату скорости. Исключая пропорциональность квадрату скорости, т. е. $\frac{1}{SP}$, останется, что плотность среды в $P$ пропорциональна $\frac{OS}{OP \cdot SP}$. Для заданной спирали отношение $\frac{OS}{OP}$ — постоянное, значит плотность в точке $P$ пропорциональна $\frac{1}{SP}$. Следовательно, тело может обращаться по сказанной спирали в среде, коей плотность обратно пропорциональна расстоянию $SP$ до центра.

*Следствие 1.* Скорость в любой точке $P$ такова, с которою тело в среде не сопротивляющейся могло бы обращаться под действием такой же центростремительной силы по кругу в расстоянии от центра, равном $SP$.

*Следствие 2.* Плотность среды при постоянном расстоянии $SP$ пропорциональна $\frac{OS}{OP}$, если же это расстояние не постоянное, то плотность пропорциональна $\frac{OS}{OP \cdot SP}$, поэтому можно приспособить спираль к любой плотности среды.

*Следствие 3.* Сила сопротивления в любом месте $P$ относится к центростремительной в том же месте, как $\frac{1}{2}\ OS : OP$, ибо эти силы относятся как $\frac{1}{2}\ Rr : TQ$, иначе как

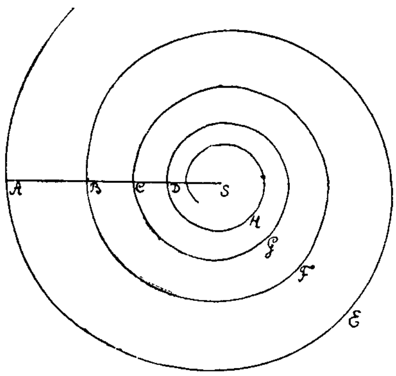
$$\frac{1}{4}\ \frac{VQ \cdot PQ}{SQ} : \frac{1}{2}\ \frac{PQ^2}{SP}$$

т. е. как $\frac{1}{2}\ VQ : PQ$, что равно $\frac{1}{2}\ OS : OP$. Следовательно, когда спираль задана, то найдется отношение силы сопротивления к центростремительной, и наоборот, когда задано это отношение, то найдется спираль.

*Следствие 4.* Следовательно, тело только тогда может обращаться по такой спирали, когда сила сопротивления меньше, нежели половина центростремительной. Если сопротивление будет равно половине центростремительной силы, то спираль обратится в прямую линию $PS$, и по этой прямой тело будет падать к центру со скоростью, которая будет относиться к найденной выше (случай параболы, теор. X кн. I) скорости движения в среде не сопротивляющейся, как $1 : \sqrt{2}$. Время падения будет обратно пропорционально скорости и, значит, найдется.

*Следствие 5.* Так как при одинаковом расстоянии от центра скорость в движении по спирали $PQR$ и по прямой $SP$ одна и та же, длина же спирали находится в постоянном отношении к длине прямой $PS$, именно как $OP$ к $OS$, то время опускания по спирали и время опускания по прямой $SP$ находятся в том же отношении $OP$ к $OS$, и значит, первое найдется.

*Следствие 6.* Если центром $S$ и двумя какими-либо заданной длины радиусами описать два круга и, сохраняя их, изменять как угодно угол, составляемый спиралью с радиусом $SP$, то число оборотов, совершаемых телом при переходе его по спиралям от одной окружности к другой, пропорционально $\frac{PS}{OS}$, т. е. тангенсу угла, составляемого спиралью с радиусом $PS$, время же этих оборотов пропорционально $\frac{OP}{OS}$, т. е. секансу того же угла, иначе — обратно пропорционально плотности среды.




Фиг. 157.

*Следствие 7.* Если тело в среде, плотность которой обратно пропорциональна расстоянию мест до центра, будет совершать по некоторой кривой $AEB$ оборот около этого центра и пересечет первый радиус $AS$ (фиг. 157) в точке $B$ под таким же углом, как раньше в $A$, и с такою скоростью, которая относится к его скорости в точке $A$, как $\sqrt{BS} : \sqrt{AS}$, то это тело будет продолжать совершать бесчисленное множество подобных обращений $BFC$, $CGD$ и т. д. и, пересекая радиус $AS$, выделит на нем отрезки $AS$, $BS$, $CS$, $DS$ и т. д., образующие непрерывную пропорцию (геометрическую прогрессию). Времена оборотов будут прямо пропорциональны периметрам $AEB$, $BFC$, $CGD$ орбит и обратно пропорциональны скоростям в их началах $A$, $B$, $C$ и т. д., т. е. будут пропорциональны $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ и т. д. Наконец, полное время, в продолжение которого тело достигнет до центра, будет относится ко времени первого оборота, как сумма всех членов прогрессии $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ и т. д., продолженной до бесконечности, к первому ее члену $AS^{\frac{3}{2}}$, т. е. пропорционально частному от разделения первого члена $AS^{\frac{3}{2}}$ этой прогрессии на разность

$AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ или, приблизительно, пропорционально $\frac{2}{3} \cdot \frac{AS}{AB}$; отсюда это время и находится весьма просто.

*Следствие 8*. Отсюда можно также с достаточным приближением вывести движение тел в срединах, коих плотность или постоянная, или же следует какому-либо иному заданному закону. Из центра $S$ радиусами $SA$, $SB$, $SC$ и т. д. в геометрической прогрессии опиши несколько кругов и прими приближенно, что продолжительность оборота между периметрами двух из них в среде, о которой шло дело, так относится ко времени оборота в предложенной среде, как средняя между этими кругами плотность этой среды относится к средней плотности между теми же кругами среды, о которой шло дело. Прими также, что секанс угла, под которым вышеопределенная спираль в среде, о которой шло дело, пересекает радиус $AS$, находится в этом же отношении средних плотностей к секансу угла, под которым новая спираль в предложенной среде пересекает тот же радиус, и наконец, что полное число оборотов между теми же двумя кругами приблизительно пропорционально тангенсам сказанных углов. Если это сделать для любой пары кругов, то движение может быть продолжено через все круги. При таком предположении можно без затруднений определить, каким образом и в какое время должны обращаться тела в любой среде правильного строения.

*Следствие 9*. Хотя такое движение, как эксцентричное, должно бы происходить по спиралям, приближающимся к овальной форме, но рассматривая, что отдельные обороты этих спиралей так же отстоят друг от друга и в такой же степени приближаются к центру, как и для вышеописанной спирали, можем себе представить, каким образом происходят движения тел и по того рода овальным спиралям.

### Предложение XVI. Теорема XIII

*Если плотность среды в отдельных местах обратно пропорциональна расстояниям мест до неподвижного центра, центростремительная же сила пропорциональна какой-либо степени плотности, то я утверждаю, что тело может двигаться по спирали, пересекающей все радиусы, проведенные через этот центр под постоянным углом.*

Это может быть доказано таким же способом, как и предыдущее предложение. Именно, если центростремительная сила (фиг. 156) в $P$ будет обратно пропорциональна степени $(n+1)$ расстояния $SP$, т. е. $SP^{n+1}$, то, как и выше, получится, что время, в продолжение коего тело описывает какую-либо весьма малую дугу $PQ$, пропорционально $PQ\cdot SP^{\frac{n}{2}}$, что сопротивление в $P$ пропорционально

$$\frac{Rr}{PQ^2\cdot SP^n} \quad \text{или} \quad \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)VQ}{PQ\cdot SP^n\cdot SQ}$$

т. е.

$$\frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)OS}{OP\cdot SP^{n+1}};$$

а так как $\left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{OS}{OP}$ — величина постоянная, то, значит, сопротивление обратно пропорционально $SP^{n+1}$, а так как скорость обратно пропорциональна $SP^{\frac{n}{2}}$, то плотность в $P$ будет обратно пропорциональною $SP$.

*Следствие 1.* Сопротивление будет относиться к центростремительной силе, как

$$\left(1-\frac{1}{2}n\right)OS:OP.$$

*Следствие 2.* Если центростремительная сила обратно пропорциональна $SP^3$, то $1-\frac{n}{2}=0$, следовательно сопротивление и плотность среды уничтожаются, как это и принято в предложении IX книги I.

*Следствие 3.* Если центростремительная сила будет обратно пропорциональна какой-либо степени расстояния $SP$, показатель которой больше 3, то положительное сопротивление обращается в отрицательное.

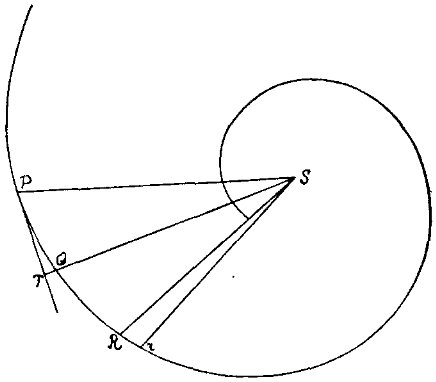
## *ПОУЧЕНИЕ*

Как в этом предложении, так и в предыдущих, относящихся до средин неодинаковой повсюду плотности, предполагается, что тела настолько малы, что нет надобности рассматривать, что плотность среды с одной стороны тела больше, нежели с другой. Сопротивление при прочих одинаковых условиях я предполагаю пропорциональным плотности, поэтому для средин, в которых сила сопротивления не пропорциональна плотности, надо настолько увеличить или уменьшить плотность, чтобы этим или поглощался избыток сопротивления, или пополнялся недостаток.

### Предложение XVII. Задача IV

*Найти центростремительную силу и сопротивление среды, при которых тело может обращаться по заданной спирали со скоростью, изменяющеюся по данному закону.*

Пусть (фиг. 158) эта спираль $PQR$. По скорости, с которою тело описывает весьма малую дугу $PQ$, найдется время ее описания, по отклонению $TQ$, пропорциональному центростремительной силе и квадрату времени, найдется сила. Затем по разности $RSr$ площадок $PSQ$ и $QSR$, описываемых в равные промежутки времени, найдется замедление тела, по которому, наконец, и определится как сопротивление, так и плотность среды.



Фиг. 158.

### Предложение XVIII. Задача V

*При данном законе центростремительной силы определить плотность среды в отдельных местах, при которой тело описывает заданную спираль.*

По центростремительной силе надо найти скорость в отдельных точках, затем по уменьшению скорости искать плотность среды, как в предыдущем предложении.

Способ решения этих вопросов объяснен в предложении X и лемме II этой книги, и я не буду задерживать читателя на этих сложных исследованиях. Я добавлю лишь кое-что относительно сил, действующих на движущиеся тела, и относительно плотности и сопротивления средин, в которых совершаются движения тел, до сих пор рассмотренные и подобные им.

## ОТДЕЛ V

## О ПЛОТНОСТИ И СЖАТИИ ЖИДКОСТЕЙ И О ГИДРОСТАТИКЕ

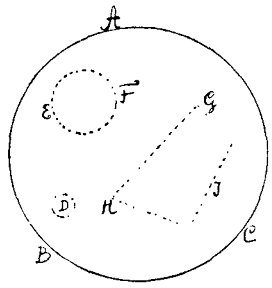
### Определение жидкости

*Жидкость есть такое тело, коего части уступают всякой как бы то ни было приложенной силе и, уступая, свободно движутся друг относительно друга.*

## Предложение XIX. Теорема XIV

*Все части однородной и неподвижной жидкости, заключенной в каком-либо неподвижном сосуде и сжимаемой отовсюду (не принимая в рассмотрение уплотнения, тяжести и всякого рода центростремительных сил), испытывают повсюду одинаковое давление и сохраняют свои места без всякого движения, которое произошло бы от этого давления.*

*Случай 1.* Пусть жидкость, заключенная в сферическом сосуде $ABC$ (фиг. 159), подвергается повсюду равномерному давлению; я утверждаю, что ни одна часть этой жидкости вследствие такого давления не станет двигаться. Ибо если какая-либо часть $D$ стала бы двигаться, то необходимо, чтобы и другие такого же рода части, находящиеся всюду в том же расстоянии от центра, двигались бы точно так же в то же самое время, ибо все они подвержены равному и подобному давлению и предположено, что устранено всякое движение, кроме происходящего от давления. Не могут они и приближаться к центру, если только жидкость к центру не уплотняется, как это и предположено, не могут и удаляться от центра, если только жидкость не уплотняется к окружности, что также противно предположению. Не могут они, сохраняя расстояние до центра, двигаться по какому-либо направлению, ибо по той же причине они должны бы двигаться и по противоположному направлению, двигаться же по противоположным направлениям в то же самое время та же самая часть не может. Следовательно, никакая часть жидкости не будет двигаться из занимаемого ею места.



Фиг. 159.

*Случай 2.* Я утверждаю, что все сферические части этой жидкости испытывают повсюду равное давление. Пусть $EF$ есть сферическая часть жидкости; если бы она не испытывала повсюду одинакового давления, то увеличим меньшее давление, пока давление не станет повсюду одинаковым; по доказанному в случае первом эта часть жидкости будет оставаться в покое. Но ранее приложения добавочного давления эта часть жидкости сохраняла свое место, от приложения же нового давления, по определению жидкости, она должна бы начать двигаться из занимаемого ею места. Одно другому противоречит, следовательно утверждение, что сфера не испытывает давления повсюду одинакового, ложно.

*Случай 3.* Я утверждаю, кроме того, что давления, испытываемые различными сферическими частями жидкости, равны между собою. Ибо две соприкасающиеся сферические части по закону III оказывают друг на друга в точке касания равные давления, по доказанному во 2-м случае давления одинаковы и по всей их поверхности. Две же сферические части не соприкасающиеся, так как их обеих может касаться промежуточная сферическая часть, испытывают также равные давления.

*Случай 4.* Я утверждаю, что все части жидкости испытывают везде равное давление, ибо двух любых частей в любых их точках может касаться сферическая часть, а так как она повсюду испытывает одинаковое давление, то и взаимно, по закону III, давление на сказанные части жидкости такое же.

*Случай 5.* Так как любая часть жидкости *GHJ* заключается в остальной жидкости как в сосуде и повсюду испытывает одинаковое давление, то все ее части везде оказывают друг на друга одно и то же давление и находятся в покое; отсюда очевидно, что для любой жидкости *GHJ*, которая находится повсюду под одним и тем же давлением, давление всех частей друг на друга везде одно и то же и они находятся в покое.

*Случай 6.* Следовательно, если эта жидкость заключена в сосуд не твердый и не везде испытывает одно и то же давление, то она по определению текучести уступает более сильному давлению.

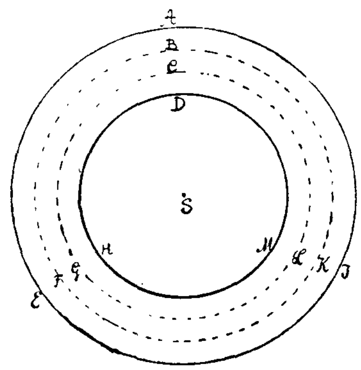
*Случай 7.* Поэтому в твердом сосуде жидкость не испытывает с какой-либо стороны более сильного давления, нежели с другой, но уступает ему и притом моментально, ибо стенка твердого сосуда не следует за отступающей жидкостью. Уступив же, жидкость надавит на противоположную сторону, и таким образом давление повсюду выравнивается. Как только жидкость получит стремление отступить от стороны, где давление больше, так тотчас же она встретит препятствие от противоположной стороны сосуда, поэтому давление приводится к равенству моментально, без всякого движения жидкости, и части жидкости, как сказано в случае 5, давят друг на друга повсюду одинаково и находятся в покое друг относительно друга.

*Следствие.* Таким образом движение частей жидкости друг относительно друга не может быть изменено приложением давления к внешней ее поверхности, если только сама эта поверхность где-либо не изменяется или если части жидкости при более или менее сильном друг на друга давлении не скользят друг по другу с большею или меньшею трудностью.

### Предложение XX. Теорема XV

*Если отдельные части ограниченной сферической свободной поверхностью и одноцентренным с нею сферическим же дном жидкости, плотность которой в одном и том же расстоянии от центра одна и та же, притягиваются к этому центру, то дно поддерживает вес цилиндра, коего основание равно поверхности дна, высота же такая же, как и окружающей жидкости.*

Пусть $DHM$ (фиг. 160) есть поверхность дна, $AEJ$ — свободная поверхность жидкости. Подраздели жидкость бесчисленным множеством сферических поверхностей $BFK$, $CGL$ и т. д. на концентрические слои одинаковой толщины и вообрази, что сила тяжести действует лишь на верхнюю поверхность каждого слоя и что на равные части каждой поверхности действие одинаково. Следовательно, наружная поверхность $AEJ$ испытывает давление лишь от своей собственной тяжести, каковое давление испытывают все части верхнего слоя и вторая поверхность $BFK$ (по предл. XIX) повсюду одинаково и сообразно своей величине; но, кроме этого, вторая поверхность испытывает еще давление от силы тяжести, приложенной к этой поверхности; это давление, слагаясь с предыдущим, дает двойное давление. Такое давление испытывает, сообразно своей величине, третья поверхность $CGL$ и, сверх того, еще давление от силы тяжести, к ней приложенной, следовательно давление утроенное. Подобным образом давление, испытываемое четвертой поверхностью, — четверное, пятой — пятерное и т. д. Таким образом полное давление, испытываемое какою-либо поверхностью, пропорционально не объему лежащей на ней жидкости, а числу слоев до свободной поверхности жидкости, и равно весу нижнего слоя, умноженному на число слоев, т. е. весу тела, предельное отношение которого к весу упомянутого выше цилиндра (если число слоев увеличивать и толщину их уменьшать бесконечно, так чтобы действие силы тяжести от нижнего слоя до верхнего стало непрерывным) равно единице. Следовательно, нижняя поверхность поддерживает вес вышеупомянутого цилиндра.



Фиг. 160.

На основании такого же рассуждения устанавливается предложение и тогда, когда сила тяжести, в зависимости от расстояния до центра, убывает по какому-либо заданному закону и когда жидкость внизу более плотная, а вверху — разреженная.

*Следствие 1.* Следовательно, на дно не действует полный вес окружающей жидкости, а оно поддерживает лишь ту часть веса, которая указана в предложении; остающаяся часть веса жидкости удерживается ее сводчатой формою.

*Следствие 2.* В равных расстояниях от центра величина давления одна и та же, горизонтальна ли поверхность, к которой давление относится, вертикальна ли, или наклонна, поднимается ли жидкость от поверхности, испытывающей давление, прямо вверх, или же извивается наклонно по кривым полостям и каналам, правильным или весьма неправильным, широким или самым узким. От этих обстоятельств давление не изменяется, как то можно заключить, прилагая доказательство этой теоремы к отдельным случаям ограничения жидкости.

*Следствие 3.* Из того же доказательства можно заключить (по предл. XIX), что вследствие происходящего от веса давления ни одна часть тяжелой жидкости не может получить движения относительно другой, исключая движения, происходящего от уплотнения.

*Следствие 4.* Поэтому, если какое-либо иное несжимаемое тело того же удельного веса, как и жидкость, будет погружено в эту жидкость, то оно не получит никакого движения от давления окружающей жидкости, оно не будет ни опускаться, ни подниматься, ни побуждаться изменить свой вид. Если оно сферическое, то и останется сферическим, несмотря на давление; если квадратное, то останется квадратным, и притом будь оно мягким или самым текучим, плавает ли оно свободно в жидкости, или лежит на дне. Ибо всякая внутренняя часть жидкости находится в условиях погруженного тела; в таких же условиях, как эта часть жидкости, находится и всякое погруженное тело, имеющее ту же самую величину, форму и удельный вес. Если бы погруженное тело, сохраняя свой вес, расплавилось бы и приняло бы жидкий вид, то если бы оно до того или поднималось вверх, или опускалось, или меняло от давления свою форму, то оно и теперь или поднималось бы вверх, или опускалось бы, или побуждалось бы принимать новую форму, и это потому, что тяжесть и прочие причины его движений сохранились. Но так как (случ. 5 предл. XIX). будучи теперь жидким, оно должно находиться в покое и сохранять свою форму, то и ранее было то же самое.

*Следствие 5.* Поэтому тело, по удельному весу более тяжелое, нежели жидкость его окружающая, будет тонуть, тело же, которого удельный вес меньше, будет всплывать, причем происходящие движения и изменения формы будут соответствовать тому, что может произвести избыток или недостаток веса, ибо лишь этот избыток или недостаток оказывает натиск, побуждающий тело к движению, иначе это тело находилось бы в равновесии с частями жидкости; упомянутый избыток или недостаток веса может быть уподобляем избытку или недостатку нагрузки на одной из чашек весов.

*Следствие 6.* Таким образом тяжесть тела, находящегося внутри жидкости, двоякая: одна — истинная и абсолютная, другая же — кажущаяся, обыденная и относительная. Абсолютный вес есть полная сила, с которою тело стремится вниз; обыденный и относительный есть избыток веса, с которым тело более стремится вниз, нежели жидкость, его окружающая. Первого рода тяжесть и есть та, которой подвержены части жидкостей и всякого рода тел в занимаемых ими местах, поэтому она при сложении и образует полный вес тела. Ибо все взятое в целом всегда имеет вес, как то можно испытать в сосудах, заполненных жидкостью, причем вес целого равен сумме весов всех частей его, и значит, слагается из этих весов. Вес второго рода не есть тот, которому тела подвержены в своем месте, т. е., будучи сопоставлены, они не становятся более тяжелыми, а, препятствуя взаимному стремлению к опусканию, они сохраняют свои места, как будто бы они были лишены тяжести. Так, обыкновенно, когда что-либо находится в воздухе и не превышает его веса, то народом и почитается за не имеющее веса. Что превышает вес воздуха, почитается народом за весомое, поскольку его вес не поддерживается весом воздуха. Обыденные веса тел не что иное, как избытки их истинного веса над весом воздуха. Поэтому все, что обыкновенно называется обладающим легкостью, есть лишь то, что менее тяжело, нежели воздух, и что, уступая преобладающему весу воздуха, стремится вверх. Эти тела обладают лишь относительною легкостью, а не истинною, ибо в пустоте они опускаются. Так и в воде тела, которые от большей или меньшей тяжести или опускаются, или поднимаются, лишь относительно и видимо тяжелы или легки; их относительная или видимая тяжесть или легкость есть лишь избыток или недостаток истинного их веса над весом воды. Тела же, которые, не обладая преобладающим весом, не тонут и, не уступая преобладающему весу воды, не всплывают, хотя они истинным своим весом и увеличивают полный вес целого, лишь относительно и по обыденному мнению не имеют веса в воде. Доказательство во всех этих случаях одинаково.

*Следствие* 7. Доказанное по отношению силы тяжести имеет место и по отношению всяких других центростремительных сил.

*Следствие 8*. Так, если среда, в которой тело движется, подвержена или собственной силе тяжести, или же иной какой-либо центростремительной силе, и тело подвержено такой же силе, но большей меры, то разность этих сил составит ту движущую силу тела, которую в предыдущих предложениях мы принимали за центростремительную. Если же тело подвержено сказанной силе слабее, нежели жидкость, то разность сил должна быть принимаема за силу центробежную (т. е. отталкивающую от центра).

*Следствие 9*. Из того, что жидкости, оказывая давление на заключающиеся в них тела, не изменяют их внешних форм, следует еще (по следствию предл. XIX), что они не изменяют и относительного расположения внутренних частей; поэтому, если ощущение происходит от смещения частей, то при погружении животных их тела не страдают и в них не возбуждается никакого ощущения, если только эти тела при сдавливании не могут уплотняться. То же самое относится и до любой системы тел, окруженной давящей на них жидкостью. Все части системы будут обладать теми же самыми движениями, как находясь в пустоте и подвергаясь лишь своей относительной тяжести, за исключением того, поскольку жидкость оказывает сопротивление их движению или же, сдавливая, способствует их слипанию.

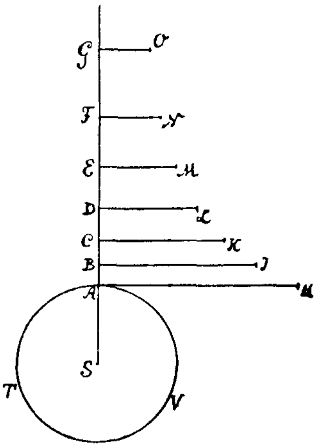
### Предложение XXI. Теорема XVI

*Если плотность жидкости пропорциональна давлению и эта жидкость находится под действием центростремительной силы, направленной вниз и обратно пропорциональной расстояниям до центра, то я утверждаю, что если эти расстояния брать в геометрической прогрессии, то и плотности жидкости в этих расстояниях составят также геометрическую прогрессию.*

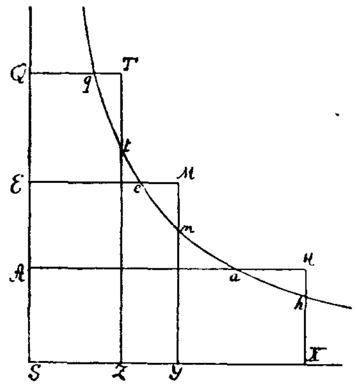
Пусть $ATV$ есть сферическое дно (фиг. 161), над которым находится жидкость, $S$ — центр, $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$, $SF$ и т. д. — расстояния в геометрической прогрессии. Длины $AH$, $BJ$, $CK$, $DL$, $EM$, $FN$ и т. д. восставленных в точках $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ и т. д. перпендикуляров берутся пропорционально плотности в этих местах; тогда удельные веса жидкости в этих местах будут пропорциональны $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BJ}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ и т. д. или же, что то же самое,

$\frac{AH}{AB}, \frac{BJ}{BC}, \frac{CK}{CD}$ и т. д. Вообрази сперва, что эти веса постоянны на протяжении от $A$ до $B$, от $B$ до $C$, от $C$ до $D$ и т. д., убывая скачками в точках $B$, $C$, $D$... Эти удельные веса, по умножении на высоты $AB$, $BC$, $CD$ и т. д., дают давления $AH$, $BJ$, $CK$ и т. д., действующие (по теор. XV) на дно. Таким образом частица $A$ подвержена всем давлениям $AH$, $BJ$, $CK$, $DL$, ..., продолженным до бесконечности, частица $B$ — всем давлениям, за исключением $AH$, частица $C$ — всем, кроме первых двух, и т. д.; следовательно, плотность $AH$ первой частицы $A$ относится к плотности $BJ$ второй частицы $B$, как бесконечно продолженная сумма всех $AH + BJ + CK + DL + \ldots$ к сумме $BJ + CK + DL + \ldots$ Плотность $BJ$ второй частицы $B$ относится к плотности $CK$ третьей $C$, как сумма $BJ + CK + DL + \ldots$ к сумме $CK + DL + \ldots$ Таким образом эти суммы пропорциональны своим разностям, следовательно (лем. I кн. II) они образуют геометрическую прогрессию, поэтому и разности $AH$, $BJ$, $CK$ и т. д., пропорциональные суммам, образуют такую же прогрессию. Так как плотности в точках $A$ $B$, $C$ и т. д. пропорциональны $AH$, $BJ$, $CK$ и т. д., то и они составляют геометрическую прогрессию. Если итти с пропусками, то по равенству отношений будет, что в расстояниях $SA$, $SC$, $SE$ и т. д., находящихся в геометрической прогрессии, и плотности $AH$, $CK$, $EM$ составят геометрическую прогрессию. Если сближать точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, ... так, чтобы удельный вес от дна до крайнего предела жидкости стал непрерывным, то плотности $AH$, $DL$, $GO$ в расстояниях $SA$, $SD$, $SG$, составляющих геометрическую прогрессию, находясь постоянно в геометрической же прогрессии, останутся таковыми и в этом случае.

*Следствие.* Поэтому, если известна плотность жидкости в двух какихлибо местах, напр. в $A$ и $E$, то можно найти ее плотность в любом месте $Q$. Опиши гиперболу (фиг. 162), коей центр $S$ и взаимно перпендикулярные асимптоты $SQ$ и $SX$, и которая пересекает перпендикуляры $AH$, $EM$, $QT$ в $a$, $e$, $q$, и перпендикуляры $HX$, $MY$, $TZ$, опущенные на асимптоту $SX$, в $h$, $m$ и $t$. Пусть площадь $YmtZ$ относится к заданной площади $YmhX$, как заданная же площадь $EeqQ$ к заданной $EeaA$; тогда продолженная линия $Zt$ отсечет длину $QT$, пропорциональную плотности. Ибо, если длины $SA$, $SE$, $SQ$ составляют непрерывную пропорцию (геометрическую прогрессию), то площади $EeqQ$, $EeaA$ равны, значит и пропорциональные им площади $YmtZ$, $XhmY$ также равны, и длины $SX$, $SY$, $SZ$, т. е. $AH$, $EM$, $QT$, составляют непрерывную пропорцию, как это и требуется. Если длины $SA$, $SE$, $SQ$ будут занимать какой-либо иной порядок в ряду непрерывно пропорциональных, то и линии $AH$, $EM$, $QT$ по пропорциональности гиперболических площадей займут соответствующий порядок в другом ряду непрерывно пропорциональных количеств.[151]




Фиг. 161.




Фиг. 162.

---

[151] Примем точку $S$ за начало оси $z$ и обозначим через $q$ — плотность в расстоянии $z$ от центра $S$ и через $p$ — давление. Примененный в тексте прием, при принятых теперь обозначениях, может быть изложен так: пусть будет

$$SA = z_0,\quad SB = z_1, \ldots SG = z_n;$$

по предположению эти величины берутся в геометрической прогрессии, положим:

$$z_1 = \lambda z_0;\quad z_2 = \lambda^2 z_0;\quad \ldots z_n = \lambda^n z_0. \tag{1}$$

Если обозначить через $q_0, q_1, \ldots q_n$ — соответствующие плотности жидкости, представляемые ординатами $AH$, $BJ$, $\ldots$ $GO$, то удельные веса последовательных слоев жидкости будут:

$$k\frac{q_0}{z_0},\quad k\frac{q_1}{z_1},\quad k\frac{q_2}{z_2}, \ldots k\frac{q_n}{z_n}$$

где $k$ — постоянная, и значит, давления в расстояниях $z_0, z_1, \ldots z_n$ от центра будут:

$$\begin{aligned}
p_0 &= k\left[\frac{q_0}{z_0}(z_1 - z_0) + \frac{q_1}{z_1}(z_2 - z_1) + \ldots + \frac{q_n}{z_n}(z_{n+1} - z_n) + \ldots\right] \\
p_1 &= k\left[\frac{q_1}{z_1}(z_2 - z_1) + \frac{q_2}{z_2}(z_3 - z_2) + \ldots + \frac{q_n}{z_n}(z_{n+1} - z_n) + \ldots\right] \\
p_2 &= k\left[\frac{q_2}{z_2}(z_3 - z_2) + \frac{q_3}{z_3}(z_4 - z_3) + \ldots + \frac{q_n}{z_n}(z_{n+1} - z_n) + \ldots\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

или, подставляя вместо $z_1, z_2, \ldots z_n$ их величины:

$$\begin{aligned}
p_0 &= k\,[q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots]\,(\lambda - 1) \\
p_1 &= k\,[q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n + \ldots]\,(\lambda - 1) \\
p_2 &= k\,[q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_n + \ldots]\,(\lambda - 1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

## Предложение XXII. Теорема XVII

*Если плотность какой-либо жидкости пропорциональна давлению и эта жидкость находится под действием центростремительной силы, направленной вниз и обратно пропорциональной квадрату расстояний до центра, то я утверждаю, что когда расстояния образуют гармоническую прогрессию, то плотности жидкости в этих расстояниях образуют геометрическую прогрессию.*

---

Но по предположению плотность пропорциональна давлению, так что положив

$$h = \frac{kq_0}{p_0},$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} q_0 &= h\,[q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots] \cdot (\lambda - 1) \\ q_1 &= h\,[q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n + \ldots] \cdot (\lambda - 1) \\ q_2 &= h\,[q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_n + \ldots] \cdot (\lambda - 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

Откуда следует:

$$\begin{aligned} q_1 - q_0 &= -h(\lambda - 1) \cdot q_0 \\ q_2 - q_1 &= -h(\lambda - 1) \cdot q_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и, полагая

$$1 - h(\lambda - 1) = c \qquad (5)$$

получим:

$$q_1 = cq_0, \quad q_2 = cq_1, \quad q_3 = cq_2, \ldots$$

или

$$q_1 = cq_0; \quad q_2 = c^2 q_0; \quad q_3 = c^3 q_0; \ldots q_n = c^n q_0 \qquad (6)$$

т. е. когда расстояния $s$ составляют геометрическую прогрессию

$$s_1 = \lambda s_0; \quad s_2 = \lambda^2 s_0; \quad s_3 = \lambda^3 s_0; \ldots s_n = \lambda^n s_0 \qquad (1)$$

то плотности $q$ составляют геометрическую прогрессию (6).

Из формул (6) и (1) следует

$$\log \frac{q_n}{q_0} = \frac{\log c}{\log \lambda} \cdot \log \frac{s_n}{s_0} = N \log \frac{s_n}{s_0}. \qquad (7)$$

Вместо логарифмов Ньютон берет гиперболические площади, постоянные же $q_0$, $s_0$ и $N$ исключает, предполагая, что известна плотность в двух различных местах, напр. $s_i$ и $s_e$; тогда будет:

$$\log \frac{q_i}{q_0} = N \log \frac{s_i}{s_0}; \qquad \log \frac{q_e}{q_0} = N \log \frac{s_e}{s_0} \qquad (8)$$

и, по исключении из этих уравнений и уравнения (7) величин $N$, $\log q_0$, $\log s_0$, получится

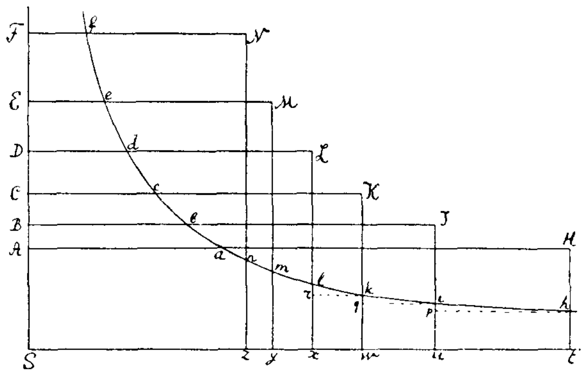
$$\log q_n - \log q_i = \frac{\log q_i - \log q_e}{\log s_i - \log s_e} \cdot (\log s_n - \log s_i). \qquad (9)$$

Это соотношение и заменяется построением при помощи гиперболы.

По поводу формулы (2) можно заметить, что обозначая через $Z$ — ординату верхней границы жидкости и предполагая, что число $n$ — бесконечно большое, все же разности

$$s_1 - s_0, \quad s_2 - s_1, \ldots$$

Пусть $S$ (фиг. 163) есть центр, $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$ — расстояния в геометрической прогрессии. Длины перпендикуляров $AH$, $BJ$, $CK$ и т. д. берутся пропорциональными плотностям жидкости в местах $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, ..., удельные веса ее в этих местах будут тогда $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BJ}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$ и т. д. Вообрази, что эти веса постоянны — первый на протяжении от $A$ до $B$, второй от $B$ до $C$, третий от $C$ до $D$ и т. д. По умножении на $AB$, $BC$, $CD$, $DE$



Фиг. 163.

бесконечно малы, будем иметь

$$p_0 = k \int\limits_{z_0}^{Z} \frac{q\,dz}{z} \tag{10}$$

и вообще:

$$p = k \int\limits_{z}^{Z} \frac{q\,dz}{z}. \tag{11}$$

Откуда следует

$$dp = -k\,\frac{q \cdot dz}{z}. \tag{12}$$

Присоединяя к этому уравнению то, которым выражается зависимость между плотностью и давлением, в рассматриваемом, напр., случае $q = \frac{q_0}{p_0}p$, получаем дифференциальное уравнение, из которого находится зависимость между $q$ и $z$.

Если притяжение не обратно пропорционально расстоянию $z$, а выражается иною зависимостью, напр. $\varphi(z)$, то вместо уравнения (12) будет

$$dp = -kq \cdot \varphi(z) \cdot dz. \quad (13$$

В предложении XXII рассмотрен случай

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{при} \quad q = \frac{q_0}{p_0}p.$$

В поучении, кроме того, упомянуты случаи:

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^3}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z^4} \quad \text{и вообще} \quad \varphi(z) = \frac{1}{z^n}$$

при той же зависимости между $p$ и $q$, наконец случай $\varphi(z) = g$ — постоянной силы тяжести вблизи поверхности Земли, рассмотренный Галлеем, а затем упоминается и про более общую зависимость между $q$ и $p$, выражаемую формулою

$$\frac{q^m}{q_0{}^m} = \frac{p^k}{p_0{}^k}.$$

Во всех этих случаях нахождение квадратур не представляет затруднений.

и т. д., или, что то же, на пропорциональные им расстояния $SA$, $BS$, $SC, \ldots$, получаются произведения $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ и т. д., пропорциональные давлениям. Так как плотности пропорциональны суммам этих давлений, то разности плотностей $AH - BJ$, $BJ - CK$ и т. д. будут пропорциональны разностям сказанных сумм, т. е. величинам $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ и т. д.

Опиши какую-либо равнобочную гиперболу, центр которой $S$ и асимптоты $SA$ и $Sa$ и которая пересекает перпендикуляры $AH$, $BJ$, $CK, \ldots$ в $a$, $b$, $c$ и т. д., перпендикуляры же $Ht$, $Ju$, $Kw$, опущенные на асимптоту $Sx$, в $h$, $i$, $k$; разности плотностей $tu$, $uw$ и т. д. будут пропорциональны $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$ и т. д. Произведения $tu \cdot th$, $uw \cdot ui$ и пр., т. е. площади прямоугольников $tp$, $uq$ и пр., будут пропорциональны $\frac{AH \cdot th}{SA}$, $\frac{BJ \cdot ui}{SB}$ и т. д., т. е. пропорциональны $Aa$, $Bb$ и т. д., ибо по свойству гиперболы

$$SA : AH = SA : St = th : Aa,$$

значит

$$\frac{AH \cdot th}{SA} = Aa.$$

Точно так же будет

$$\frac{BJ \cdot ui}{SB} = Bb$$

и т. д. Но длины $Aa$, $Bb$, $Cc, \ldots$ составляют геометрическую прогрессию и поэтому пропорциональны своим разностям, следовательно этим же разностям пропорциональны и площади прямоугольников $tp$, $uq$ и т. д., суммам же этих разностей таким, как $Aa - Cc$ или $Aa - Dd$, пропорциональны суммы площадей $tp + uq$ или $tp + uq + wr$. Пусть число такого рода членов весьма велико, тогда сумма всех разностей, скажем, $Aa - Ff$ будет пропорциональна сумме площадей всех прямоугольников, скажем, $zthn$. Будем увеличивать число членов и уменьшать расстояния между точками $A$, $B$, $C$ и т. д. до бесконечности, тогда сумма площадей сказанных прямоугольников станет равною гиперболической площади $zthn$, поэтому и разность $Aa - Ff$ пропорциональна этой площади. Если теперь принять какие-либо расстояния $SA$, $SD$, $SF$ в гармонической прогрессии, то разности $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ будут между собою равны, поэтому пропорциональные этим разностям площади $thlx$, $xlnz$ будут также равны и плотности $St$, $Sx$, $Sz$, т. е. $AH$, $DL$, $FN$, составят непрерывную пропорцию.

*Следствие.* Таким образом, если будут заданы плотности жидкости $AH$ и $BJ$ в двух местах, то будет известна площадь $thiu$, соответствующая разности их $tu$, и значит, найдется плотность $FN$ в расстоянии $SF$, если взять площадь $thnz$ в таком же отношении к известной площади $thui$, как разность $Aa - Ff$ к разности $Aa - Bb$.

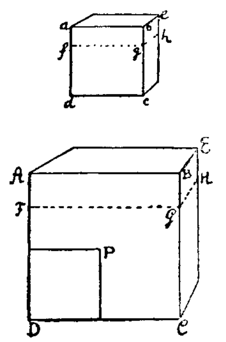
## ПОУЧЕНИЕ

Подобным же рассуждением может быть доказано, что если сила притяжения, действующая на частицы жидкости, обратно пропорциональна кубам расстояний до центра и если взять величины, обратные квадратам расстояний $\left(\text{т. е. } \frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SA^3}{SB^2}, \frac{SA^3}{SC^2} \ldots\right)$, в арифметической прогрессии, то плотности $AH$, $BJ$, $CK$ будут в прогрессии геометрической. Если сила притяжения убывает, как четвертые степени расстояний, и взять величины, обратные кубам расстояний, напр. $\frac{SA^4}{SA^3}, \frac{SA^4}{SB^3}, \frac{SA^4}{SC^3}$ и т. д., в арифметической прогрессии, то плотности $AH$, $BJ$, $CK$ будут в прогрессии геометрической. Подобно этому до бесконечности. Кроме того, если притяжение частиц жидкости при всяком расстоянии одно и то же и расстояния взять в арифметической прогрессии, то плотности будут в геометрической прогрессии, как это нашел знаменитейший *Эдмунд Галлей.* Если притяжение пропорционально расстоянию и квадраты расстояний взять в арифметической прогрессии, то плотности будут в геометрической, и подобно этому до бесконечности. Все это имеет место, когда плотность жидкости пропорциональна сжимающему ее давлению, или же, что то же самое, объем, занимаемый жидкостью, обратно пропорционален этой силе. Но можно вообразить и другие законы сжатия, напр. что куб сжимающей силы пропорционален четвертой степени плотности. В этом случае, если притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния, то плотность будет обратно пропорциональна кубу расстояния. Если вообразить, что куб сжимающей силы пропорционален пятой степени плотности и притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния, то плотность будет обратно пропорциональна полуторной степени расстояния. Если вообразить, что сжимающая сила пропорциональна квадрату плотности, притяжение же обратно пропорционально квадрату расстояния, то плотность будет обратно пропорциональна расстоянию. Перебирать все случаи слишком долго. Впрочем, опытами установлено, что плотность воздуха или в точности пропорциональна давлению, или весьма к тому близка, поэтому плотность воздуха в земной атмосфере пропорциональна весу всего накрывающего воздуха, т. е. высоте ртути в барометре.

### Предложение XXIII. Теорема XVIII

*Если плотность жидкости, состоящей из взаимно отталкивающихся частиц, пропорциональна сжимающему давлению, то отталкивательные силы частиц обратно пропорциональны расстояниям между их центрами.*

*Наоборот, частицы, отталкивающиеся взаимно с силами, обратно пропорциональными расстояниям между своими центрами, образуют упругую жидкость, плотность которой пропорциональна давлению.*



Фиг. 164.

Предполагается, что жидкость заключается в кубическом пространстве $ACE$ и затем сдавливанием приводится в меньшее кубическое же пространство $ace$ (фиг. 164). Расстояния частиц, занимающих сходственное положение в обоих пространствах, будут пропорциональны сторонам $AB$ и $ab$ кубов, плотности же жидкости обратно пропорциональны объемам $AB^3$ и $ab^3$. На грани $ABCD$ большего куба берется квадрат $DP$, равный грани $db$ меньшего куба; по предположению давление, с которым квадрат $DP$ действует на жидкость в большом кубе, относится к давлению, с которым квадрат $db$ действует на жидкость, заключенную в малом кубе, как плотности жидкости, т. е. как $ab^3 : AB^3$. Но полное давление, с которым квадрат $DB$ действует на заключенную в большом кубе жидкость, относится к полному давлению на нее квадрата $DP$, как $DB^2 : DP^2$, т. е. как $AB^2 : ab^2$. Следовательно, полное давление, с которым квадрат $DB$ действует на жидкость, относится к давлению на нее квадрата $db$, как $ab : AB$. Пусть жидкость разделяется плоскостями $FGH$ и $fgh$, проведенными через кубы, на две части; эти части оказывают друг на друга такие же полные давления, как и на грани $AC$ и $ac$, т. е. относящиеся друг к другу $ab : AB$, поэтому и отталкивательные силы, которыми эти давления поддерживаются, находятся в том же отношении. Ибо вследствие одинаковости как числа частиц, так и их положения в каждом из кубов, силы, с которыми все частицы действуют друг на друга через плоскости $FGH$ и $fgh$, пропорциональны силе, с которою каждая отдельная частица действует на отдельную же. Следовательно, силы, с которыми отдельная частица действует на отдельную через плоскость $FGH$ большего куба, относится к силе действия отдельной частицы на отдельную через плоскость $fgh$ меньшего куба, как $ab : AB$, т. е. обратно пропорционально расстоянию между частицами.

Наоборот, если силы взаимодействия двух отдельных частиц обратно пропорциональны расстоянию, т. е. обратно пропорциональны сторонам кубов $AB$ и $ab$, то и суммы сил будут находиться в том же отношении, и давления граней $DB$ и $db$ будут в отношении сумм сил, т. е. давление квадрата $DP$ к давлению грани $DB$, как $ab^2 : AB^2$, следовательно давление квадрата $DP$ к давлению грани $db$, как $ab^3 : AB^3$, т. е. что сжимающие давления пропорциональны плотностям.

*ПОУЧЕНИЕ*

На основании такого же рассуждения, если отталкивательные силы частиц обратно пропорциональны квадрату расстояний между их центрами, то кубы сжимающих сил будут пропорциональны четвертым степеням плотностей. Если отталкивательные силы будут обратно пропорциональны кубам или четвертым степеням расстояний, то кубы давлений будут пропорциональны или пятым, или шестым степеням плотностей. Вообще, если обозначить через $D$ — расстояние и через $E$ — плотность сжимаемой жидкости и принять, что отталкивательные силы частиц обратно пропорциональны $n$-ой степени расстояний, т. е. $D^n$, то давления будут пропорциональны степени $\frac{n+2}{3}$, т. е. $E^{\frac{n+2}{3}}$, и наоборот. Все это относится до действия между частицами таких отталкивательных сил, которые ограничиваются лишь ближайшими частицами и не распространяются далеко за них. Пример имеем в телах магнитных. Их притягательная сила почти ограничивается телами такого же рода, с ними смежными. Действие магнита суживается, если проложить железную пластинку, и почти ограничивается этой пластинкою, ибо расположенные за нею тела не столько притягиваются самим магнитом, сколь этою пластинкою. Подобно этому, если частицы отталкивают другие близкие к ним, на более же отдаленные не оказывают никакого действия, то жидкость, составленная из таких частиц, и рассматривалась в этом предложении. Если же действие частиц распространяется до бесконечности, то потребуется бо́льшая сила для одинакового уплотнения большего количества жидкости. Состоят ли жидкости на самом деле из взаимно отталкивающихся частиц, — есть вопрос физический. Мы доказали математически свойства жидкостей, состоящих из таких частиц, и предоставляем физикам повод исследовать этот вопрос.

## ОТДЕЛ VI

## О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКОВ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ

### Предложение XXIV. Теорема XIX

*Массы маятников, у которых расстояния центра качания до центра подвеса одинаковы, относятся между собою, как произведение весов маятников на квадраты времен их размахов в пустоте.*

Скорость, которую данная сила может сообщить данной массе в заданное время, пропорциональна силе и обратно пропорциональна массе. Чем больше сила, чем больше время и чем меньше масса, тем бо́льшая будет сообщена скорость. Это следует из второго закона движения. Если маятники одинаковой длины, то движущие силы при одинаковом отклонении от вертикали пропорциональны весу; пусть два тела при качании описывают равные дуги и эти дуги подразделены на равные части; так как времена описания каждой из сходственных частей этих дуг пропорциональны полным временам размахов, скорости же при прохождении через сходственные части дуг прямо пропорциональны движущим силам и полным временам качаний и обратно пропорциональны массам, то массы прямо пропорциональны силам и временам качаний и обратно пропорциональны скоростям. Но скорости обратно пропорциональны временам, следовательно величины, которые прямо пропорциональны времени и обратно пропорциональны скорости, пропорциональны квадрату времени; поэтому массы пропорциональны движущим силам и квадратам времени, т. е. весам маятников и квадратам времени размахов.

*Следствие 1.* Поэтому, когда времена качаний одинаковы, то массы тел относятся как веса.

*Следствие 2.* Если веса равны, то́ массы относятся, как квадраты времен.

*Следствие 3.* Если массы равны, то веса обратно пропорциональны квадратам времен.

*Следствие 4.* Так как квадраты времен при прочих равных условиях пропорциональны длинам маятников, то если времена и массы равны, то веса пропорциональны длинам маятников.

*Следствие 5.* Вообще, масса маятника прямо пропорциональна его весу и квадрату времени качания и обратно пропорциональна длине.

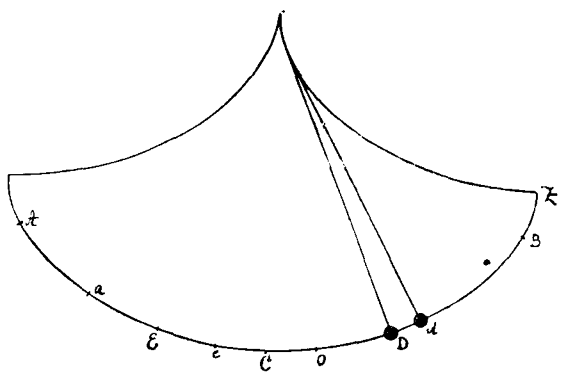
*Следствие 6.* В среде, сопротивления не оказывающей, масса маятника прямо пропорциональна кажущемуся весу и квадрату времени и обратно пропорциональна длине маятника. Ибо, как объяснено выше, кажущийся вес есть движущая сила во всякой тяжелой среде, поэтому, когда эта среда сопротивления не оказывает, он представляет то же самое, что и абсолютный вес в пустоте.

*Следствие 7.* Отсюда следует способ как для сравнения между собою тел по отношению к их массам, так и для сравнения веса того же тела в разных местах, чтобы исследовать изменения силы тяжести. По некоторым, произведенным точнейшим образом, опытам я нашел, что масса всякого тела всегда пропорциональна его весу.[152]

### Предложение XXV. Теорема XX

*Маятники, испытывающие в какой-либо среде постоянное сопротивление, и маятники, которые качаются в среде того же удельного веса, но сопротивления не оказывающей, совершают свои размахи по циклоиде в одинаковое время и одновременно описывают пропорциональные части дуг своих качаний.*

Пусть $AB$ (фиг. 165) есть дуга циклоиды, описываемой телом $D$ в продолжение некоторого времени при качании в среде несопротивляющейся.



Фиг. 165.

Разделим эту дугу точкою $C$ пополам, так что эта точка будет самая низшая точка дуги; тогда ускорительная сила, действующая на тело в точках $D$, $d$ или $E$, пропорциональна длине дуг $CD$, $Cd$ или $CE$. Представим эту силу этою длиною дуги; так как сопротивление постоянное, то пусть оно представляется постоянною дугою $CO$; возьмем дугу $Od$ так, чтобы было

$$Od : CD = OB : CB.$$

Так как в среде сопротивляющейся сила, ускоряющая тело в точке $d$, есть избыток силы $Cd$ над сопротивлением $CO$, то она будет представляться

[152] Краткое описание этих опытов см. ниже — книга III, предложение VI.

дугою $Od$ и, значит, относится к силе, действующей на тело в точке $D$ в среде не сопротивляющейся, как дуга $Od$ к дуге $CD$; по этому же самому в точке $B$ будет — как дуга $OB$ к дуге $CD$. Таким образом, если два тела $D$ и $d$ выйдут из точки $B$ и будут подвергаться действию этих сил, то так как эти силы при начале движения относятся между собою, как дуга $CB$ к дуге $OB$, скорости при самом начале движения и пройденные в нем пути будут находиться в этом же отношении. Пусть эти дуги суть $BD$ и $Bd$, тогда и остающиеся дуги $CD$ и $Od$ будут находиться в том же отношении, значит и силы, этим дугам $CD$ и $Od$ пропорциональные, останутся в этом же отношении, как и при самом начале движения, и тела будут продолжать описывать совместно дуги, находящиеся в этом отношении.

Итак, силы, скорости и остающиеся дуги $CD$ и $Od$ будут постоянно пропорциональны полным дугам $CB$ и $OB$, поэтому эти остающиеся дуги описываются одновременно. Следовательно, оба тела $D$ и $d$ одновременно придут в точки $C$ и $O$, — одно при движении в среде не сопротивляющейся в точку $C$, другое в среде сопротивляющейся в точку $O$. Так как, кроме того, скорости в точках $C$ и $O$ пропорциональны дугам $CB$ и $OB$, то дуги, которые тела будут одновременно описывать продолжая свое движение, будут находиться в этом же отношении; пусть они суть $CE$ и $Oe$. Сила, которою тело $D$ замедляется в точке $E$, пропорциональна $CE$, сила же, которой замедляется тело $d$ в среде сопротивляющейся, в точке $e$ равна сумме силы $Ce$ и сопротивления $CO$, т. е. $Oe$; следовательно, силы, замедляющие тела, относятся, как дуги $CE$ и $Oe$, пропорциональные дугам $CB$ и $OB$, поэтому и скорости, убывающие в этом отношении, остаются все время в этом постоянном отношении друг к другу. Следовательно, скорости и дуги, с этими скоростями описываемые, все время находятся в этом постоянном отношении длин дуг $CB$ и $OB$; поэтому, если взять полные дуги $AB$ и $aB$ в этом же отношении, то тела $D$ и $d$ будут их описывать совместно и одновременно утратят свое движение в точках $A$ и $a$. Следовательно, полные размахи изохронны и совместно описываемые дуги $BD$, $Bd$ или $BE$, $Be$ пропорциональны полным размахам $BA$, $Ba$.

*Следствие.* В сопротивляющейся среде наибольшая скорость движения имеет место не в низшей точке $C$, а в указанной выше точке $O$, разделяющей дугу $aB$ пополам, и когда тело после того продолжает свое движение к $a$, то оно замедляется совершенно так же, как оно ускорялось при своем движении от $B$ до $O$.

### Предложение XXVI. Теорема XXI

*Качания маятников по циклоиде в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости, изохронны.*

Ибо, если два тела, равноудаленные от центров подвеса, описывают при качании не равные дуги, то скорости в соответствующих частях этих дуг относятся между собою, как эти полные дуги размахов; сопротивления, пропорциональные скорости, будут также в этом отношении друг к другу. Следовательно, если к движущим силам, происходящим от тяжести, которые пропорциональны этим же дугам, приложить или от них отнять это сопротивление, то разности или суммы будут находиться в том же отношении, а так как приращение или уменьшение скорости пропорционально этим суммам или разностям, то скорости все время будут пропорциональны полным дугам размахов. Следовательно, если скорости в каком-либо случае были пропорциональны полным дугам, то они и останутся постоянно в этом же отношении друг к другу. Но в начале движения, когда тела только что начинают опускаться и описывать эти дуги, силы, так как они этим дугам пропорциональны, произведут скорости, им пропорциональные, следовательно скорости постоянно будут пропорциональны полным дугам размахов, поэтому эти размахи будут описываться одновременно.

### Предложение XXVII. Теорема XXII

*Если маятники испытывают сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, то разности времен их размахов в среде сопротивляющейся и в среде того же удельного веса, но не сопротивляющейся, будут приблизительно пропорциональны величине размахов.*

Когда два одинаковых маятника совершают в сопротивляющейся среде размахи неравной величины $A$ и $B$, то сопротивление тела, описывающего дугу $A$, относится к сопротивлению в соответствующей части дуги $B$, как квадраты скоростей, т. е. приблизительно как $A^2 : B^2$. Если бы сопротивление на дуге $B$ относилось бы к сопротивлению на дуге $A$, как $A \cdot B : A^2$, то по предыдущему предложению времена размахов по дуге $B$ и по дуге $A$ были бы между собою равны. Поэтому сопротивление $A^2$ на дуге $A$, соответствующее сопротивлению $A \cdot B$ на дуге $B$, производит увеличение времени размаха по дуге $A$ по сравнению с таковым же в среде несопротивляющейся; точно так же сопротивление $B^2$ производит увеличение времени размаха по дуге $B$ по сравнению с таковым в среде, не оказывающей сопротивления. Но эти увеличения приблизительно пропорциональны производящим их силам, т. е. $A \cdot B$ и $B^2$, или, что то же, дугам $A$ и $B$.

*Следствие 1.* Таким образом по временам размахов различной величины, совершаемых в сопротивляющейся среде, можно узнать время размаха в среде того же удельного веса, не оказывающей сопротивления. Ибо разность времен будет так относиться к избытку времени качания по меньшей дуге по сравнению с таковым же в среде не сопротивляющейся, как разность величины размахов к меньшему из них.

*Следствие 2.* Малые размахи более близки к изохронности, нежели большие, самые же малые совершаются в сопротивляющейся среде во время, весьма близкое к тому, как и в среде, сопротивления не оказывающей. Времена размахов, совершающихся по большего протяжения дуге, немного продолжительнее, оттого что сопротивление при движении тела вниз, увеличивающее продолжительность размаха, вследствие большей длины описанной дуги больше сопротивления при последующем движении вверх, которым эта продолжительность сокращается. Кроме того, как время малых размахов, так и больших, несколько удлиняется вследствие движения самой среды. Ибо тела при замедляющемся движении испытывают немного меньшее сопротивление, движущиеся же, ускоряясь, немного большее того, которое соответствовало бы их скорости при равномерном движении; это происходит потому, что в первом случае среда, вследствие воспринятого ею от тела движения, направленного в одну сторону с движением тела, более тесно за телом следует, во втором случае — менее, и поэтому более или менее согласуется с движением тела. Вследствие этого маятники при движении вниз испытывают большее сопротивление, при движении вверх — меньшее, нежели соответствующее скорости, и от обеих причин время размаха удлиняется.

### Предложение XXVIII. Теорема XXIII

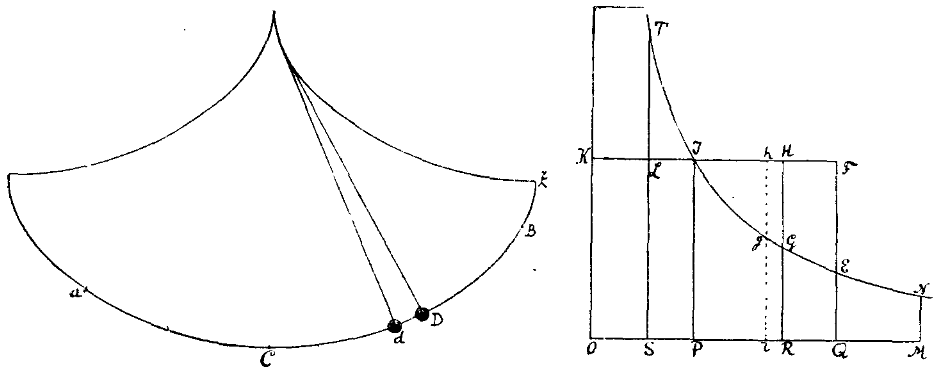
***Если колеблющийся по циклоиде маятник испытывает постоянное сопротивление, то оно так относится к силе тяжести, как разность между полною длиною дуги нисходящей части размаха и следующей за нею восходящей относится к удвоенной длине маятника.***

Пусть $BC$ представляет (фиг. 165) дугу нисходящей части размаха, $Ca$ — восходящей, $Aa$ — их разность; на основании установленного и доказанного в предложении XXV, отношение силы, ускоряющей колеблющееся тело в каком-либо его положении $D$, к силе сопротивления равно отношению длины дуги $CD$ к длине дуги $CO$, равной половине сказанной разности.

Поэтому сила, ускоряющая тело в начале циклоиды, т. е. в высшей ее точке $Z$, где эта сила равна полной силе тяжести, относится к сопротивлению, как длина дуги $ZC$ циклоиды между этой высшею и самою низшею ее точками относится к дуге $CO$ или, удваивая оба члена последнего отношения, как полная длина циклоиды, т. е. удвоенная длина маятника, к дуге $Aa$.

### Предложение XXIX. Задача VI

*Предполагая, что колеблющееся по циклоиде тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, найти величину сопротивления в каждом отдельном месте.*




Фиг. 166.

Пусть $Ba$ — полная величина размаха (фиг. 166), $C$ — нижняя точка циклоиды, $CZ$ — половина полной ее дуги, равная длине маятника; требуется определить сопротивление, испытываемое телом в каком-либо месте $D$. На неограниченной прямой $OQ$ берутся точки $O$, $S$, $P$, $Q$ так, как будет указано ниже, и восставляются перпендикуляры $OK$, $ST$, $PJ$, $QE$; на асимптотах $OQ$ и $OK$ строится гипербола $TJGE$, пересекающая перпендикуляры $ST$, $PJ$, $QE$ в точках $T$, $J$, $E$; через точку $J$ проводится прямая $KF$, параллельная асимптоте $OQ$, пересекающая асимптоту $OK$ в $K$, перпендикуляры же $ST$ и $QE$ — в $L$ и $F$. Точки $O$, $S$, $P$ и $Q$ надо взять так, чтобы отношение гиперболической площади $PJEQ$ к гиперболической площади $PJTS$ равнялось бы отношению длины дуги нисходящей части размаха $BC$ к длине дуги восходящей части $Ca$ и чтобы площадь $JEF$ относилась к площади $JLT$, как $OQ$ к $OS$. Затем перпендикуляром $MN$ отсекается гиперболическая площадь $PJNM$, так относящаяся к гиперболической площади $PJEQ$, как дуга $CZ$ к дуге $BC$. Если затем перпендикуляром $RG$ отсечь гиперболическую площадь $PJGR$, которая относится к площади $PJEQ$, как произвольно взятая дуга $CD$ относится к дуге $BC$, то сопротивление в точке $D$ будет относиться к силе тяжести, как площадь[153]

$$\left(\frac{OR}{OQ}\cdot JEF - JGH\right) : PJNM$$

---

[153] Чтобы пояснить приведенное в тексте решение, сопоставим его со следующим, в котором выкладки расположены так, чтобы они соответствовали даваемым в тексте геометрическим представлениям.

Пусть будет: $m$ — масса маятника, $l$ — длина его, равная длине $CZ$ одной полуветви циклоиды, $g$ — ускорение силы тяжести, $b = CB$ — начальное отклонение маятника, $a = Ca$ — его отклонение в конце первого размаха, $s = CD$ — отклонение в какой-либо момент $t$, $v$ — скорость в этот момент и $R = \frac{1}{2} kmv^2$ — сопротивление.

Уравнение движения маятника будет

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l} s = \pm \frac{1}{2} k \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

причем знак $+$ надо брать, когда $\frac{ds}{dt} < 0$, и знак $-$ когда $\frac{ds}{dt} > 0$.

Дуги считаются положительными от $C$ к $B$, тогда, полагая $\frac{g}{l} = n$, получим для первого полуразмаха уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} + ns = \frac{1}{2} k \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{2}$$

Но

$$\frac{ds}{dt} = v$$

так что

$$dt = \frac{1}{v} ds$$

следовательно

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{v\,dv}{ds}$$

и уравнение (2) напишется

$$\frac{v\,dv}{ds} + ns = \frac{1}{2} kv^2. \tag{3}$$

Полагая $\frac{1}{2} v^2 = u$, принимая $s$ — за переменную независимую и обозначая $\frac{du}{ds}$ через $u'$, имеем

$$u' - ku = -ns. \tag{4}$$

Откуда следует

$$u = Ce^{ks} + As + B \tag{5}$$

причем

$$A = \frac{n}{k} \qquad B = \frac{n}{k^2}.$$

Для определения постоянной произвольной $C$ имеем условие, что при $s = b$ величина $u = 0$, т. е.

$$0 = Ce^{kb} + Ab + B.$$

Таким образом будет

$$u = As + B - (Ab + B)\,e^{k(s-b)}$$

Происходящие от силы тяжести силы, которыми тело ускоряется в точках $Z$, $B$, $D$ и $a$, пропорциональны длинам дуг $CZ$, $CB$, $CD$, $Ca$, эти же длины пропорциональны площадям $PJNM$, $PJEQ$, $PJGR$, $PJTS$, поэтому можно представить и силы и дуги этими площадями. Пусть, кроме того, $Dd$ есть весьма малое пространство, пройденное телом при

---

Но сила сопротивления

$$R = \frac{1}{2} kmv^2 = kmu,$$

вес же тела

$$mg = mnl;$$

заменив $A$ и $B$ их значениями, получим

$$\frac{R}{mg} = \frac{ku}{nl} = \frac{s + \frac{1}{k} - \left(b + \frac{1}{k}\right) \cdot e^{k(s-b)}}{l} = \frac{sk + 1 - (bk + 1)\, e^{k(s-b)}}{kl}.$$

Обратимся теперь к решению Ньютона. Примем точку $O$ за начало координат, прямую $MO$ — за ось $\xi$ и прямую $OK$ — за ось $\eta$ и положим:

$$OS = c, \quad OP = p, \quad OQ = q, \quad OM = h, \quad PJ = \lambda, \quad OR = \xi, \quad RG = \eta$$

тогда уравнение гиперболы $TJGEN$ будет

$$\eta = \frac{p\lambda}{\xi}$$

и упоминаемые в доказательстве площади будут:

$$PJEQ = p\lambda \log \frac{q}{p}; \quad PJTS = p\lambda \log \frac{p}{c}; \quad PJGR = p\lambda \log \frac{\xi}{p}; \quad PJMN = p\lambda \log \frac{h}{p}$$

$$JEF = \lambda (q - p) - p\lambda \log \frac{q}{p}; \quad JLT = p\lambda \log \frac{p}{c} - \lambda (p - c)$$

$$JGH = \lambda (\xi - p) - p\lambda \log \frac{\xi}{p}.$$

Между этими площадями устанавливаются соотношения, которые выражаются следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{q}{p} : \log \frac{p}{c} &= b : a \\ \left[(q - p) - p \log \frac{q}{p}\right] : \left[p \log \frac{p}{c} - (p - c)\right] &= q : c \\ \log \frac{h}{p} : \log \frac{q}{p} &= l : b \\ \log \frac{\xi}{p} : \log \frac{q}{p} &= s : b \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Пусть будет $\log \frac{q}{p} = \mu$, тогда из последней пропорции имеем

$$\xi = p \cdot e^{\frac{\mu s}{b}} \qquad (10)$$

нисходящем движении; представим его весьма малою площадкою $RGgr$, заключенной между параллельными $RG$ и $rg$, продолжим $rg$ до $h$, тогда $GHhg$ и $RGgr$ будут одновременными уменьшениями площадей $JGH$ и $PJGR$.

Приращение площади $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$ равно $GHhg - \frac{Rr}{OQ} \cdot JEF$, т. е. $Rr \cdot HG - \frac{Rr}{OQ} \cdot JEF$, отношение его к уменьшению $RGgr$ площади $PJGQ$, т. е. к $Rr \cdot RG$, равно

$$\left(HG - \frac{JEF}{OQ}\right) : RG$$

что можно написать так:

$$\left(OR \cdot HG - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF\right) : OR \cdot GR$$

но

$$OR \cdot GR = OP \cdot PJ$$

на основании равенств

$$OR \cdot HG = OR \cdot HR - OR \cdot GR = ORHK - OPJK = PJHR =$$
$$= PJGR + JGH$$

---

и уравнения (9) примут следующий вид:

$$q = p \cdot e^{\mu}; \quad c = p \cdot e^{-\frac{\mu a}{b}}; \quad h = p \cdot e^{\frac{\mu l}{b}} \tag{11}$$

$$e^{\mu} - 1 - \mu = \left(\frac{\mu a}{b} - 1 + e^{-\frac{\mu a}{b}}\right) \cdot e^{\mu + \frac{\mu a}{b}} \tag{12}$$

и отношение силы сопротивления к силе тяжести, равное

$$\left(\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH\right) : PJNM$$

будет

$$\left[e^{\frac{\mu s}{b} - \mu} \cdot (e^{\mu} - 1 - \mu) - \left(e^{\frac{\mu s}{b}} - 1 - \frac{\mu s}{b}\right)\right] : \frac{\mu l}{b} = \left(1 + \frac{\mu s}{b} - (1 + \mu) e^{\frac{\mu s}{b} - \mu}\right) : \frac{\mu l}{b}$$

величина $\mu$ пока произвольная; стоит только взять

$$\frac{\mu}{b} = k \tag{13}$$

и мы получим, что предыдущее отношение равно

$$[1 + ks - (1 + bk) e^{k(s-b)}] : kl.$$

Соотношение (13) Ньютон не пишет, а заменяет его уравнением (12), определяющим величину $\mu$ по отношению $\frac{a}{b}$ отклонений маятника от нижней точки $C$ циклоиды.

предыдущее отношение равно

$$\left(PJGR + JGH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF\right) : OPJK,$$

поэтому, если площадь $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$ обозначить через $Y$, уменьшение же $RGgr$ площади $PJGR$ положить постоянным,[154] то приращение $Y$ будет пропорционально $PJGR - Y$.

Если обозначить через $V$ — действующую на тело в точке $D$ по касательной пропорциональную дуге $CD$ слагающую силы тяжести и через $R$ — сопротивление, то разность $V - R$ представит силу, ускоряющую тело в точке $D$; следовательно, приращение скорости пропорционально этой силе $V - R$ и тому промежуточку времени, в продолжение коего оно происходит, самая же скорость прямо пропорциональна одновременно с тем происходящему приращению пройденного пространства и обратно пропорциональна сказанному промежуточку времени. Так как, по предположению, сопротивление пропорционально квадрату скорости, то приращение сопротивления (по лем. II) пропорционально произведению скорости на приращение ее, т. е. пропорционально произведению приращений пройденного пространства на $V - R$, принимая же приращение пройденного пространства постоянным — величине $V - R$. Если написать вместо $V$ площадь $PJGR$, которой она представляется, и представить сопротивление $R$ какою-либо другою площадью $Z$, то приращение сопротивления будет пропорционально $PJGR - Z$.

Следовательно, когда площадь $PJGR$ будет равномерно убывать от отнятия постоянных бесконечно малых ее уменьшений, площадь $Y$ будет возрастать пропорционально $PJGR - Y$, и площадь $Z$ — пропорционально $PJGR - Z$, поэтому, если площади $Y$ и $Z$ вначале равны и начинаются совместно, то от приложения равных бесконечно малых приращений они будут продолжать быть равными, а также при убывании от отнятия равных бесконечно малых уменьшений они совместно уничтожаются. И обратно, если они одновременно начинаются и одновременно уничтожаются, то они будут иметь постоянно равные бесконечно малые приращения и будут все время между собою равны. Это происходит потому, что при увеличении

---

[154] Этим условием постоянства бесконечно малого приращения (или, как его Ньютон называет, уменьшения, ибо оно отрицательное) площади $PJGR$ эта площадь принимается в дифференциальном уравнении за переменную независимую; по предположению же эта площадь пропорциональна дуге $s$, значит это условие равносильно тому, что в преобразованном к виду (3) уравнении (2) дуга $s$ принимается за переменную независимую.

Это уравнение не пишется в виде формулы, а излагается далее словами.

сопротивления $Z$ как скорость, так и дуга $Ca$, на которую тело поднимается, уменьшаются, точка $a$, в которой движение прекращается, приближается к точке $C$ и сопротивление уничтожается ранее, нежели площадь $Y$. Обратное имеет место, если сопротивление $Z$ уменьшить.

Но площадь $Z$ начинается и исчезает там, где сопротивление равно нулю, т. е. при начале движения, когда дуга $CD$ равна дуге $CB$ и прямая $RG$ совпадает с прямою $QE$, и в конце движения, когда дуга $CD$ равна дуге $Ca$ и $RG$ совпадает с $ST$. Площадь $Y$ или $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$ начинается и исчезает там, где она равна нулю, т. е. там, где

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = JGH,$$

т. е. (по построению) когда прямая $RG$ поочередно совпадает с прямыми $QE$ и $ST$, поэтому сказанные площади начинаются и уничтожаются совместно и, следовательно, между собою постоянно равны. Значит, площадь

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Z$$

и так как величина $Z$ представляет сопротивление, то отношение предыдущей площади к площади $PJNM$, представляющей силу тяжести, равно отношению сопротивления к силе тяжести.

*Следствие 1.* Отношение сопротивления в низшей точке $C$ к силе тяжести равно отношению $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF$ к площади $PJNM$.

*Следствие 2.* Сопротивление наибольшее там, где площадь $PJHR$ относится к площади $JEF$, как $OR$ к $OQ$, ибо в этом случае его бесконечно малое приращение $PJGR - Y$ обращается в нуль.

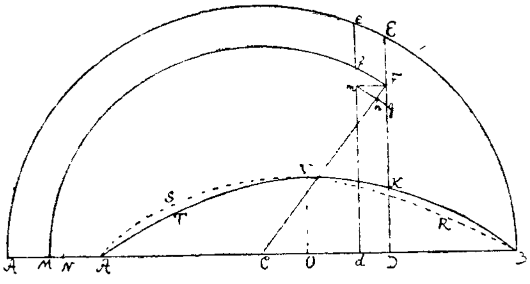
*Следствие 3.* Таким образом может быть определяема скорость в отдельных местах, ибо она пропорциональна корню квадратному из сопротивления и в самом начале движения равна скорости тела, колеблющегося по той же циклоиде без сопротивления.

Впрочем, в виду того, что вычисление для нахождения по этому предложению сопротивления и скорости трудно, добавляется следующее предложение.

### Предложение XXX. Теорема XXIV.

*Если прямая $aB$ равна длине дуги циклоиды, описываемой телом при его качаниях, и по перпендикулярам $DK$, восставленным в каждой отдельной точке $D$ этой прямой, откладывать длины, коих отношение к длине маятника равно отношению сопротивления, испытываемого* *телом в момент прохождения через соответствующую точку дуги. к силе тяжести, то я утверждаю, что разность между длиною дуги. описываемой телом на нисходящей части размаха, и длиною дуги, описываемой на следующей затем восходящей, будучи умножена на полусумму этих дуг, равна площади $BKa$, образуемой перпендикулярами $DK$.*

Пусть длина дуги циклоиды, описываемая при полном размахе, представляется (фиг. 167) равною ей длиною $aB$, длина же дуги, которая была бы описана в пустоте, — длиною $AB$. Точка $C$, середина дуги $AB$, представит низшую точку циклоиды, и длина $CD$ будет пропорциональна составляющей силы тяжести, действующей на тело в точке $D$ по направлению касательной к циклоиде, отношение этой длины к длине маятника равно отношению этой силы к силе тяжести. Поэтому эту силу



Фиг. 167.

будем представлять длиною $CD$, силу же тяжести — длиною маятника; если же откладывать по $DE$ длину $DK$, которая относится к длине маятника, как сопротивление к тяжести, то $DK$ будет представлять сопротивление. Центром $C$ и радиусом $CA$ или $CB$ описывается полукруг $BEeA$. Когда тело, двигаясь в пустоте, описывает в весьма малый промежуток времени весьма малое пространство $Dd$, то перпендикуляры $DE$ и $De$, восставленные в точках $D$ и $d$ и пересекающие полуокружность в $E$ и $e$, пропорциональны скорости, которою обладает при прохождении через точки $D$ и $d$ опускающееся из $B$ тело, качаясь в пустоте (предл. LII кн. I).

Пусть эти перпендикуляры $CE$ и $de$ и представляют сказанные скорости, и пусть $DF$ представляет скорость, которою обладает в точке $D$ тело, опускающееся из $B$ в сопротивляющейся среде. Если точкою $C$, как центром, и радиусом $CF$ описать круг $FfM$, пересекающий прямые $de$ и $AB$ в $f$ и $M$, то $M$ будет тем крайним положением, до которого тело достигло бы затем без сопротивления, и $df$ была его скорость в точке $d$. Поэтому, если $Fg$ представляет бесконечно малое приращение скорости, утрачиваемое телом вследствие сопротивления среды при описании весьма малого пути $Dd$, то, взяв $CN = Cg$, получим в $N$ место тела, до которого оно затем достигло бы без сопротивления, и $MN$ представляет утрату в дуге восхождения, происходящую вследствие сказанной утраты скорости.

На $Df$ опускается перпендикуляр $Fm$; отношение уменьшения $Fg$ скорости $DF$, производимого сопротивлением $DK$, к приращению $fm$ скорости, производимому силою $CD$, равно отношению самих сил $DK$ к $CD$. Из подобия же треугольников $Fmf$, $Fhg$, $FDC$ следует

$$fm : Fm = fm : Dd = CD : DF.$$

Но, как сказано,

$$Fg : Fm = DK : CD$$

а так как $Fm = Dd$, то из этих пропорций имеем

$$Fg : Dd = DK : DF.$$

Точно так же

$$Fh : Fg = DF : CF$$

а так как

$$Fh = MN \text{ и } CF = CM$$

то будет

$$MN \cdot CM = Dd \cdot DK$$

Следовательно, сумма всех $MN \cdot CM$ равна сумме всех $DK \cdot Dd$.

Вообрази, что через подвижную точку $M$ постоянно проводится ордината, по которой откладывается длина, равная $CM$, и которая непрерывным движением переходит от $A$ до $a$; площадь трапеции, описываемая этою ординатою, равная площади прямоугольника $\frac{1}{2}\, aB \cdot Aa$, будет равна сумме всех произведений $CM \cdot MN$, т. е. и сумме всех произведений $DK \cdot Dd$, а значит, и площади[155] кривой $BKVTa$.

---

155 Изложенное в этом предложении рассуждение равносильно следующему: обозначим через $m$ — массу маятника, $R$ — сопротивление, на него действующее, через $b$ — его начальное отклонение $CB$ и через $a$ — его отклонение $Ca$ при конце первого размаха.

Уравнение движения маятника будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{mg}{l} \cdot s = R \tag{1}$$

которое можно написать в таком виде:

$$\frac{l}{g}\frac{d^2s}{dt^2} + s = \frac{R}{mg} \cdot l. \tag{2}$$

*Следствие.* Таким образом по закону сопротивления и разности $Aa$ дуг $CB - Ca$ можно вывести приближенную величину отношения силы сопротивления к силе тяжести.

Так, если сопротивление $DK$ — постоянное, то фигура $BKTa$ будет прямоугольником, коего основание $Ba$ и высота $DK$, и так как произведение $\frac{1}{2} Ba \cdot Aa$ равно площади этого прямоугольника, т. е. $Ba \cdot DK$, то $DK$ равно $\frac{1}{2} Aa$. Так как $DK$ представляет сопротивление, когда сила тяжести представляется длиною маятника, то отношение сопротивления к тяжести равно отношению $\frac{1}{2}$ $Aa$ к длине маятника, согласно с доказанным в предложении XXVIII.

Если сопротивление пропорционально скорости, то фигура $BKTa$ весьма близка к эллипсу. Ибо, когда тело в среде без сопротивления описывает при полном размахе дугу $AB$, то его скорость в любом месте $D$ пропорциональна ординате $DE$ круга, описанного на диаметре $AB$.

Так как длины $Ba$ в среде сопротивляющейся и $BA$ в среде без сопротивления описываются приблизительно в одинаковое время, то скорость в каждой отдельной точке $Ba$ относится к скорости в соответствующей точке $BA$, как $Ba$ к $BA$, значит скорость в точке $D$ при движении в сопротивляющейся среде будет пропорциональна ординате круга или эллипса, описанного на диаметре $Ba$, следовательно фигура $BKVTa$ будет близка к эллипсу. Итак, предполагая, что сопротивление пропорционально скорости, представим длиною $OV$ сопротивление в средней точке $O$. Площадь эллипса $BRVSa$, описанного на полуосях $OB$ и $OV$ и центр коего $O$, будет приблизительно равна площади $BKVTa$ и равному ей прямоугольнику $Aa \cdot BO$. Следовательно, отношение $Aa \cdot BO$ к $OV \cdot BO$ равно отношению площади этого эллипса к $OV \cdot BO$, значит $Aa$ относится к $OV$, как площадь полукруга к квадрату радиуса, т. е. приблизительно как 11 к 7; таким образом $\frac{7}{11} Aa$ так относится к длине маятника, как

---

Умножая первый член этого уравнения на $-\frac{ds}{dt} \cdot dt$, второй и третий на $-ds$ и интегрируя в пределах от $s = b$ до $s = -a$, получим, заметив, что $\frac{ds}{dt} = 0$, как при $s = b$, так и при $s = -a$:

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \int_{-a}^{b} l \cdot \frac{R}{mg} \cdot ds. \tag{3}$$

Ньютон полагает $DK : l = R : mg$; предыдущая формула и выражает высказанную теорему.

сопротивление колеблющегося тела при прохождении через точку $O$ к силе тяжести.

Если сопротивление $DK$ будет пропорционально квадрату скорости, то фигура $BKVTa$ будет близка к параболе, вершина коей есть $V$ и ось $OV$; площадь этой фигуры будет приблизительно равна $\frac{2}{3}\ Ba \cdot OV$. Следовательно, будет

$$\frac{1}{2} Ba \cdot Aa = \frac{2}{3} Ba \cdot OV$$

т. е.

$$OV = \frac{3}{4} Aa$$

поэтому сопротивление качающегося тела при прохождении через точку $O$ относится к его тяжести, как $\frac{3}{4}\ Aa$ к длине маятника.[156]

Я считаю, что точность такого рода соображений вполне достаточна для практических приложений, ибо если эллипс или парабола $BRVSa$ совпадают с кривою $BKVTa$ в средней точке $V$ и если на одной половине $BRV$ или $VSa$ их ординаты превосходят ординаты кривой, то на другой половине будет наоборот, и таким образом площади приблизительно уравниваются.

---

[156] Эти соображения основаны на предположении, что сопротивление среды настолько мало, что можно считать скорость при движении в среде сопротивляющейся такою же, как в той же точке при движении без сопротивления.

Сохраняя обозначения предыдущего примечания, имеем при $R = 0$:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s.$$

Умножив на $-\frac{ds}{dt} \cdot dt = -ds$ и интегрируя в пределах от $s = b$ до $s = s$, получим

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{l}(b^2 - s^2).$$

Если сопротивление $R$ пропорционально $v$, то будет

$$DK = k\sqrt{b^2 - s^2}$$

т. е. кривая $BKVa$ есть эллипс.

Если сопротивление $R$ пропорционально $v^2$, то будет

$$DK = k(b^2 - s^2)$$

т. е. кривая $BKVa$ есть парабола.

### Предложение XXXI. Теорема XXV

*Если сопротивление, испытываемое качающимся телом в каждой отдельной части описываемой им дуги, будет увеличено или уменьшено в постоянном отношении, то и разность между длиною дуги нисходящей части его размаха и следующей за нею восходящей увеличится или уменьшится в том же отношении.*

Так как эта разность происходит от утраты скорости маятника вследствие сопротивления среды, то она пропорциональна как этой утрате, так и пропорциональному утрате сопротивлению. В предыдущем предложении показано, что произведение $\frac{1}{2}aB \cdot Aa$, где $Aa$ есть разность упомянутых дуг $CB - Ca$, равно площади $BKTa$, площадь же эта, если сохранять основание $aB$, увеличивается или уменьшается в том же отношении, как и ординаты $DK$, т. е. пропорционально сопротивлению, следовательно эта площадь пропорциональна длине $aB$ и сопротивлению, значит произведение $\frac{1}{2}aB \cdot Aa$ пропорционально сопротивлению и $aB$, следовательно $Aa$ пропорционально сопротивлению.

*Следствие 1.* Если сопротивление пропорционально скорости, то разность дуг в той же среде пропорциональна полной величине размаха, и наоборот.

*Следствие 2.* Если сопротивление пропорционально квадрату скорости, то разность дуг будет пропорциональна квадрату величины полного размаха, и обратно.

*Следствие 3.* Вообще, если сопротивление пропорционально кубу или какой-либо иной степени скорости, то и сказанная разность будет пропорциональна той же степени величины полного размаха, и обратно.

*Следствие 4.* Если сопротивление частью пропорционально первой степени скорости, частью второй, то разность будет также частью пропорциональна первой степени величины полного размаха, частью второй, и обратно. Вообще закон, выражающий зависимость сопротивления от скорости, таков же, как и закон зависимости разности дуг от полной величины размаха.[157]

---

[157] Как эта теорема, так и ее следствия имеют место лишь при упомянутом в предыдущем предложении допущении.

В самом деле, предполагая, что сопротивление пропорционально $n$-ой степени скорости и что оно настолько мало, что при каждом отдельном размахе можно скорость принимать

*Следствие 5.* Следовательно, когда маятник последовательно совершает неравной величины размахи, то можно найти зависимость возрастания или убывания сказанной разности вместе с величиною размаха; по этой зависимости получится затем и зависимость сопротивления от скорости.

## *ОБЩЕЕ ПОУЧЕНИЕ*

На основании этих предложений, по качаниям маятников в сопротивляющейся среде можно найти сопротивление среды.

Я, на основании этого, исследовал сопротивление воздуха при помощи следующих опытов.

Я подвесил к прочному крюку на тонкой нити деревянный шар, вес коего был $57\frac{7}{22}$ римских унций[158] и диаметр $6\frac{7}{8}$ англ. дюймов, так что

---

равной той, которую маятник имел бы в этой точке, качаясь в пустоте, на основании равенства (3) имеем

$$(b-a)\frac{b+a}{2}=k\int\limits_{-a}^{b} v^n\,ds$$

причем $k$ есть некоторая постоянная; за величину $v$ можно принять или

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{b^2-s^2}$$

или, как делает Ньютон,

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{c^2-s^2}$$

где $c=\frac{b+a}{2}$, и тогда предыдущее уравнение заменится таким:

$$c\cdot(b-a)=k_1\int\limits_{-c}^{+c}(c^2-s^2)^{\frac{n}{2}}\cdot ds=k_1\,c^n\int\limits_{-c}^{+c}\left(1-\frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}}ds$$

в котором $k_1$ есть некоторая постоянная.

Полагая $s=cz$, имеем

$$b-a=k_1\cdot c^n\int\limits_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dz=Kc^n$$

где $K$ — постоянная, а так как разность $b-a$ предполагается малой, то вместо $c$ можно написать $b$, и тогда будет

$$b-a=Kb^n.$$

Очевидно, что когда сопротивление $R$ представляется суммою членов вида

$$k_1\,v^n+k_2v^p+k_3\,v^q+\ldots,$$

то уменьшение величины размаха представляется суммою вида

$$K_1\,b^n+K_2\,b^p+K_3\,b^q+\ldots$$

[158] Римская унция есть $\frac{1}{12}$ англ. фунта troy, т. е. аптекарского, равная 480 гранам, что равно 31.1035 грамму.

расстояние между крюком и центром качания шара было $10\frac{1}{2}$ футов; на нити я отметил точку в расстоянии 10 футов 1 дюйма от центра подвеса, и против этой точки я установил линейку, разделенную на дюймы, по которой я и замечал длины дуг, описываемых маятником. [159]

Затем я сосчитывал число размахов, после которого маятник утрачивал восьмую часть величины своего размаха. Например, когда маятник отводился от отвеса на 2 дюйма и пускался так, что полная величина дуги нисходящей части размаха была равна 2 дюймам, полная же величина первого размаха составляла почти 4 дюйма, то после 164 качаний он утрачивал восьмую часть величины своего размаха, и при последнем размахе длина восходящей части составляла $1\frac{3}{4}$ дюйма. Когда при первом размахе нисходящая часть дуги составляла 4 дюйма, то он утрачивал восьмую часть после 121 размаха, причем восходящая часть последнего размаха составляла $3\frac{1}{2}$ дюйма. Когда маятник при первом размахе описывал дугу в 8, 16, 32, 64 дюйма, то он утрачивал восьмую часть размаха после 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ размахов. Следовательно, разность длин нисходящей дуги при первом размахе и восходящей при последнем составляла соответственно в первом, втором, третьем, четвертом, пятом и шестом случаях: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 дюймов. Если эти разности разделить на соответствующее каждому случаю число размахов, то при средней величине размаха, при котором проходится дуга в $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 дюймов, разность восходящей и нисходящей части составит: $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ дюйма.

Эти величины для больших размахов приблизительно пропорциональны квадратам самих размахов, для меньших — немного больше, нежели первой степени их, поэтому (см. след. 2 предл. XXXI) сопротивление шара, когда он движется быстрее, пропорционально квадрату скорости, когда же медленнее, то — немного более, нежели первой ее степени.

---

159 По моей просьбе, в Опытовом судостроительном бассейне были произведены С. В. Вахиревым опыты, подобные описанным Ньютоном, причем был взят шар указанных им веса и размеров и подвергнут качаниям на нити длиною $10\frac{1}{2}$ футов. Запись величины размахов производилась фотоэлектрическим способом с весьма большою точностью. Подробное описание этих опытов и полученных результатов помещено в конце этой книги.

Пусть $V$ означает наибольшую скорость при каком-либо размахе, и $A$, $B$, $C$ — постоянные величины; допустим, что разность восходящей и нисходящей дуги выражается так:

$$AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2.$$

Так как при движении по циклоиде наибольшие скорости пропорциональны половинам длин дуг, описываемых качающимся телом, при движении же по кругу — хордам этих половинных дуг, то при равных длинах дуг скорость для циклоиды больше, нежели для круга, в отношении этих половинных дуг к их хордам, времена же качаний по кругу больше, нежели по циклоиде, в отношении, обратном отношению скоростей; отсюда следует, что разности дуг (которые пропорциональны сопротивлению и квадрату времени) будут приблизительно одинаковы для обеих кривых, ибо эти разности для циклоиды надо, с одной стороны, увеличить вместе с сопротивлением приблизительно пропорционально квадрату отношения дуги к хорде, так как скорость увеличивается в этом отношении, с другой стороны, надо их уменьшить пропорционально квадрату времени, т. е. тоже пропорционально квадрату отношения дуги к хорде. Таким образом, если сделать приведение к циклоиде, то надо принимать разности такими же, как и наблюденные для круга, наибольшие же скорости надо полагать пропорциональными или половинным, или целым дугам размахов, т. е. числам $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Подставим поэтому для случаев второго, четвертого и шестого вместо $V$ числа 1, 4 и 16, тогда получатся следующие уравнения, выражающие разности дуг:

$$\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$$

$$\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$$

$$\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C,$$

из которых находим:

$$A = 0.0000916; \quad B = 0.0010847; \quad C = 0.0029558.$$

Следовательно, разность дуг пропорциональна

$$0.0000916\,V + 0.0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0.0029558\,V^2.$$

Так как по следствию предложения XXX, прилагаемому к этому случаю, сопротивление шара посредине описываемой при качаниях дуги, где скорость есть $V$, относится к его весу, как количество

$$\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$$

относится к длине маятника, то, если написать вместо $A$, $B$, $C$ выше найденные числа, получится, что отношение сопротивления шара к его весу равно отношению количества

$$0.0000583\,V + 0.0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0.0022169\,V^2$$

к длине нити между центром подвеса и линейкою, т. е. к 121 дюйму.

Так как $V$ во втором случае положено равным 1, в четвертом 4 и в шестом 16, то отношение сопротивления к весу шара составит во втором случае 0.0030347 к 121, в четвертом 0.041748 к 121 и в шестом 0.61705 к 121.

Дуга, описываемая отмеченною на нити точкою, в шестом случае составляла $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, т. е. $119\frac{5}{29}$ дюймов, а так как радиус составлял 121 дюйм, длина же маятника между точкою подвеса и центром шара 126 дюймов, то дуга, описываемая центром шара, составляла $124\frac{3}{31}$ дюйма. Затем наибольшая скорость колеблющегося тела, вследствие сопротивления воздуха, приходится не в визшей точке описываемой дуги, а весьма близко к середине этой дуги; эта наибольшая скорость будет приблизительно такова, как будто бы тело в среде не сопротивляющейся описало нисходящий полуразмах, равный сказанной половине дуги, т. е. $62\frac{3}{62}$ дюйма. Все это относится до движения по циклоиде, к которому приводится, как указано выше, движение маятника, поэтому эта скорость будет равна той скорости, которую тело могло бы приобрести падая с высоты, равной синусу верзусу сказанной дуги. Но этот синус верзус относится для циклоиды к дуге ее $62\frac{3}{62}$, как эта дуга к удвоенной длине маятника 252, следовательно равен 15.278 дюймам. Таким образом скорость равна той, которую тело может приобрести при свободном падении с высоты 15.278 дюймов. Следовательно, при такой скорости шар испытывает сопротивление, относящееся к его весу, как 0.61705 к 121 или же (если рассматривать лишь ту часть сопротивления, которая пропорциональна квадрату скорости) как 0.56752 к 121.

Гидростатическим испытанием я нашел, что вес этого деревянного шара относился к весу такого же объема воды, как 55 к 97, и так как 121 к 213.4 находится в том же отношении, то сопротивление водяного шара, движущегося с указанной выше скоростью, относилось бы к его весу, как 0.56752 к 213.4, т. е. как 1 к 376.02. Так как вес этого водяного шара в продолжение того времени, в течение коего шар, двигаясь с указанною скоростью, равномерно прошел бы путь в 30.556 дюймов, образовал бы при падении шара эту самую скорость, то очевидно, что продолженное и постоянное сопротивление в продолжение этого времени могло бы поглотить скорость, в 376.02 раз меньшую, т. е. $\frac{1}{376.02}$ часть полной скорости. Поэтому в продолжение того времени, в течение коего шар, двигаясь с этой скоростью, равномерно прошел бы путь, равный длине своего радиуса, т. е. $3\frac{7}{16}$ дюйма, он утратил бы $\frac{1}{3342}$ своего количества движения.

Я просчитывал также число размахов, при котором маятник утрачивал четвертую часть своего движения. В следующей таблице числа верхней строки означают длины дуг нисходящей части первых размахов в дюймах, числа средней строки — длины дуг восходящей части последнего размаха, в нижней строке показано число размахов. Я привожу этот опыт, так как он более точен, нежели когда утрачивалась восьмая часть размаха. Расчет пусть попробует произвести, кто пожелает.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начальное отклонение: | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | дюйма |
| Последнее поднятие: | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 | » |
| Число размахов: | 374 | 272 | $162\frac{1}{2}$ | $83\frac{1}{2}$ | $41\frac{2}{3}$ | $22\frac{2}{3}$ | » |

После того я подвесил на той же нити свинцовый шар, диаметром 2 дюйма и весом $26\frac{1}{4}$ римских унций, так, чтобы расстояние центра шара до точки подвеса было равно $10\frac{1}{2}$ футам, и сосчитал число размахов, при котором утрачивалась заданная часть начальной величины их. Первая из следующих двух таблиц показывает число размахов, после которого утрачивалась восьмая часть, вторая — после которого утрачивалась четвертая часть.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начальное отклонение: | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| Последнее поднятие: | $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{4}$ | $3\frac{1}{2}$ | 7 | 14 | 28 | 56 |
| Число размахов: | 226 | 228 | 193 | 140 | $90\frac{1}{2}$ | 53 | 30 |
| Начальное отклонение: | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| Последнее поднятие: | $\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| Число размахов: | 510 | 518 | 420 | 318 | 204 | 121 | 70. |

Выбрав из первой таблицы третье, пятое и седьмое наблюдения и обозначая наибольшие скорости в этих наблюдениях через 1, 4, 16 и вообще через $V$, как и раньше, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$$

$$\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$$

$$\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C.$$

Откуда следует:

$$A = 0.001414; \quad B = 0.000297; \quad C = 0.000879,$$

и значит, отношение сопротивления шара, движущегося со скоростью $V$, к его весу $26\frac{1}{4}$ унций выражается формулою

$$(0.0009\, V + 0.000208\, V^{\frac{3}{2}} + 0.000659\, V^2) : 121.$$

Если же будем рассматривать лишь часть сопротивления, пропорциональную квадрату скорости, то ее отношение к весу шара будет

$$0.000659\, V^2 : 121.$$

Но в первых опытах эта часть сопротивления для деревянного шара относилась к его весу $57\frac{7}{22}$ унций, как

$$0.002217\, V^2 : 121.$$

Поэтому сопротивление деревянного шара относится при одинаковых скоростях к сопротивлению свинцового, как

$$\frac{57\frac{7}{22} \cdot 0.002217}{26\frac{1}{4} \cdot 0.000659} = 7\frac{1}{3} : 1.$$

Диаметры этих шаров были $6\frac{7}{8}$ и 2 дюйма; отношение квадратов этих диаметров равно $47\frac{1}{4} : 4$ или приблизительно $11\frac{13}{16} : 1$. Следовательно, сопротивление шаров, движущихся с одинаковою скоростью, было в меньшем отношении, нежели квадраты диаметров. Но при этом не принято в соображение сопротивление нити, которое наверное было весьма значительно и которое следовало отнять из полного сопротивления. Я не мог его определить в точности, однако я его нашел бо́льшим, нежели третья часть сопротивления малого маятника, и отсюда вывел, что за вычетом сопротивления нити сопротивление шаров приблизительно пропорционально квадратам диаметров их, ибо отношение $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ к $1 - \frac{1}{3}$, равное $10\frac{1}{2} : 1$, немного отличается от отношения квадратов диаметров $11\frac{13}{16} : 1$.

Так как сопротивление нити для больших шаров имеет меньшее значение, то я попробовал произвести такой же опыт с шаром, диаметр которого был $18\frac{3}{4}$ дюймов. Длина маятника между точкою подвеса и центром качаний была 122.5 дюйма, между точкою подвеса и меткою на нити 109.5 дюймов. Дуга, описываемая меткою при первом размахе вниз, 32 дюйма. Дуга подъема после пяти качаний, описываемая тою же меткою, 28 дюймов. Сумма дуг, или величина полного среднего размаха, 60 дюймов. Разность дуг 4 дюйма.

Десятая ее часть, т. е. разность между длиною нисходящей и восходящей части при среднем размахе, составляет 0.4 дюйма. Дуга, описываемая центром шара при среднем размахе, будет

$$60 \cdot \frac{122.5}{109.5} = 67\frac{1}{8} \text{ дюймов,}$$

разность длин восходящей и нисходящей ее части

$$0.4 \cdot \frac{122.5}{109.5} = 0.4475 \text{ дюйма.}$$

Если бы увеличить длину маятника в отношении 126 к 122.5, сохраняя длину дуги размаха, то время размаха увеличилось бы, скорость же маятника уменьшилась бы в отношении корней квадратных из этих чисел, разность же дуг осталась бы без перемены 0.4475 дюйма. Затем, если дугу размаха увеличить в отношении $124\frac{3}{31}$ к $67\frac{1}{8}$, то эта разность 0.4475 увеличится в отношении квадратов этих чисел и станет 1.5295.

Все это имело бы место, предполагая, что сопротивление пропорционально квадрату скорости. Следовательно, если бы маятник описывал полные размахи по $124\frac{3}{31}$ дюйма и длина его между точкою подвеса и центром качаний составляла бы 126 дюймов, то разность нисходящей и следующей за нею восходящей части размаха составляла бы 1.5295 дюйма. Эта разность, будучи помножена на вес маятника, составлявший 208 унций, дает 318.136. Для первого же маятника с деревянным шаром, описывавшим при своем качании полную дугу в $124\frac{3}{31}$ дюйма, причем расстояние точки его подвеса до центра качаний было 126 дюймов, разность дуг составляла $\frac{8}{9\frac{2}{3}} \cdot \frac{126}{121}$, что. будучи умножено на вес шара $57\frac{7}{22}$ унций, дает произведение 49.396. Я умножал вышеуказанные разности на веса маятников, чтобы получить их сопротивления, ибо эти разности происходят от сопротивления и прямо ему пропорциональны, весу же они обратно пропорциональны. Следовательно, сопротивления относятся, как числа 318,136 : 49.396.

Но для меньшего шара часть сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, относилась к полному сопротивлению, как 0.56752 к 0.61675 и, значит, при полном сопротивлении 49.396 составляла 45.453; для большего же шара это сопротивление было почти равно полному его сопротивлению; таким образом отношение этих частей сопротивления равно 318.136 к 45.453, т. е 7 к 1. Но диаметры шаров были $18\frac{3}{4}$ и $6\frac{7}{8}$ дюймов, отношение их квадратов $351\frac{9}{16}$ и $47\frac{17}{64}$ приблизительно равно 7.438 к 1, т. е. близко к отношению сопротивлений 7 : 1. Разница этих отношений едва ли больше той, которая могла произойти от сопротивления нити. Следовательно, те части сопротивления, которые для того же шара пропорциональны квадрату скорости, при равных скоростях пропорциональны квадратам диаметров шаров.

Впрочем, больший из шаров, которыми я для этих опытов пользовался, не был вполне правилен, и поэтому я в вышеизложенном вычислении для краткости пренебрег разными мелочами, мало озабочиваясь точностью вычисления для недостаточно точного опыта. Но я бы желал — ибо от этого зависит доказательство существования пустоты, — чтобы эти опыты были бы повторены с шарами бóльших размеров и в большем числе и более правильными. Если взять шары в геометрической прогрессии, напр. коих диаметры были бы 4, 8, 16, 32 дюйма, то по прогрессии результатов опытов можно будет заключить, что должно иметь место для шаров еще большего размера.

Для сравнения сопротивления различных жидкостей, я произвел следующие испытания. Я изготовил деревянный ящик, длиною 4 фута, шириною и высотою по 1 футу; оставляя его сверху открытым, я наполнил его ключевой водой и заставлял маятники качаться внутри воды.

Свинцовый шар, диаметром $3\frac{5}{8}$ дюйма, весивший $166\frac{1}{6}$ унций, колебался, как показано в следующей таблице, причем длина нити от точки подвеса до метки на ней была 126 дюймов, расстояние до центра качаний $134\frac{3}{8}$ дюйма.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начальное отклонение метки на нити: | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | дюйма |
| Последнее поднятие: | 48 | 24 | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | » |
| Разность дуг, пропорциональная потерянному количеству движения: | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | » |
| Число качаний в воде: | — | — | $\frac{29}{60}$ | 1.2 | 3 | 7 | $11\frac{1}{4}$ | $12\frac{2}{3}$ | $13\frac{1}{3}$ | » |
| Число качаний в воздухе: | 85.5 | — | 287 | 535 | | | | | | |

При четвертом испытании утрачивалось одинаковое количество движения после 535 размахов в воздухе и 1.2 размаха в воде, но качания в воздухе были немного быстрее, нежели в воде. Если бы качания в воде ускорить в таком отношении, что движение маятников в обеих жидкостях стало бы одинаково быстрым, то число 1.2 качания в воде, при котором утрачивается то же количество движения, сохранится без изменения, ибо сопротивление возросло бы, а квадрат времени уменьшился бы в одинаковом отношении, равном квадрату вышеупомянутого.

Следовательно, при равных скоростях равные количества движения утрачиваются: в воздухе при 535 качаниях, в воде при 1.2, значит сопротивление маятника в воде относится к его сопротивлению в воздухе, как 535 к 1.2. Таково отношение полных сопротивлений для случая четвертого столбца.

Обозначим через $AV + CV^2$ — разность длин дуг нисходящей и следующей за ней восходящей части размаха, описываемых шаром, коего наибольшая скорость $V$; так как наибольшая скорость в случае четвертого столбца относится к наибольшей скорости случая столбца первого, как 1 к 8, отношение же соответствующих разностей дуг равно отношению чисел $\frac{2}{535}$ к $\frac{16}{85.5}$ или 85.5 к 4280, то положим в этих случаях скорости равными 85.5 и 4280, примем числа 1 и 8 за разности дуг, тогда получатся уравнения:

$$85.5 = A + C$$

$$4280 = 8A + 64C.$$

Откуда следует

$$C = 64\frac{3}{14} \qquad\qquad A = 21\frac{2}{7}$$

а так как сопротивление пропорционально

$$\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$$

то оно будет выражаться формулою

$$13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2.$$

Поэтому для случая четвертого столбца, где скорость $V = 1$, полное сопротивление относится к своей части пропорциональной квадрату скорости, как

$$\left(13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}\right) : 48\frac{9}{56}$$

т. е. как

$$61\frac{12}{17} : 48\frac{9}{56}.$$

Отсюда следует, что сопротивление маятника в воде относится к той части его сопротивления в воздухе, которая пропорциональна квадрату скорости и которую только и надо рассматривать при более быстрых движениях, как

$$61\frac{12}{17} \cdot 535 \text{ к } 1\frac{1}{5} \cdot 48\frac{9}{56}$$

т. е. как 571 к 1.

Если бы у маятника, качающегося в воде, была бы погружена и вся нить, то его сопротивление стало бы больше, так что та часть сопротивления маятника в воде, которая пропорциональна квадрату скорости и которую только и надо рассматривать при быстром движении тел, относилась бы к таковой же части полного сопротивления того же маятника, качающегося в воздухе, приблизительно как 850 к 1, т. е. как плотность воды к плотности воздуха.

В предыдущем расчете следовало принять лишь ту часть сопротивления маятника в воде, которая пропорциональна квадрату скорости, но (что весьма замечательно) сопротивление в воде возрастает в пропорции большей, нежели квадрат скорости. Исследуя это обстоятельство, я напал на мысль, что ящик был слишком узок для шара взятого размера и через это препятствовал движению уступающей шару воды; и действительно, когда был погружен качающийся шар, диаметром в 1 дюйм, то сопротивление оказалось весьма близким к квадрату скорости. Этот опыт я произвел, сделав маятник с двумя шарами, из коих нижний и меньший качался в воде, верхний же больший был укреплен на нити близ поверхности воды и, двигаясь в воздухе, поддерживал качания маятника более продолжительное время.

Результаты произведенных таким образом опытов даны в следующей таблице:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начальное отклонение: | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| Последнее поднятие: | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| Разность этих дуг, пропорциональная утраченному количеству движения: | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| Число качаний: | $3\frac{3}{8}$ | $6\frac{1}{2}$ | $12\frac{1}{12}$ | $21\frac{1}{5}$ | 34 | 53 | $62\frac{1}{5}$. |

Для сравнения сопротивлений различных средин, я заставил железные маятники качаться во ртути. Длина железной проволоки была около 3 футов, диаметр шара около одной трети дюйма, причем к проволоке, близко над поверхностью ртути, был прикреплен свинцовый шар достаточной величины, чтобы дольше поддерживать движение маятника. Затем я заполнял сосуд, содержавший около 3 фунтов ртути, последовательно ртутью и простою водою, чтобы, наблюдая поочередно качания маятников в обеих жидкостях, определить отношение сопротивлений: оказалось, что сопротивление ртути приблизительно в 14 или в 13 раз больше сопротивления воды, т. е. во столько же раз, во сколько ее плотность больше плотности воды. Когда я брал для маятника шары большего диаметра, т. е. около $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{3}$ дюйма, то сопротивление ртути оказывалось к сопротивлению воды приблизительно в отношении 12 или 10 к 1. Но первое испытание заслуживает большего доверия, ибо при последних сосуд был немного узковат для погруженных шаров, — при увеличении шаров надо было увеличивать и размеры сосуда. Я намеревался повторить подобные этому опыты в сосудах большей величины с расплавленными металлами и с различными жидкостями как горячими, так и холодными, но я не имел времени, чтобы все это испытать.

Из описанного же с достаточною ясностью следует, что сопротивление быстро движущихся тел приблизительно пропорционально плотности той жидкости, в которой тела движутся. Я не говорю, что в точности пропорциональны, ибо жидкости более вязкие при одинаковой плотности несомненно оказывают большее сопротивление, нежели жидкости более текучие, так, напр., холодное масло по сравнению с горячим, горячее — большее, нежели дождевая вода, вода — большее, нежели винный спирт. Несомненно, однако, что изложенное правило имеет место с достаточною точностью для жидкостей, которые и на взгляд представляются достаточно разреженными или текучими, как, напр.: воздух, пресная и соленая вода, спирты винный, скипидарный, соляной (соляная кислота), масло, получаемое при перегонке винных дрожжей (сивушное), когда оно подогрето, масло купоросное (серная кислота), ртуть, расплавленные металлы и тому подобные тела, которые настолько текучи, что после взбалтывания в сосуде долго сохраняют сообщенное движение, при выливании же свободно распадаются на капли; в особенности это так, когда опыты производятся над маятниками большими и быстро движущимися.

Есть мнение, что существует некоторая чрезвычайно тонкая эфирная среда, свободно проникающая через поры и промежутки между частицами всяких тел; от такой среды, при течении ее через поры тел, должно было бы происходить сопротивление, поэтому я произвел испытания, чтобы определить, сосредоточено ли полностью сопротивление, испытываемое телами при движении, на их наружной поверхности, или же и внутренние части тел претерпевают заметное сопротивление. Опыт, который я придумал, состоял в следующем: к достаточно прочно укрепленному стальному крюку, при помощи стального кольца, я подвесил на нити, длиною в 11 футов, круглую еловую кадочку, чтобы получить маятник сказанной длины. Крюк сверху был на своей впалой поверхности хорошо заострен, так чтобы кольцо, налегая верхнею своею частью на это острое ребро, могло двигаться совершенно свободно, к нижней же части кольца была привязана нить. Я отклонял маятник, таким образом устроенный, приблизительно на 6 футов от отвеса в плоскости, перпендикулярной к заостренному ребру крюка, чтобы кольцо при качаниях маятника не скользило взад и вперед, ибо точка подвеса, в которой кольцо касается крюка, должна оставаться неподвижной. Я точно замечал начальное отклонение, сообщаемое мною маятнику, затем, пустив маятник, я замечал еще три других его отклонения, которые маятник имел после первого, второго и третьего размаха. Я повторял это многократно, чтобы определить эти отклонения как можно точнее. Затем я наполнял кадочку свинцом и более тяжелыми из имевшихся под рукою металлами; перед тем я взвесил порожнюю кадочку вместе с тою частью нити, которою она была обмотана, и половиною остальной части, заключенной между крюком и подвешенной кадочкою, ибо нить, когда маятник отклонен от прямого положения, действует на него половиною своего веса. К этому весу я придал вес воздуха, заполнявшего кадочку. Полный вес порожней кадочки составлял приблизительно $\frac{1}{78}$ веса кадочки, заполненной металлами. Так как кадочка, наполненная металлом, растягивая нить, увеличивала ее длину, то я укорачивал нить настолько, чтобы при качаниях маятника длина ее была такою же, как и раньше. Отведя затем маятник до первого из замеченных, как сказано выше, отклонений, я его пускал и насчитывал около 77 качаний, пока маятник имел отклонение, равное второму, затем еще столько, пока оно становилось равным третьему, и наконец, еще столько же, когда оно становилось равным четвертому. Отсюда я заключаю, что все сопротивление заполненной кадочки имеет не большее отношение к сопротивлению порожней, как 78 к 77. Ибо, если бы оба сопротивления были равны, то заполненная кадочка масса которой в 78 раз более массы порожней кадочки, должна была бы сохранять и во столько же раз дольше свое колебательное движение и, следовательно, по совершении 78 размахов приходить в замеченные, как сказано выше, положения. Она же приходила в них через 77 размахов.[160]

---

[160] В тексте сказано: «ob vim suam insitam septuagesies et octies majorem vi insitae pyxidis vacuae»..., т. е. «так как содержащаяся (врожденная) сила ее в 78 раз больше врожденной силы порожней кадочки»..., но так как термином «vis insita» теперь не пользуются, то я придержался смысла, а не буквы текста.

Обозначим через $A$ — сопротивление, действующее на наружную поверхность кадочки, и через $B$ — сопротивление на внутренние частицы порожней кадочки; если принять, что при одинаковых скоростях сопротивление, действующее на внутренние частицы тел, пропорционально количеству материи, т. е. числу испытывающих сопротивление частиц, то сопротивление на внутренние частицы заполненной кадочки будет $78B$, следовательно полное сопротивление $A+B$ порожней кадочки будет относиться к полному сопротивлению $A+78B$ заполненной, как 77 к 78. Откуда следует

$$(A+B):77B=77:1$$

или

$$A+B:B=77\cdot 77:1,$$

откуда

$$A:B=5928:1.$$

Следовательно, сопротивление на внутренние частицы порожней кадочки в 5 с лишком тысяч раз меньше, нежели сопротивление на ее наружную поверхность. Правда, при этом рассуждении мы исходили из предположения, что большее сопротивление заполненной кадочки происходит не от каких-либо иных причин, как от действия некоторой тончайшей жидкости на заключенные в ней металлы.

Я изложил этот опыт на память, так как бумага, на которой я его записал, пропала, поэтому я был вынужден опустить некоторые дроби, исчезнувшие из памяти.

Произвести же вновь все испытания я не имел времени. При этих опытах я воспользовался сперва недостаточно прочным крюком, тогда заполненная кадочка замедлялась значительнее; изыскивая причину, я заметил, что крюк, поддаваясь весу заполненной кадочки, следовал ее качаниями и гнулся взад и вперед; я изготовил затем более прочный крюк, чтобы точка подвеса оставалась неподвижной, после чего все шло, как описано выше.

## ОТДЕЛ VII

# О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ И СОПРОТИВЛЕНИИ БРОШЕННЫХ ТЕЛ

### Предложение XXXII. Теорема XXVI

*Пусть две материальные системы подобны между собою и состоят из одинакового числа подобным образом расположенных частиц, причем каждая частица одной системы подобна и масса ее пропорциональна массе частицы ей соответствующей другой системы и плотности частиц находятся в постоянном отношении; пусть эти частицы, по прошествии пропорциональных промежутков времени, начинают двигаться подобным образом (принадлежащие одной системе друг по отношению к другу и принадлежащие другой также друг относительно друга); если при этом частицы той же системы не касаются друг друга, за исключением моментов соударений, взаимно не притягиваются и не отталкиваются ни с какими силами, за исключением ускорительных сил, обратно пропорциональных линейным размерениям соответствующих частиц и прямо пропорциональных квадратам их скоростей, то я утверждаю, что частицы каждой из этих систем будут продолжать находиться в конце пропорциональных промежутков времени в подобном друг относительно друга движении.*

Я называю движения подобных и, по прошествии пропорциональных промежутков времени, подобным образом расположенных тел подобными, когда в конце любых таковых промежутков времени относительное расположение этих тел подобно, предполагая, что частицы одной системы сопоставляются с соответствующими частицами другой. Поэтому промежутки времени, в продолжение которых соответствующие частицы описывают подобные и пропорциональные части подобных фигур, пропорциональны. Следовательно, если имеются две системы такого рода, то соответствующие частицы, вследствие подобия начальных движений, будут продолжать двигаться подобным образом, пока не встретятся, ибо, если на эти частицы никакие силы не действуют, то по закону I они будут двигаться равномерно и прямолинейно; если же они действуют друг на друга с какими-либо ускорительными силами, обратно пропорциональными линейным размерениям соответствующих частиц и прямо пропорциональными квадратам скоростей, то, в виду подобия расположения частиц и пропорциональности этих сил, полные ускорительные силы, действующие на частицы, слагающиеся, по следствию II законов, из частных, будут направлены сходственным образом, т. е. как будто бы к сходственно между частицами расположенным центрам; эти полные силы будут относиться между собою, как и их составляющие, т. е. будут обратно пропорциональны линейным размерам соответствующих частиц и прямо пропорциональны квадратам их скоростей; поэтому, вследствие действия таких сил, соответствующие частицы будут продолжать описывать подобные фигуры. Это будет происходить таким образом (по след. 1 и 8 предл. IV кн. I) не только когда эти кажущиеся центры будут находиться в покое, но и тогда, когда эти центры будут двигаться; расположение их относительно частиц, в виду подобия перемещений, остается сходственным, значит и производимые изменения в фигурах, описываемых частицами, будут подобны.

Следовательно, движения соответствующих и сходственных частиц будут оставаться подобными до первой их встречи друг с другом, а так как эта встреча и удар будут подобны, то будет подобно и отражение, и значит (по вышепоказанному) вновь будет подобное относительное движение частиц, пока снова не произойдет удар, и так будет продолжаться до бесконечности.

*Следствие 1.* Таким образом, если два каких-либо подобных между собою тела, расположенных сходственным образом по отношению к соответствующим частицам, начнут по прошествии пропорциональных промежутков времени двигаться подобным образом и если их величины и плотности находятся в том же отношении, как величины и плотности соответствующих частиц, то в конце пропорциональных промежутков времени эти тела будут продолжать двигаться подобным образом. Ибо все, относящееся до частиц обеих систем, в равной мере относится и до больших частей их.

*Следствие 2.* Если все подобные и подобным образом расположенные части систем находятся в относительном покое и две из этих частей, которые больше прочих и в обеих системах соответствуют друг другу, начнут двигаться подобным образом по линиям, сходственным образом расположенным, то они произведут в прочих частях системы подобные движения, и в конце пропорциональных промежутков времени будут продолжать двигаться между ними подобным образом, описывая при этом пространства, пропорциональные своим линейным размерениям.

**Предложение XXXIII. Теорема XXVII**

*При тех же предположениях я утверждаю, что бо́льшие части систем будут испытывать сопротивления, пропорциональные: квадратам их скоростей, квадратам линейных размерений и плотностям частей систем.*

Сопротивление происходит частию от центробежных и центростремительных сил взаимодействия между частицами, частию от ударов частиц о бо́льшие части систем и отражений от них.

Сопротивления первого рода относятся между собою, как полные движущие силы, от коих они происходят, т. е. так произведения полных ускорительных сил на массы соответствующих частей; по предположению это одинаково с прямою пропорциональностью квадратам скоростей и массам соответствующих частей и обратною пропорциональностью расстояниям между соответствующими частицами; но расстояния между частицами одной системы относятся к расстояниям между частицами другой, как диаметры этих частиц или как размеры частей одной системы к размерам соответствующих частей другой, массы же пропорциональны плотностям этих частей и кубам их размеров, следовательно сопротивления будут пропорциональны квадратам скоростей, квадратам сходственных размерений и плотностям частей систем.

Сопротивления второго рода пропорциональны числу и силе соответствующих ударов и отражений. Числа отражений прямо пропорциональны скоростям соответствующих частиц и обратно пропорциональны расстояниям между местами их встреч. Силы же отражений пропорциональны скоростям, объемам и плотностям соответствующих частей, т. е. скоростям, кубам размерений и плотностям частей. По перемножении всех этих отношений окажется, что сопротивления, испытываемые соответствующими частями систем, относятся между собою, как произведения квадратов скоростей на квадраты линейных размерений и на плотности частей.

*Следствие 1.* Поэтому, если обе эти системы представляют две упругих жидкости вроде воздуха и частицы их находятся в относительном покое для каждой системы, два же подобных тела, по величине и плотности пропорциональных частицам жидкости и расположенных сходственным образом между этими частицами ее, будут брошены как бы то ни было по линиям, также сходственно расположенным, то, так как ускорительные силы взаимодействий между частицами обратно пропорциональны диаметрам брошенных тел и прямо пропорциональны квадратам их скоростей, тела эти в пропорциональные промежутки времени будут возбуждать подобные движения в жидкости и будут описывать подобные пространства, относящиеся между собою, как линейные размерения этих тел.

*Следствие 2.* Отсюда следует, что быстро движущееся тело испытывает в той же самой жидкости сопротивление, приблизительно пропорциональное квадрату скорости. Ибо, если бы силы, с которыми находящиеся на расстоянии частицы действуют друг на друга, увеличивались бы, как квадраты скоростей, то сопротивление было бы также в точности пропорционально квадрату скорости; таким образом в среде, частицы которой, находящиеся в некотором расстоянии друг от друга, совсем не оказывают взаимодействий, сопротивление в точности пропорционально квадрату скорости. Пусть имеется три среды $A$, $B$, $C$, состоящие из равных и подобных частиц, правильно расположенных на равных друг от друга расстояниях. Частицы сред $A$ и $B$ взаимно отталкиваются с силами, относящимися между собою, как $T$ к $V$, частицы же среды $C$ таковыми силами совершенно не обладают. Если в этих средах будут двигаться четыре равных тела $D$, $E$, $F$, $G$: первые два соответственно — в средах $A$ и $B$, последние два — в среде $C$, причем отношение скорости тела $D$ к скорости тела $E$ и отношение скорости тела $F$ к скорости тела $G$ равно $\sqrt{\frac{T}{V}}$, тогда сопротивление тела $D$ будет относиться к сопротивлению тела $E$ и сопротивление тела $F$ — к сопротивлению тела $G$, как квадраты их скоростей, поэтому и отношение сопротивления тела $D$ к сопротивлению тела $F$ будет равно отношению сопротивления тела $E$ к сопротивлению тела $G$. Положим теперь, что скорости тел $D$ и $F$ равны также и скорости тел $E$ и $G$; увеличивая скорости тел $D$ и $F$ в любом отношении и уменьшая силы взаимодействия частиц среды $B$ в таком же отношении, но возвышенном в квадрат, можно приблизить сколь угодно среду $B$ к виду и условиям среды $C$, значит и сопротивления равных и обладающих равными скоростями тел $E$ и $G$ в этих средах будут приближаться к равенству так, что разность между этими сопротивлениями может быть сделана меньше любой заданной величины. Так как сопротивления $D$ и $F$ относятся между собою, как сопротивления тел $E$ и $G$, то они приблизятся также к равенству. Таким образом, когда тела $D$ и $F$ движутся весьма быстро, то сопротивления их весьма близки к равенству, и так как сопротивление тела $F$ пропорционально квадрату скорости, то и сопротивление тела $D$ будет приблизительно следовать тому же закону.

*Следствие 3.* Сопротивление тела, движущегося весьма быстро во всякой упругой жидкости, почти такое же, как если бы частицы жидкости были лишены отталкивательных сил; в упругих жидкостях сила упругости происходит от отталкивательных сил частиц, и надо, чтобы скорость была настолько велика, чтобы эти силы не имели достаточно времени, чтобы проявить свое действие.

*Следствие 4.* Так как сопротивление тел подобных и обладающих одинаковыми скоростями в среде, частицы которой взаимно не отталкиваются, пропорционально квадратам линейных размерений, то и сопротивления тел, движущихся с равными весьма большими скоростями в упругой жидкости, будут приблизительно пропорциональны квадратам этих размерений.

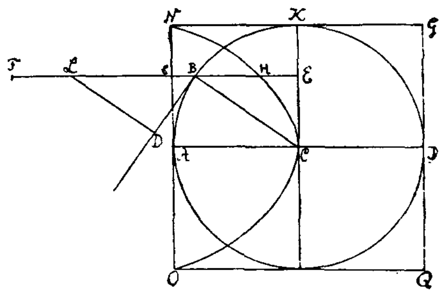
*Следствие 5.* В срединах той же самой плотности, частицы которых взаимно не отталкиваются, но могут быть как большими и в небольшом числе, так и малыми и многочисленными, тела подобные, равные и движущиеся с одинаковыми скоростями в равные времена встречают одинаковое количество материи и сообщают ему то же самое количество движения и, следовательно (по зак. III), испытывают и равное противодействие, т. е. претерпевают одинаковое сопротивление; поэтому очевидно, что при весьма быстром движении в упругих жидкостях той же самой плотности, сопротивления приблизительно равны, независимо от того, состоят ли эти жидкости из более грубых частиц, или же из самых мельчайших. От большей тонкости жидкости сопротивления снарядов, движущихся весьма быстро, не уменьшились бы значительно.

*Следствие 6.* Все изложенное выше имеет место в таких упругих жидкостях, коих сила упругости происходит от отталкивательных сил между частицами. Если же эта сила происходит от чего-либо иного, как, напр., от расположения частиц наподобие шерсти или ветвей дерева, или от всякой иной причины, по которой относительные движения становятся менее свободными, то сопротивление, вследствие меньшей текучести жидкости, станет больше, нежели в предыдущих случаях.

### Предложение XXXIV. Теорема XXVIII

*Если шар и цилиндр, описанные на равных диаметрах, движутся с одинаковой скоростью по направлению оси цилиндра в редкой среде, состоящей из равных частиц, свободно расположенных в равных друг от друга расстояниях, то сопротивление шара вдвое меньше сопротивления цилиндра.*

Так как действие среды на тело то же самое (по след. V законов), движется ли тело в покоящейся среде, или же частицы среды ударяют с тою же скоростью на покоящееся тело, то будем рассматривать, что тело в покое, и посмотрим, какой напор будет на него действовать от движущейся среды. Пусть $ABKJ$ (фиг. 168) представляет шар, описанный из центра $C$ радиусом $CA$, и частицы среды ударяют его с постоянною скоростью по прямым линиям, направленным параллельно прямой $AC$; пусть $FB$ есть одна из этих прямых линий. Отложим по $FB$ длину $LB$, равную радиусу $CB$, и проведем касательную $BD$ к шару в точке $B$; на $KC$ и $BD$ опустим перпендикуляры $BE$ и $LD$; сила, с которою частица среды, падая наклонно по прямой $FB$, ударяет шар в точке $B$, относится к той силе, с которою та же частица ударила бы цилиндр в точке $b$, как $LD$ к $LB$ или как $BE$ к $BC$.



Фиг. 168.

Затем на движение шара по направлению линии падения $FB$ или $AC$ действительною оказывается от полной силы удара, направленной по $BC$, лишь слагающая по направлению $FB$, относящаяся к этой полной силе, как $BE$ к $BC$. Из перемножения этих отношений следует, что действующая по направлению $FB$ слагающая силы удара частицы на шар относится к действующей по этому же направлению слагающей силы удара частицы на цилиндр, как $BE^2$ относится к $BC^2$. Поэтому, если по перпендикуляру $bE$ к основанию $NAO$ цилиндра отложить длину $bH$ так, чтобы было $bH : BE = BE : CB$, то отношение $bH$ к $bE$ будет равно отношению вышеупомянутых действий силы удара на шар и на цилиндр, следовательно объем, занятый всеми прямыми $bH$, находится к объему, занятому прямыми $bE$, в том же отношении, как действие всех частиц на шар к действию их на цилиндр.[161]

[161] В этом предложении, как видно, попутно устанавливается закон пропорциональности сопротивления, испытываемого элементом поверхности, квадрату синуса угла встречи.

Ньютон рассматривает здесь жидкость как бы состоящей из отдельных независимых частиц, движущихся навстречу телу с одною и тою же скоростью как по величине, так и по направлению. Обозначим эту скорость через $V$, она представлена на чертеже длиною $BF$. Нормаль к элементу поверхности шара в точке $B$ направлена к радиусу $BC$; угол $FBD = \alpha$ между направлением скорости и ее проекции на касательную плоскость, называется углом встречи.

Но первый объем есть параболоид, коего вершины $C$, ось $CA$ и параметр $CA$, второй же объем есть цилиндр, около этого параболоида описанный; известно, что объем параболоида равен половине объема описанного цилиндра. Следовательно, полная сила действия среды на шар равна половине таковой же силы на цилиндр; поэтому, если бы частицы среды находились в покое, цилиндр же и шар двигались с одинаковою скоростью, сопротивление шара было бы вдвое меньше сопротивления цилиндра.

### *ПОУЧЕНИЕ*

По этому способу можно сравнивать сопротивление и других фигур между собою, а также находить те, которые наиболее приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде. Так, если на круговом основании $CEBH$ (фиг. 169), описанном из центра $O$ радиусом $OC$, требуется построить такой усеченный конус $CBFG$ с высотою $OD$, коего сопротивление было бы меньше сопротивления всякого другого усеченного конуса, построенного на том же основании и высоте и движущегося по оси $OD$ в сторону $D$, то, разделив высоту $OD$ в точке $Q$ пополам, продолжи $OQ$ до $S$ так, чтобы было

$$QS = QC$$

$S$ и будет вершиною искомого конуса, который усекается.[162]

---

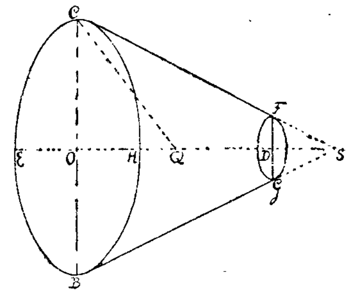
Под словами «сила удара», «сила действия частицы по направлению $BE$» и т. п. надо разуметь количество движения, сообщаемое частицею ударяемому телу, и его проекцию на указанное направление; эти количества движения пропорциональны полному количеству движения частицы и его проекции на соответствующее направление.

Таким образом проекция количества движения частицы, масса которой $m$, на направление нормали $BC$ будет $mV\sin\alpha$, и количество движения, сообщенное телу ударом, будет направлено по $BC$ и пропорционально $mV\sin\alpha$, так что его можно обозначить через $kmV\sin\alpha$, где $k$ — некоторая постоянная, проекция этого количества движения на направление $CA$ будет $kmV\cdot\sin^2\alpha$, но $\sin^2\alpha = BE^2 : CB^2$. Этой же проекции количества движения пропорциональна и составляющая силы сопротивления, испытываемого телом по направлению $AC$, происходящая от рассматриваемого элемента поверхности, подвергнувшегося удару.

Вычисление отношения сопротивления шара к сопротивлению описанного около него цилиндра, коего производящие параллельны направлению движения, заключает еще неявно предположение, что число ударяющих частиц пропорционально величине элемента поверхности или его проекции на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, ибо лишь при этом предположении сопротивления шара и цилиндра представляются указанными объемами параболоида и цилиндра с таким же основанием и высотою; это предположение и оговорено в условии теоремы, что частицы распределены равномерно.

[162] Обозначим $OD$ через $2a$, $OC$ через $r$, $OS$ через $x$ и через $k$ — постоянный множитель. Сопротивление, испытываемое усеченным конусом при движении по направлению своей оси, слагается из сопротивления на малое основание, пропорциональное площади этого основания, и проекции на ось сопротивления, действующего на боковую поверхность; на каждый элемент

Здесь же заметим мимоходом, что угол $CSB$ (фиг. 170) всегда острый, поэтому, если тело $ADBE$ образуется обращением эллипса или овала $ADBE$ около оси $AB$, и к производящей кривой проводятся касательные $FG$, $GH$, $HI$ в точках $F$, $B$ и $I$ так, что $GH$ перпендикулярно к оси $AB$ в точке касания $B$, другие же касательные $FG$ и $HI$ составляют с $GH$ углы $FGB$ и $IHB$, равные $135°$, то тело, образуемое обращением фигуры $ADFGHIE$ около той же оси $AB$, будет испытывать меньшее сопротивление, нежели первоначальное при движении вдоль своей оси точкою $B$ вперед. Я считаю, что это предложение может быть не бесполезно при построении судов.[163]



Фиг. 169.

---

этой поверхности действует нормальное сопротивление, пропорциональное величине этого элемента и квадрату синуса угла встречи, равного $CSO$; таким образом сумма проекции всех этих элементарных сопротивлений на ось получится, если умножить на $\sin^2 CSO$ сопротивление, которое действовало бы на кольцевую площадь, равную разности площадей большого и малого оснований конуса.

Таким образом полное сопротивление $R$ будет

$$R = k\left[\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}\cdot\frac{r^2}{r^2+x^2}\right)\right] = kr^2\cdot\frac{(x-2a)^2+r^2}{r^2+x^2}.$$

Величина $x$, обращающая сопротивление $R$ в minimum, определяется уравнением

$$x^2 - 2ax - r^2 = 0$$

положительный корень которого

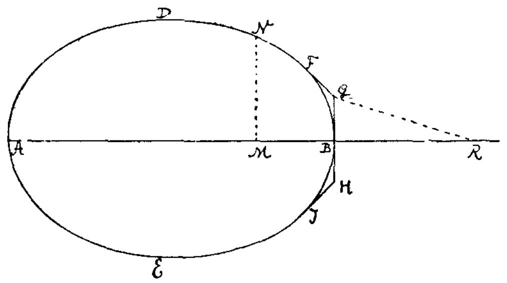
$$x = a + \sqrt{a^2+r^2}$$

отвечающий вопросу, и строится описанным в тексте способом.

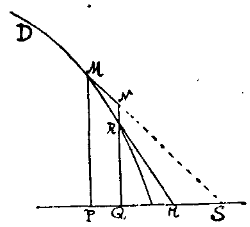
[163] Доказательство этого свойства требует уже соображений, составляющих как бы переходную ступень к тем, которые теперь относятся к вариационному исчислению. Прежде всего заметим (фиг. 170а), что когда высота $a$ отсека конуса приближается к нулю, то $x$ приближается к $r$, и угол, составляемый производящей с осью конуса, приближается к $45°$. Таким образом, если взять бесконечно тонкий усеченный конус, то, проведя производящую $MS$ под углом $45°$ к оси, получим отсек $MNPQ$, испытывающий меньшее сопротивление, нежели $PMRQ$, при большем объеме; отсюда следует также, что сопротивление, встречаемое коническою поверхностью $MR$, больше суммы сопротивлений на коническую поверхность $MN$ и на кольцевую площадь $NR$. Следовательно, если имеется какая-либо поверхность вращения, касательная к меридиану которой в какой-либо точке составляет с осью угол больше $45°$, то, взяв поверхность, образованную вращением ломаной $DMNRH$, элемент $MN$ которой составляет $45°$ с осью, получим тело, объем которого больше, нежели у первоначального, сопротивление же меньше; значит, наименьшим сопротивлением будет обладать в этом случае такое тело, для которого ни в одной точке вышеуказанной замены сделать нельзя, иначе у которого касательная к меридиану составляет везде угол в $45°$, и следовательно, дуга меридиана $MH$ заменена наклоненною к оси под углом $45°$ прямою и конечною ее ординатою.

Когда же фигура $DNFG$ будет кривою такого рода, что если из любой ее точки $N$ опустить на ось перпендикуляр $NM$ и из заданной точки $G$ провести прямую $GR$, параллельную касательной к кривой в точке $N$ и пересекающую ось в точке $R$, то имеет место пропорция

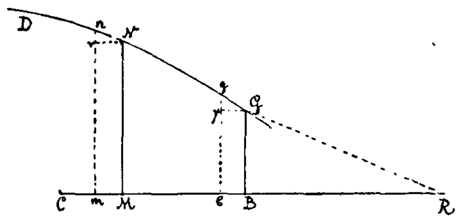
$$MN : GR = GR^3 : 4BR \cdot GB^2$$



Фиг. 170a.



Фиг. 170b.



Фиг. 170c.

тогда тело, образующееся при обращении этой кривой около оси $AB$ при движении в вышеупомянутой редкой среде в направлении от $A$ к $B$, будет испытывать меньшее сопротивление, нежели всякое иное тело вращения, описанное на той же наибольшей ширине.[164]

---

164 Это утверждение Ньютона всецело относится к вариационному исчислению, и приведенный им ответ на вопрос о теле вращения, представляющего наименьшее сопротивление, указывает, что им была решена первая задача в этой области, хотя он и не привел метода которым это решение получено.

К переводу Mott'а «Начал» на английский язык сделано небольшое прибавление, в котором, по словам переводчика, его друг дает решение задачи о теле наименьшего сопротивления. Перевод этот издан в 1727—1729 гг., поэтому приведенное решение может дать указания на то, каким образом решались подобные вопросы английскими математиками современниками Ньютона.

Пусть $BC$ есть ось вращения (фиг. 170b), $B$ — заданная на ней точка и $BG$ — также заданная крайняя ордината искомой кривой $GD$, которая своим обращением около оси $BC$ должна образовать поверхность, испытывающую при движении вдоль оси $CB$ наименьшее сопротивление.

## Предложение XXXV. Задача VII

*Предполагая, что редкая среда состоит из равных, весьма малых, покоящихся частиц, свободно расположенных в равных друг от друга расстояниях, требуется определить сопротивление, испытываемое равномерно движущимся в такой среде шаром.*

---

На оси $BC$ берется произвольная точка $M$, и путь $MN$ есть ордината искомой кривой; возьмем бесконечно близко к $B$ точку $b$ и бесконечно близко к $M$ точку $m$ так, чтобы сумма

$$\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}Bb$$

оставалась постоянной, какую бы точку $M$ на оси ни брать; обозначим эту сумму через $\varepsilon$, положим также

$$\frac{1}{2}Mm - \frac{1}{2}Bb = \xi$$

итак,

$$\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}Bb = \varepsilon; \quad \frac{1}{2}Mm - \frac{1}{2}Bb = \xi$$

проведя ординаты $mn$ и $bg$ и прямые $N\nu$ и $G\gamma$, параллельные оси, получим отрезочки $\nu n$ и $\gamma g$, и будем выбирать длину $\xi$ так, чтобы было

$$\nu n = \gamma g = \alpha$$

где $\alpha$ — также постоянная, т. е. не зависит от положения точки $M$.

Докажем сперва, что сумма сопротивлений, испытываемых элементами поверхности, происходящими от обращения отрезочков $Gg$ и $Nn$, будет наименьшая при условии

$$Gg^4 : Nn^4 = BG \cdot Bb : MN \cdot Mm.$$

Сопротивление, испытываемое рассматриваемыми элементами поверхности по направлению $BC$, пропорционально соответственно кольцевым площадям, описанным отрезочками $\nu n$ и $\gamma g$, и обратно пропорционально $Nn^2$ и $Gg^2$, а так как эти кольцевые площади пропорциональны ординатам $MN$ и $BG$, ибо по условию $\nu n$ и $\gamma g$ постоянны, то сумма сопротивлений пропорциональна количеству

$$\frac{BG}{Gg^2} + \frac{MN}{Nn^2}$$

это количество и должно быть наименьшим, причем $BG$ и $MN$ надо считать постоянными, а изменяются лишь $Gg$ и $Nn$.

Но

$$Gg^2 = Bb^2 + \gamma g^2 = (\varepsilon - \xi)^2 + \alpha^2; \quad Nn^2 = mM^2 + \nu n^2 = (\varepsilon + \xi)^2 + \alpha^2$$

следовательно наименьшею должна быть величина

$$\frac{BG}{(\varepsilon - \xi)^2 + \alpha^2} + \frac{MN}{(\varepsilon + \xi)^2 + \alpha^2}$$

уравнивая нулю ее производную по $\xi$, имеем

$$\frac{BG \cdot (\varepsilon - \xi)}{[(\varepsilon - \xi)^2 + \alpha^2]^2} = \frac{MN \cdot (\varepsilon + \xi)}{[(\varepsilon + \xi)^2 + \alpha^2]^2}$$

т. е.

$$Gg^4 : Nn^4 = BG \cdot Bb : MN \cdot Mm. \tag{1}$$

*Случай 1.* Вообразим, что цилиндр, диаметр и высота коего равны диаметру шара, движется с такою же скоростью, как и шар по направлению своей оси в той же среде. Положим, что частицы среды, на которые наталкивается цилиндр или шар, отражаются с наибольшею силою. По предыдущему предложению, сопротивление шара вдвое меньше сопротивления цилиндра, объем шара составляет $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, и цилиндр, ударяя

---

Но для крайней точки $B$, на основании предыдущей теоремы, угол $gGB$ должен равняться 135°, так что

$$Gg = \sqrt{2}\,\gamma g$$

следовательно

$$Gg^4 = 4\gamma g^4$$

и предыдущая пропорция будет

$$4\gamma g^4 : Nn^4 = BG \cdot Bb : MN \cdot Mm. \tag{1}$$

Проведя $GR$ параллельно $nN$ (т. е. в пределе параллельно касательной в точке $N$), будем иметь подобные треугольники $n\nu N$ и $BGR$, из которых следует

$$\nu n : \nu N = BG : BR$$

но

$$\nu n = g\gamma = Bb \quad \text{и} \quad \nu N = Mm$$

следовательно

$$Bb = \frac{BG \cdot Mm}{BR}.$$

Вместе с тем

$$\nu n : Nn = BG : GR$$

значит

$$\nu n = \gamma g = \frac{Nn \cdot BG}{GR}$$

и из пропорции (1) следует

$$\frac{4BG^4}{GR^4} = \frac{BG^2 \cdot Mm}{BR \cdot MN \cdot Mm}$$

или иначе

$$4BG^2 \cdot BR : GR^3 = GR : MN$$

это и есть данное в тексте условие.

Примем ось вращения за ось $x$ и положим:

$$MN = y, \quad BG = a$$

тогда

$$\operatorname{tg} GRB = y'; \quad BR = \frac{a}{y'}$$

$$GR = \frac{a \cdot \sqrt{1 + y'^2}}{y'}$$

и предыдущее условие равносильно, при теперешних обозначениях, дифференциальному уравнению

$$\frac{yy'^3}{(1 + y'^2)^2} = \frac{1}{4}a. \tag{2}$$

Обозначая через $k$ — коэффициент сопротивления, получим, что полное сопротивление на поверхность выражается интегралом

$$k\int_{x_0}^{X} \frac{yy'^3}{1 + y'^2}\,dx.$$

частицы нормально и, отражая их с наибольшею силою, сообщает им скорость, вдвое бóльшую своей собственной, поэтому в продолжение того времени, как он равномерно проходит путь, равный половине длины своей оси, он сообщит частицам количество движения, так относящееся к количеству движения его самого, как плотность жидкости относится к плотности этого цилиндра. Шар сообщит частицам такое же количество движения

---

Разыскание minimum'а этого интеграла, по правилам вариационного исчисления, приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

где

$$F=\frac{yy'^3}{1+y'^2}.$$

Но так как функция $F$ переменной $x$ явно не содержит, то ее полная производная по $x$ будет

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'';$$

это уравнение, на основании предыдущего, напишется так:

$$\frac{dF}{dx}-\left(y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

здесь первая часть есть полная производная по $x$, и значит, по интегрировании, будет

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C. \tag{4}$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=yy'^2\cdot\frac{3+y'^2}{(1+y'^2)^2},$$

полагая

$$C=-\frac{1}{2}a$$

и получаем ньютоново решение

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2}=\frac{1}{4}a. \tag{5}$$

Ньютон не счел нужным представить свое решение в аналитической форме, т. е., положив $y'=p$, выразить в функции $p$ не только ординату $y$

$$y=\frac{1}{4}a\cdot\frac{(1+p^2)^2}{p^3} \tag{6}$$

но и абсциссу $x$. Заметив, что $dx=\dfrac{dy}{p}$, имеем

$$\begin{aligned}x=\int\frac{dy}{p}=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}=\frac{1}{4}a\cdot\frac{(1+p^2)^2}{p^4}+\frac{1}{4}a\int\frac{(1+p^2)^2\cdot dp}{p^5}=\\=\frac{1}{4}a\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}+\log q\right]+C_1\end{aligned} \tag{7}$$

где $C_1$ — постоянная произвольная, определяемая в рассматриваемом случае из условия, что $x$ должно равняться $x_0$ при $p=1$.

в продолжение того времени, в которое он равномерно проходит путь, равный своему диаметру; в то же время как он проходит $\frac{2}{3}$ своего диаметра, сообщит частицам количество движения, относящееся к полному количеству движения его самого, как плотность среды к плотности шара. Поэтому шар испытывает сопротивление, так относящееся к силе, которая могла бы поглотить или образовать полное его количество движения в продолжение того времени, как шар проходит равномерно путь, равный двум третям своего диаметра, как плотность среды относится к плотности шара.

*Случай 2.* Положим, что частицы среды, встречаемые шаром или цилиндром, не отражаются, тогда цилиндр при нормальном ударе будет сообщать этим частицам скорость, лишь равную своей собственной, и будет испытывать сопротивление, равное половине предыдущего; сопротивление шара составит также половину предыдущего.

*Случай 3.* Предположим теперь, что частицы среды обладают некоторою силою отражения, которая меньше наибольшей и не равна нулю, но средняя между этою наибольшею и нулевой, тогда и сопротивление шара будет средним и находящимся в таком же отношении к сопротивлению в первом и во втором случае.

*Следствие 1.* Таким образом, если шар и частицы бесконечно тверды и лишены всякой упругости, а значит, и всякой силы отражения, то сопротивление шара относится к силе, которая может поглотить или образовать полное его количество движения в продолжение того времени, в которое шар проходит путь, равный четырем третям своего диаметра, как плотность среды относится к плотности шара.

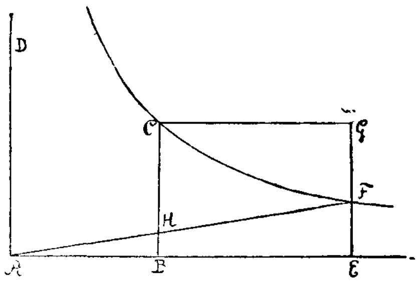
*Следствие 2.* Сопротивление шара, при прочих одинаковых условиях, пропорционально квадрату скорости.

*Следствие 3.* Сопротивление шара, при прочих одинаковых условиях, пропорционально квадрату диаметра.

*Следствие 4.* Сопротивление шара, при прочих одинаковых условиях, пропорционально плотности среды.

*Следствие 5.* Сопротивление шара пропорционально квадрату скорости, квадрату диаметра и плотности среды.

*Следствие 6.* Движение шара при таком сопротивлении может быть представлено так: пусть $AB$ (фиг. 171) представляет то время, в продолжение которого шар может утратить все свое количество движения, если принять сопротивление постоянным и равным начальному; к $AB$ проводим перпендикуляры $AD$ и $BC$ и по $BC$ откладываем длину $BC$, изображающую полное начальное количество движения шара; через точку $C$ проводится гипербола $GF$, имеющая своими асимптотами прямые $AD$ и $AB$. Продолжим $AB$ до какой-либо точки $E$ и восставим перпендикуляр $EF$, пересекающий гиперболу в точке $F$. Дополнив параллелограмм $BCGE$, проводим прямую $AF$, пересекающую $BC$ в $H$. Если шар в течение какого-либо времени $BE$, продолжая двигаться равномерно в среде несопротивляющейся, описал бы пространство, представляемое площадью $CBEG$ параллелограмма, то в сопротивляющейся среде он опишет пространство, представляемое гиперболическою площадью $CBEF$, и количество его движения в конце сказанного времени представится ординатою гиперболы $EF$, за утратою части $FG$. Сопротивление шара в конце того же времени представится длиною $BH$, за утратою части $HC$ начального сопротивления. Все это следует из предложения V книги II, следствия 1 и 3.



Фиг. 171.

*Следствие 7.* Таким образом, если шар в течение времени $T$, предполагая, что сопротивление $R$ остается постоянным, утрачивает полное свое количество движения $M$, то этот шар в продолжение времени $t$ утратит, вследствие сопротивления среды, уменьшающегося вместе со скоростью пропорционально квадрату ее, количество движения, равное $\frac{Mt}{T+t}$, и остающаяся его часть составит $\frac{M \cdot T}{T+t}$; при этом шар пройдет путь, длина коего относится к пути, описываемому во время $t$ равномерно с такою скоростью, при которой количество движения равно $M$, как

$$2.302\,585\,092\,994 \cdot \log \frac{T+t}{T} : \frac{T}{t}$$

ибо отношение площади $BCFF$ гиперболы к площади $BCGE$ равно такой величине.

### ПОУЧЕНИЕ

В этом предложении изложено о сопротивлении и замедлении шаров, движущихся в срединах не сплошных, и получено, что это сопротивление относится к силе, которая могла бы поглотить или образовать полное количество движения шара в такое время, в которое шар, продолжая двигаться равномерно со скоростью, равной начальной, прошел бы путь, равный $\frac{2}{3}$ своего диаметра, как плотность среды относится к плотности шара; это будет в том случае, когда шар и частицы среды весьма упруги и обладают наибольшею силою отражения. Сказанное сопротивление будет вдвое меньше, когда шар и частицы среды бесконечно тверды и совершенно лишены силы отражения. В срединах сплошных, таких как вода, горячее масло, ртуть, в которых шар не ударяет непосредственно о все частицы жидкости, производящие сопротивление, а надавливает сперва на ближайшие частицы, которые надавливают на следующие и следующие, сопротивление еще в 2 раза меньше. Таким образом в такого рода весьма текучих срединах шар испытывает сопротивление, относящееся к силе, которая может образовать или поглотить полное его количество движения в продолжение времени, в которое шар, продолжая двигаться равномерно, прошел бы путь, равный $\frac{8}{3}$ своего диаметра, как плотность средины к плотности шара. В последующем мы постараемся это показать.

### Предложение XXXVI. Задача VIII

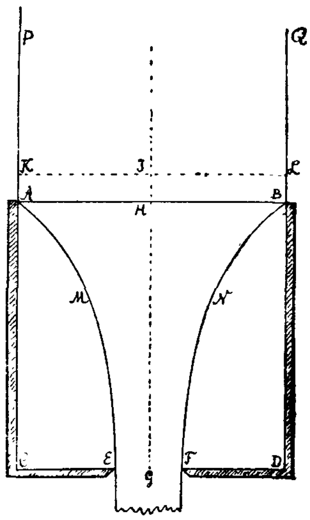
*Определить движение воды, вытекающей через круглое отверстие, сделанное в дне сосуда.*

Пусть $ACBD$ (фиг. 172) есть цилиндрический сосуд, $AB$ — его открытый верх, $CD$ — дно, параллельное горизонту, $EF$ — круглое отверстие по середине дна, $G$ — центр отверстия, $GH$ — ось цилиндра, перпендикулярная горизонту. Вообрази, что ледяной цилиндр $APQB$ имеет тот же диаметр, как и полость сосуда, и ту же ось и что он опускается равномерно, и что те его части, которые достигают поверхности воды $AB$, тают и, обратившись в воду под действием своей тяжести, стекают в сосуд и, продолжая двигаться вниз, образуют водопад или столб воды $ABNFEM$, который, выходя через отверстие $EF$, заполняет его целиком.

Пусть равномерная скорость опускания льда и соприкасающейся к нему по кругу $AB$ воды равна той, которую вода могла бы получить падая с высоты $JH$, причем $JH$ составляет продолжение $GH$; проведем через точку $J$ прямую $KL$, параллельную горизонту и пересекающую боковую поверхность льда в $K$ и $L$. Скорость воды, вытекающей через отверстие $EF$, будет равна той, которую вода могла бы получить при падении с высоты $JG$, поэтому, по теореме *Галилея*, отношение $JG$ к $JH$ будет равно отношению квадратов скоростей воды в отверстии $EF$ и в плоскости круга $AB$, т. е. равно квадрату отношения площади круга $AB$

к площади круга $EF$, ибо эти площади обратно пропорциональны скоростям воды, через них протекающей в одинаковое время и в одинаковом количестве. Здесь идет речь о скорости воды, перпендикулярной к горизонту. Движение же воды параллельно горизонту, с которым частицы воды сближаются друг к другу, здесь не рассматривается, ибо оно происходит не от силы тяжести и не изменяет движения, перпендикулярного горизонту.

Предположим же, что частицы воды чуть-чуть сцепляются и вследствие этого взаимного сцепления при движении вниз сближаются, двигаясь параллельно горизонту, так что образуется одна струя, а не много отдельных, но это параллельное горизонту движение, происходящее от такого сцепления, здесь не рассматривается.




Фиг. 172.

*Случай 1.* Вообрази теперь, что вся полость сосуда в смежности с текущей вниз водою $ABNFEM$ заполнена льдом и что вода течет через лед, как через трубу. Если бы вода совсем не касалась льда или, что то же самое, и касалась бы, но вследствие чрезвычайной гладкости льда скользила бы по нему совершенно свободно, не встречая никакого сопротивления, то она вытекала бы через отверстие $EF$ с тою же скоростью, как и раньше, и полный вес столба воды $ABNFEM$ затрачивался бы на производство ее истечения как и раньше, дно же сосуда поддерживало бы вес льда, окружающего столб воды.

Если бы лед в сосуде растаял, истечение воды по отношению к скорости его осталось бы таким же, как и прежде. Оно не будет меньше, ибо превращение льда в воду лишь способствует ее течению вниз; оно не будет больше, ибо лед, превратившись в воду, не иначе может течь вниз, как отнимая от движения вниз прочей воды равное количество движения. Та же самая сила должна сообщить ту же самую скорость тому же самому количеству воды.

Но отверстие в дне сосуда, вследствие наклонного движения вытекающей воды, должно быть несколько больше, нежели прежде, ибо теперь не все частицы воды проходят через отверстие перпендикулярно к его плоскости, но, притекая по всем направлениям от стенок сосуда и сходясь к отверстию, проходят сквозь него косвенным движением и, стремясь вниз, сливаются в струю вытекающей воды; эта струя в небольшом расстоянии под отверстием имеет диаметр меньше диаметра отверстия приблизительно в отношении 5 к 6 или $5\frac{1}{2}$ к $6\frac{1}{2}$, если только я достаточно точно обмерил эти диаметры. Для этого я изготовил очень тонкую пластинку с отверстием посредине, диаметром в $\frac{5}{8}$ дюйма, и чтобы струя вытекающей воды не ускорялась и не становилась от увеличенной скорости тока тоньше, я укреплял эту пластинку не к дну, а к боковой стенке сосуда, так что струя вытекала по направлению, параллельному горизонту. Затем, когда сосуд был заполнен водой, я, открыв отверстие, чтобы дать воде вытекать, измерял точнейшим образом диаметр струи в расстоянии около $\frac{1}{2}$ дюйма от отверстия, и получил $\frac{21}{40}$ дюйма; таким образом отношение диаметра сказанного круглого отверстия к диаметру струи было около 25 к 21. Вода, чтобы пройти через отверстие, притекает, сходясь отовсюду, и после выхода из отверстия от этого схождения струя ее становится тоньше и, вследствие утонения, ускоряется, пока не достигнет расстояния около $\frac{1}{2}$ дюйма от отверстия; в этом расстоянии струя тоньше и быстрее, нежели в самом отверстии, в отношении $25 \cdot 25$ к $21 \cdot 21$, т. е. приблизительно 17 к 12 или $\sqrt{2}$ к 1. Из опытов также оказывается, что количество воды, вытекающей в продолжение заданного времени через круглое отверстие в дне сосуда, такое, которое соответствует протоку с упомянутой выше скоростью не через самое отверстие, а через такой круг, коего диаметр относится к диаметру отверстия, как 21 к 25. Поэтому вода при проходе через самое отверстие имеет направленную вниз скорость, равную той, которую получило бы тяжелое тело при свободном падении с высоты, равной приблизительно половине высоты воды в сосуде. После же выхода из сосуда скорость воды увеличивается от сжатия струи, пока в расстоянии, приблизительно равном диаметру отверстия, она не станет больше, нежели в самом отверстии, в отношении $\sqrt{2}$ к 1 и станет тогда равной скорости, приобретаемой телом, свободно падающим с высоты, равной высоте воды в сосуде.

В последующем диаметр струи будет приниматься равным диаметру отверстия $EF$; при этом будем воображать, что проведена плоскость $VW$, параллельная $EF$, в расстоянии, равном диаметру отверстия, и в ней прорезано большее отверстие $ST$ так, чтобы струя, проходя через него, заполняла бы нижнее отверстие $EF$, т. е. отверстие $ST$ такое, что его диаметр относится к диаметру $EF$, как 25 к 21. Таким образом вода будет протекать перпендикулярно плоскости нижнего отверстия, и количество вытекающей через него воды будет тогда приблизительно согласоваться с тем, которое предполагается при решении задачи. Пространство же между этими двумя плоскостями и струею может быть принято за дно сосуда.

Но чтобы решение задачи было проще и более математично, предпочтительнее принимать за дно сосуда лишь плоскость нижнего его основания и воображать, что вода, которая протекала через лед или через трубу и вытекала из сосуда через отверстие $EF$ в нижнем основании, сохраняет свое движение, лед же сохраняет свой покой. В последующем пусть $ST$ представляет диаметр описанного из центра $Z$ круглого отверстия, через которое струя вытекает из сосуда, когда вся вода в сосуде жидкая, и $EF$ — диаметр отверстия, через которое струя проходит целиком, заполняя его, идет ли вода через сказанное верхнее отверстие $ST$ из сосуда, или же течет внутри льда как бы через трубу. Диаметр верхнего отверстия $ST$ пусть относится к диаметру нижнего, как 25 к 21, и перпендикулярное расстояние между плоскостями отверстий равно диаметру нижнего $EF$. Направленная вниз скорость воды, вытекающей из сосуда через отверстие $ST$, будет при проходе через плоскость его равна скорости падающего тела, соответствующей половине высоты $JZ$; скорость же продолжающей свое падение струи при проходе через отверстие $EF$ равна скорости, соответствующей всей высоте $JG$.

*Случай 2.* Если отверстие $EF$ сделано не по середине дна сосуда, а где-либо в ином месте, — вода вытекает с тою же скоростью, как и в первом случае, если величина отверстия такая же. Ибо тяжелое хотя и опускается по наклонной линии на ту же глубину в большее время, нежели по отвесной, но в обоих случаях приобретает одинаковую скорость, как это доказал Галилей.

*Случай 3.* Такова же скорость и воды, вытекающей через отверстие в боковой стенке сосуда. Ибо, если отверстие настолько мало, что разность уровней $AB$ и $KL$ нечувствительна и струя вытекающей горизонтально воды принимает параболическую форму, то по параметру этой параболы можно вывести, что скорость вытекающей воды равна скорости, которую приобретает тело, свободно падающее с высоты $HD$ или $JG$ уровня воды в сосуде. Проделав такое испытание, я нашел, что когда высота воды в сосуде над отверстием была 20 дюймов и высота отверстия над горизонтальною плоскостью тоже была около 20 дюймов, то струя вытекающей воды ударяла эту плоскость в расстоянии приблизительно 37 дюймов от перпендикуляра, опущенного из отверстия на эту плоскость. При отсутствии сопротивления воздуха, если бы струя была параболою с параметром 80 дюймов, она должна бы падать на эту плоскость в расстоянии 40 дюймов.

*Случай 4.* Наконец, если вытекающая вода направляется вверх, то скорость ее истечения та же самая, ибо небольшая струя вытекающей воды поднимается в отвесном движении до уровня $GH$ или $GJ$ воды, стоящей в сосуде, лишь чуть-чуть теряя в высоте подъема от сопротивления воздуха, поэтому скорость ее истечения такова же, какую она могла бы приобрести, падая с этой высоты. Частица стоячей воды повсюду испытывает одинаковое давление (по предл. XIX кн. II) и, уступая давлению, несется по любому направлению с одинаковым стремлением, идет ли она вниз через отверстие в дне сосуда, или же вытекает горизонтально через отверстие в его стенке, или же поступает в трубу и затем направляется вверх через малое отверстие, сделанное в верхней стенке трубы. Что скорость, с которою вытекает вода, именно такова, как указано в этом предложении, следует не только из рассуждения, но подтверждается также известными опытами, описанными выше.

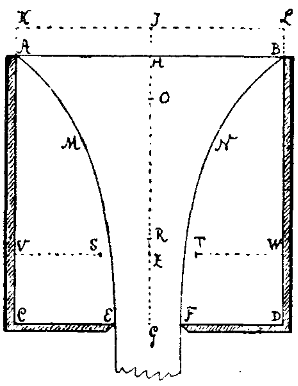
*Случай 5.* Скорость вытекающей воды та же самая, какова бы ни была форма отверстия: круглая ли, квадратная ли, треугольная, или какая-либо иная равномерная с круговой, ибо эта скорость не зависит от формы отверстия, а определяется величиною его погружения под плоскостью $KL$.

*Случай 6.* Если нижняя часть сосуда $ABDC$ погружена в стоячую воду и высота уровня этой воды над дном сосуда есть $GR$ (фиг. 173), то скорость, с которою вода вытекает из сосуда через отверстие $EF$ в стоячую воду, будет таковою, которую вода приобрела бы падая с высоты $JR$, ибо ес всей воды, расположенной ниже уровня стоячей воды, удерживается в равновесии весом этой последней и, следовательно, нисколько не ускоряет движения воды, опускающейся в сосуде. Этот случай также следует из опытов, если измерять время вытекания воды.

*Следствие 1.* Поэтому, если продолжить высоту $AC$ уровня воды до точки $K$ так, чтобы отношение $AK$ к $CK$ было равно квадрату отношения площади отверстия, сделанного где-либо в дне, к площади круга $AB$, то скорость вытекающей воды будет равна скорости, которую вода приобрела бы падая с высоты $KC$.

*Следствие 2.* Сила, которая могла бы произвести полное количество движения вытекающей воды, равна весу цилиндрического столба воды, основание которого есть отверстие $EF$ и высота $2CJ$ или $2CK$, ибо вытекающая вода в продолжение того времени, пока ее количество сравняется с объемом этого столба, приобрела бы, падая под действием своего веса с высоты $GJ$, ту скорость, с которою она вытекает.

*Следствие 3.* Полный вес всей воды в сосуде $ABDC$ относится к той части веса, которая затрачивается на вытекание воды, как сумма площадей кругов $AB$ и $EF$ к удвоенной площади $EF$. Пусть $JO$ есть среднее пропорциональное между $JH$ и $JG$; количество воды, протекающей через отверстие $EF$ в продолжение такого времени, что падающая из $J$ капля могла бы описать высоту $JG$, равно объему цилиндра, коего основание есть круг $EF$ и высота $2JG$, т. е. такого цилиндра, коего основание есть круг $AB$ и высота $2JO$, ибо площадь круга $EF$ относится к площади круга $AB$, как корень квадратный из $JH$ к корню из высоты $JG$, т. е. как среднее их пропорциональное $JO$ к $JG$. Количество воды, вытекающей в продолжение такого времени, в которое капля может при падении описать высоту $JH$, будет равно объему цилиндра с основанием $AB$ и высотою $2JH$, и в то время как капля при своем падении из $J$ через $H$ в $G$ пройдет разность высот $HG$, количество вытекающей воды, т. е. воды, заключенной в объеме $ABNFEM$, будет равно разности объемов цилиндров, т. е. объему цилиндра, коего основание $AB$ и высота $2HO$. Таким образом полное количество воды в сосуде $ABDC$ относится к полному количеству вытекающей в объеме $ABNFEM$ воды, как $HG$ к $2HO$, т. е. как $HO + OG$ к $2HO$ или как $JH + JO$ к $2JH$. Но вес воды, содержащейся в объеме $ABNFEM$, затрачивается на вытекание, следовательно вес полного количества воды в сосуде относится к той его части, которая затрачивается на вытекание, как $JH + JO$ к $2JH$, иначе как сумма площадей кругов $EF$ и $AB$ к удвоенной площади круга $EF$.



Фиг. 173.

*Следствие 4.* Поэтому вес всего количества воды в сосуде $ABDC$ относится к той части этого веса, которая поддерживается дном, как сумма площадей кругов $AB$ и $EF$ к их разности.

*Следствие 5.* Та часть веса, которая поддерживается дном, относится к той его части, которая затрачивается на вытекание воды, как разность площадей кругов $AB$ и $EF$ к удвоенной площади меньшего круга $EF$, иначе как площадь дна к удвоенной площади отверстия.[165]

[165] Все эти рассуждения основаны на предположении, что вода течет в объеме $AMEFNB$ как по трубе, ***причем вертикальная слагающая ее скорости равна*** $\sqrt{2gz}$, где $z$ есть погружение рассматриваемого сечения ниже условного уровня $KJ$, где эта скорость равнялась бы нулю. Если при этом предположении принять ось $JG$ цилиндра за ось $z$, прямую $JL$ — за ось $y$ и положить

$$AB = 2a, \quad EF = 2c, \quad JH = h_0, \quad JG = h_1$$

и диаметр какого-либо сечения $MN$ обозначить через $2y$, то из условия, что количество протекающей воды везде одно и то же, получится уравнение кривой $BNF$, вращением которой около оси $JG$ образуется труба $AMEFNB$.

В самом деле, тогда должно быть

$$\pi y^2 \sqrt{2gz} = \text{постоянной}.$$

Применив это равенство для сечения $AB$, получим, по сокращении:

$$y^2 \sqrt{z} = a^2 \sqrt{h_0}, \tag{1}$$

иначе

$$y^4 z = a^4 h_0 \tag{2}$$

т. е. эта кривая есть гипербола пятого порядка, имеющая своими асимптотами прямые $JL$ и $JG$.

Из уравнения (1) следует, что объем $AMEFNB$, который обозначим через $V$, будет

$$V = \pi \int_{h_0}^{h_1} y^2\, dz = \pi a^2 \sqrt{h_0} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \pi \frac{a^2 \sqrt{h_0}}{2} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}).$$

Объем же $V_0$ цилиндра $ABCD$ равен $\pi a^2 (h_1 - h_0)$, следовательно будет

$$\frac{V_0}{V} = \frac{h_1 - h_0}{2\sqrt{h_0}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0})} = \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_0}}{2\sqrt{h_0}}.$$

На основании уравнения

$$c^2 \sqrt{h_1} = a^2 \sqrt{h_0}$$

получим

$$\frac{V_0}{V} = \frac{a^2 + c^2}{2c^2}. \tag{3}$$

Это равенство и выражает свойство, высказанное в следствии ?.

Из пропорции (3) непосредственно получаются такие две:

$$\frac{V_0}{V_0 - V} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} \tag{4}$$

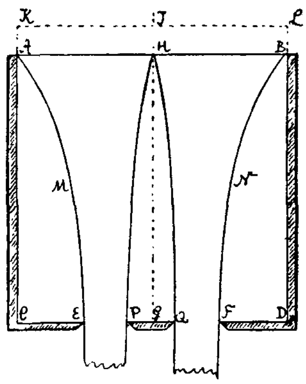
$$\frac{V_0 - V}{V} = \frac{a^2 - c^2}{2c^2} \tag{5}$$

выражающие следствия 4 и 5.

Как это рассуждение, так и последующие основаны, как видно, на предположении, что *вертикальная* слагающая скорости воды, текущей по объему $ABNFEM$, равна $\sqrt{2gz}$. Это предположение физически невозможно, ибо оно требовало бы, чтобы давление, напр., в точке $M$ внутри столба текущей воды было бы меньше атмосферного, снаружи же столба в воде стоячей это давление, очевидно, больше атмосферного, следовательно такого течения в жидкости образоваться не может.

Следствия 5 и 6, если их сопоставить с законами гидростатики, как бы указывают на то, что Ньютон считал, что на всю поверхность $ABNFEM$ раздела стоячей и текущей воды действует атмосферное давление такое же, как на свободную поверхность $AB$, уравновешиваемое давлением атмосферы на дно $CD$.

*Следствие 6.* Отношение веса воды, которая только и поддерживается дном, к весу цилиндрического вертикального столба воды, над ним расположенного, равно отношению площади круга $AB$ к сумме площадей кругов $AB$ и $EF$, иначе — отношению площади круга $AB$ к избытку удвоенной площади $AB$ над площадью дна. Ибо по следствию 4 отношение веса воды, поддерживаемого дном, к весу всей воды в сосуде равно отношению разности площадей кругов $AB$ и $EF$ к их сумме, вес же всей воды в сосуде относится к весу всего ее столба, стоящего прямо над дном, как площадь круга $AB$ к разности площадей кругов $AB$ и $EF$. Отсюда следует, что отношение веса воды, поддерживаемого дном, к весу столба воды, прямо над дном стоящего, равно отношению площади круга $AB$ к сумме площадей $AB$ и $EF$, или, что то же, к избытку удвоенной площади $AB$ над площадью дна.



Фиг. 174.

*Следствие 7.* Если по середине отверстия $EF$ (фиг. 174) поместить горизонтально кружок $PQ$, описанный из центра $G$, то вес воды, поддерживаемый этим кружком, больше третьей части веса водяного цилиндра, коего основание есть этот кружок и высота $GH$.

Пусть $ABNFEM$ есть тот водопад или же тот столб падающей вниз воды, коего ось $GH$; вообразим, как и прежде, что вся остальная вода в сосуде, как в смежности с водопадом, так и находящаяся над кружком, текучесть которой не требуется для самого скорого и самого свободного ее вытекания, замерзла.

Пусть $PHQ$ есть столб замерзшей воды, находящейся над кружком, точка $H$ — его вершина и $GH$ — высота. Представь себе, что водопад под действием полного своего веса падает вниз, не производя на $PQH$ давления и не встречая препятствия, но скользя свободно и без трения, за исключением, может быть, самой вершины ледяного столба, где при начале движения поверхность воды может быть и впалой. Подобно тому как замерзшая вокруг водопада вода $AMEC$ и $BNFD$ ограничена с внутренней, обращенной к водопаду стороны выпуклою в его сторону поверхностью $AME$ и $BNF$, так и столб $PHQ$ будет иметь обращенную к водопаду поверхность выпуклою, и следовательно, его объем больше, нежели объем конуса, коего основание есть сказанный кружок $PQ$ и высота $GH$, т. е. больше трети объема цилиндра тех же основания и высоты. Кружок же поддерживает вес этого столба, т. е. вес, бо́льший веса конуса или третьей части цилиндра.

*Следствие 8*. Можно показать, что вес воды, поддерживаемый весьма малым кружком $PQ$, меньше двух третей веса водяного цилиндра, имеющего своим основанием этот кружок и высотою $GH$.

Приняв прежние положения, вообрази, что описан полусфероид (эллипсоид вращения), коего основание есть сказанный кружок и высота $GH$. Эта поверхность будет иметь объем, равный двум третям объема сказанного цилиндра, причем она будет заключать в себе столб $PHQ$ замерзшей воды, вес которого и поддерживается кружком. Хотя движение воды и направлено прямо вниз, тем не менее наружная поверхность столба подходит к основанию $PQ$ под несколько острым углом, вследствие того, что при падении вода постоянно ускоряется и струя ее, ускоряясь, становится более тонкой; итак, вследствие того, что этот угол меньше прямого, столб в нижних своих частях располагается внутри сфероида.

Точно так же вверху он будет иметь заостренную вершину, ибо иначе горизонтальное движение воды и вершины сфероида было бы бесконечно быстрее ее вертикального движения. Чем меньше будет кружочек $PQ$, тем острее будет вершина столба, и при беспредельном уменьшении кружочка угол $PHQ$ уменьшается бесконечно, поэтому столб располагается внутри полусфероида. Следовательно, объем этого столба меньше объема полусфероида, т. е. меньше двух третей объема цилиндра, коего основание есть сказанный кружочек и высота $GH$. Кружочек же поддерживает силу, равную весу сказанного столба, ибо вес окружающей воды затрачивается на ее вытекание.

*Следствие 9*. Вес воды, поддерживаемый весьма малым кружочком $PQ$, приблизительно равен весу водяного цилиндра, коего основание есть этот кружочек и высота $\frac{1}{2}\,GH$, ибо этот последний вес есть среднее арифметическое между весом конуса и весом полусфероида. Если же этот кружочек не весьма мал, но, увеличиваясь, сравняется с отверстием $EF$, то он будет поддерживать полный вес воды, отвесно над ним расположенной, т. е. вес цилиндра, коего основание есть этот кружок и высота $GH$.

*Следствие 10*. И (как мне кажется) вес, поддерживаемый кружком, всегда приблизительно относится к весу цилиндра воды, имеющего своим основанием этот кружок и высотою $\frac{1}{2}\,GH$, как $EF^2$ относится к

$$\left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right),$$

т. е. как площадь кружка $EF$ к избытку этой площади над половиною площади кружочка $PQ$.[166]

### Лемма IV

*Сопротивление цилиндра, движущегося равномерно в направлении своей длины, не изменяется при увеличении или уменьшении этой длины, поэтому оно то же самое, как и сопротивление круга того же диаметра, движущегося по направлению прямой, перпендикулярной к его плоскости, с тою же скоростью.*

Ибо боковая поверхность цилиндра нисколько не препятствует его движению, при беспредельном же уменьшении длины цилиндр обращается в круг.[167]

### Предложение XXXVII. Теорема XXIX

*Для цилиндра, движущегося равномерно по направлению своей оси в сжатой, беспредельной и неупругой жидкости, сопротивление, происходящее от величины поперечного сечения цилиндра, приблизительно относится к такой силе, которая может в такое время, пока цилиндр проходит учетверенную свою длину, произвести или уничтожить полное его количество движения, как плотность среды относится к плотности цилиндра.*

Пусть сосуд $ABDC$ (черт. 175) касается своим дном $CD$ поверхности стоячей воды, и из этого сосуда по вертикальной трубе $EFTS$ вытекает вода в стоячую воду, и где-либо внутри этой трубы помещен кружок $PQ$, коего плоскость горизонтальна; если продолжить $CA$ до $K$ так, чтобы отношение $AK:CK$ было равно квадрату отношения избытка площади отверстия трубы $EF$ над площадью кружочка $PQ$ к площади круга $AB$, то по следствиям 5, 6 и следствию 1 предложения XXXVI явствует, что скорость воды, протекающей через кольцевое пространство, заключенное между стенкою трубы и кружочком, равна той скорости, которую вода приобрела бы при своем свободном падении с высоты $KC$ или $JG$.

---

166 Все рассуждения в этом предложении основаны на оговоренном в следствии 7 предположении, «что водопад под действием полного своего веса падает вниз, не производя на $PQH$ давления и не встречая препятствия, но скользя свободно и без трения». Это предположение, как и все дальнейшие из него следующие, на деле места не имеет и несовместимо со свойствами жидкости.

167 Это заключение противоречит результатам опытов, которые были произведены, однако, на много лет после издания «Начал».

По следствию 10 предложения XXXVI, если ширина сосуда будет бесконечно велика, так что отрезочек $JH$ исчезает и высоты $JG$ и $HG$ сравняются, то сила, производимая текущей водой на кружочек, будет относиться к весу цилиндра, имеющего его своим основанием и высотою $\frac{1}{2}JG$, приблизительно как

$$EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$$

ибо сила, производимая равномерно текущей водой, будет та же самая, в какой бы части трубы кружок $PQ$ ни был расположен.

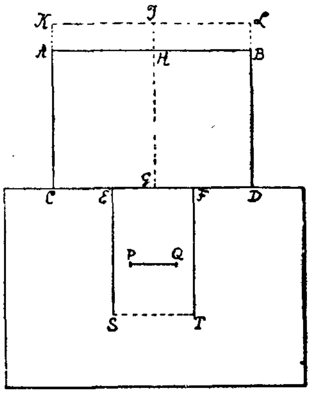
Положим, что концы трубы $EF$ и $ST$ закрыты и что кружок, поднимаясь вверх в жидкости, повсюду одинаково сжатой, заставляет этим своим движением воду, над ним расположенную, опускаться через кольцевое пространство между ним и стенками трубы вниз; скорость поднимающегося кружка будет относиться к скорости опускающейся воды, как разность площадей кругов $EF$ и $PQ$ относится к площади круга $PQ$, отношение же скорости поднимающегося кружка к сумме скоростей, т. е. к его скорости относительно обтекающей его воды, будет равно отношению разности площадей кругов $EF$ и $PQ$ к площади круга $EF$, т. е. $(EF^2 - PQ^2) : EF^2$.

Пусть эта относительная скорость равна той скорости, с которою предполагалось, что вода протекает через то же кольцевое пространство, когда кружок был неподвижен, т. е. той скорости, которую вода приобрела бы при свободном падении с высоты $JG$; сила действия воды на поднимающийся кружок будет по следствию V законов такая же, как и раньше, т. е. сопротивление поднимающегося кружка будет приблизительно относиться к весу цилиндра воды, коего основание есть этот кружок и высота $\frac{1}{2}JG$, как $EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$. Скорость же поднимающегося кружка относится к скорости, приобретаемой водою при свободном падении с высоты $JG$, как $(EF^2 - PQ^2) : EF^2$.

При увеличении ширины трубы до бесконечности, оба отношения

$$(EF^2 - PQ^2) : EF^2, \quad EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$$

приближаются в пределе к равенству, и следовательно, тогда скорость кружочка будет та же самая, как та скорость, которую вода может приобрести при свободном падении с высоты $JG$; сопротивление, им испытываемое, становится тогда равным весу такого цилиндра, коего основание есть этот кружок и высота равна половине той высоты $JG$, с которой этот цилиндр должен бы упасть, чтобы приобрести ту скорость, с которою кружок движется вверх; двигаясь с такою скоростью, цилиндр за время своего падения прошел бы путь, равный учетверенной длине своей. Но сопротивление цилиндра, движущегося по направлению своей длины, такое же, как и сопротивление кружочка (по лем. IV), следовательно оно равно такой силе, которая может произвести то количество движения, которым цилиндр обладает в такое время, в какое он, двигаясь равномерно, проходит путь, равный учетверенной длине своей.[168]




Фиг. 175.

Если увеличивать или уменьшать длину цилиндра, то и количество движения его и время, в продолжение которого он проходит учетверенную длину свою, увеличатся или уменьшатся в одном и том же отношении; следовательно, та сила, которая в продолжение этого соответственно увеличенного или уменьшенного времени произвела бы и увеличенное или уменьшенное количество движения, не изменится и попрежнему будет равна сопротивлению цилиндра, ибо по лемме IV и оно остается без изменения.

Если увеличится или уменьшится плотность цилиндра, то и его количество движения и сила, которая в продолжение одного и того же времени могла бы произвести или уничтожить это количество движения, увеличится или уменьшится в том же отношении. Таким образом сопротивление какого-либо цилиндра будет относиться к такой силе, которая могла бы произвести или уничтожить полное количество движения цилиндра, пока он проходит

---

[168] Пусть будет: плотность жидкости $\Delta$, плотность цилиндра $\delta$, площадь его основания $S$, длина $l$, масса $m$, скорость $v$, сопротивление, им испытываемое при движении вдоль своей оси с этою скоростью, $R$. Количество движения, которым цилиндр обладает при движении со скоростью $v$, есть $mv = Sl\delta v$, время $\tau$, в продолжение которого проходится путь $4l$, есть $\tau = \frac{4l}{v}$, следовательно сила, сообщающая такое количество движения в это время, есть $\frac{mv}{\tau} = \frac{1}{4} Sv^2 \delta$ и сила сопротивления $R$ будет

$$R = \frac{1}{4} Sv^2 \Delta. \tag{1}$$

Если обозначить через $p$ — вес единицы объема жидкости и через $h$ — высоту, соответствующую скорости $v$, то получится

$$R = \frac{1}{2} Shq. \tag{2}$$

путь, равный учетверенной своей длине, приблизительно, как плотность среды относится к плотности цилиндра.

Жидкость должна быть сжатой, дабы она оставалась сплошною; она вместе с тем должна быть сплошною и неупругой, чтобы всякое давление, которое происходит от этого сжимания, распространялось бы мгновенно и, действуя одинаково на все части движущегося тела, не изменяло бы сопротивления, им испытываемого.

Лишь то давление, которое происходит от движения тела и затрачивается на образование количества движения жидкости, производит сопротивление ее. Давление же, которое происходит от сжимания жидкости, сколь бы велико оно ни было, если только оно распространяется мгновенно, не сообщает частицам сплошной жидкости никакого количества движения и совершенно не производит никакого его изменения и, следовательно, не увеличивает и не уменьшает сопротивления. В самом деле, действие жидкости, происходящее от такого сжатия, не может быть более сильным на кормовую часть тела, нежели на носовую его часть, и следовательно, не может уменьшить описанного в этом предложении сопротивления; оно не будет более сильным на носовую часть тела, нежели на кормовую, если его распространение будет бесконечно быстрее движения тела, испытывающего давление. Когда же жидкость будет сплошною и не упругой, оно будет бесконечно быстрым и будет распространяться мгновенно.

*Следствие 1.* Сопротивления цилиндров, движущихся равномерно по направлению своих длин, пропорциональны квадратам скоростей, квадратам диаметров и плотностям жидкостей.

*Следствие 2.* Если ширина трубы не бесконечно велика, цилиндр же движется по направлению своей длины в среде, заключенной в трубе и находящейся в покое, и ось его совпадает с осью трубы, то отношение его сопротивления к силе, которою полное его количество движения могло бы быть произведено или уничтожено во время, пока он проходит учетверенную длину свою, будет равно произведению количества

$$\frac{EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} \cdot \left(\frac{EF^2}{EF^2 - PQ^2}\right)^2$$

на отношение плотности среды к плотности цилиндра.

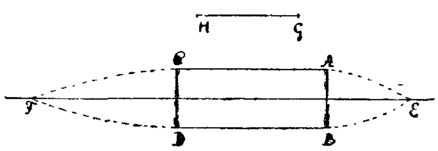
*Следствие 3.* При тех же предположениях, если отношение длины $L$ к учетверенной длине цилиндра равно величине

$$\frac{EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} \cdot \left(\frac{EF^2}{EF^2 - PQ^2}\right)^2,$$

то сопротивление цилиндра будет относиться к силе, которая может произвести или уничтожить полное количество движения его, пока он проходит равномерно путь $L$, как плотность среды к плотности цилиндра.

### *ПОУЧЕНИЕ*

В этом предложении мы исследовали сопротивление, происходящее единственно только от величины поперечного сечения цилиндра, пренебрегая тою частью сопротивления, которая может происходить от наклонности движений. Подобно тому как в случае 1 предложения XXXVI наклонность движений, с которыми частицы воды отовсюду сходились к отверстию $EF$, препятствовала вытеканию воды из этого отверстия, так и в этом случае наклонность тех движений, с которыми частицы воды, нажимаемые передним основанием цилиндра, уступают этому давлению и расходятся во все стороны, замедляет переход частиц через места, смежные с передним основанием цилиндра, к кормовому его основанию. Вследствие этого жидкость приходит в движение в большем расстоянии от цилиндра и сопротивление возрастает приблизительно в таком же отношении, как уменьшалось истечение воды из сосуда, т. е. кругло как $\left(\frac{25}{21}\right)^2$. Подобно тому как в указанном случае 1 предложения XXXVI, чтобы заставить частицы воды проходить перпендикулярно и в наибольшем количестве через отверстие $EF$, было положено, что в сосуде вся та вода, движение которой было наклонное и бесполезное, заморожена вокруг стержня и оставалась неподвижной, так и в этом предложении, чтобы увичтожить наклонность движений и чтобы отступающие частицы воды обладали самым прямым и кратчайшим движением, представляя наиболее легкий проход цилиндру, и чтобы оставалось только то сопротивление, которое происходит от величины поперечного сечения цилиндра и которое не иначе может быть уменьшено, как уменьшив диаметр цилиндра, надо вообразить, что те частицы жидкости, коих движения косвенны и бесполезны и увеличивают сопротивление, находятся в относительном покое у обеих оконечностей цилиндра, сцеплены между собою и присоединены к цилиндру. Пусть $ABCD$ (фиг. 176) — прямоугольник, $AE$ и $BF$ — две дуги парабол, описанных на оси $AB$ параметром, который относится к пространству $HG$, проходимому цилиндром, пока он при падении не



Фиг. 176.

получит той скорости, с которой он движется, как $HG : \frac{1}{2} AB$; также $CF$ и $DF$ — две другие дуги парабол, описанных на оси $CD$ параметром, вчетверо большим предыдущего, тогда при обращении этой фигуры около оси $EF$ образуется тело, коего средняя часть есть цилиндр, о котором идет дело, крайние же части $ABE$ и $CFD$ заключают в себе частицы покоящейся жидкости, которые связаны в два твердых тела и присоединены к цилиндру подобно носу и корме. Сопротивление тела $EACFDB$, движущегося по направлению своей оси $EF$ в сторону точки $E$, и будет приблизительно равно тому, о котором сказано в этом предложении, т. е. такому, коего отношение к силе, которая может произвести или уничтожить полное количество движения цилиндра в то время, пока он проходит равномерно путь $4AC$, приблизительно равно отношению плотности жидкости к плотности цилиндра. Сопротивление не может быть меньше этой силы, нежели в отношении $2 : 3$, по следствию 7 предложения XXXVI.

### Лемма V

*Если внутри трубы помещать последовательно цилиндр, шар и сфероид равных поперечных сечений так, чтобы их оси совпадали с осью трубы, то эти тела будут оказывать одинаковое препятствие течению воды через трубу.*

Ибо пространства между трубою, цилиндром, шаром и сфероидом, через которые протекает вода, равны между собою; через одинаковые же пространства вода протекает одинаково.

Так это происходит при предположении, что вся вода, текучесть которой не способствует скорейшему ее протеканию по трубе, заморожена над цилиндром, шаром или сфероидом, как это объяснено в следствии 7 предложения XXXVI.

### Лемма VI

*При тех же предположениях вышеуказанные тела испытывают одинаковое действие от протекающей по трубе воды.*

Это следует из леммы V и закона III движения, ибо вода и тела действуют друг на друга одинаково.

### Лемма VII

*Если вода в трубе находится в покое, эти же тела движутся с одинаковыми скоростями, то сопротивления, ими испытываемые, будут между собою равны.*

Это устанавливается предыдущею леммою, ибо относительное движение тел и воды остается без изменения.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Все изложенное относится и до всех круглых и выпуклых тел, оси коих совпадают с осью трубы. Некоторая разница может происходить от большего и меньшего трения, но в этих леммах предполагается, что тела вполне отполированные, что вязкость и трение среды равны нулю и что те части жидкости, косвенные и излишние движения которых могли бы возмущать, препятствовать и замедлять течение воды, находятся в относительном покое, как бы будучи примороженными к носовой и кормовой оконечности тел, как об этом сказано в предыдущем предложении. Поэтому в последующем дело идет о том наименьшем из всех сопротивлений, которое могут испытывать круглые тела заданного сечения.

Плавающие в жидкости тела, двигаясь прямолинейно, производят то, что жидкость перед носовой частью повышается, позади кормовой опускается, в особенности когда их обводы тупые, поэтому такие тела испытывают немного большее сопротивление, нежели при остром носе и корме. Когда тела движутся в упругой жидкости и если они спереди и сзади — тупого образования, то они немного более сгущают жидкость в передней части и немного более разрежают в кормовой, и поэтому испытывают большее сопротивление, нежели при остром носе и корме. Но в этих леммах и предложениях мы рассматриваем несжимаемые жидкости, а не упругие, и тела, не плавающие на поверхности, но глубоко погруженные. После того как сопротивление в неупругих жидкостях найдено, его следует немного увеличить для жидкостей упругих, каков воздух, как и для тел, плавающих на поверхности стоячей жидкости, каковы моря и озера.

### **Предложение XXXVIII. Теорема XXX**

*Сопротивление шара, движущегося равномерно в беспредельной, находящейся под давлением жидкости, относится к такой силе, которая может произвести или уничтожить полное количество движения шара в такое время, пока он проходит восемь третей длины своего диаметра, как плотность жидкости к плотности шара.*

Ибо объем шара составляет две трети объема описанного цилиндра, и следовательно, сила, которая может уничтожить полное количество движения цилиндра, пока он проходит длину, равную четырем диаметрам, уничтожит полное количество движения шара, пока он проходит две трети указанной длины, т. е. восемь третей своего диаметра. Сопротивление же цилиндра относится к этой силе приблизительно, как плотность жидкости к плотности цилиндра или шара по предложению XXXVII, по леммам же V, VI и VII сопротивление шара и цилиндра равны.[169]

*Следствие 1.* Сопротивление шаров, движущихся в находящихся под давлением безграничных жидкостях, пропорциональны плотностям жидкостей, квадратам скоростей и квадратам диаметров.

*Следствие 2.* Наибольшая скорость, которую может достичь шар, падающий в жидкости под действием кажущегося своего веса, такова, которую этот шар, падая под действием того же веса без сопротивления, получает пройдя путь, относящийся к четырем третям диаметра шара, как плотность шара относится к плотности жидкости. Ибо шар, двигаясь с этою скоростью

---

[169] Так как сопротивления шара и описанного около него цилиндра при гипотезе сплошной жидкости между собою равны, то будет, на основании формул (1) и (2) примечания 168:

$$R = \frac{1}{4} Sv^2 \Delta = \frac{1}{2} Shq \qquad (1)$$

где $S$ есть площадь большого круга шара, т. е. $S = \frac{\pi D^2}{4}$, когда $D$ означает диаметр шара, так что

$$R = \frac{1}{16} \pi D^2 v^2 \Delta = \frac{1}{8} \pi D^2 hq. \qquad (2)$$

В предложении XXXIV показано, что для жидкости редкой, т. е. состоящей из отдельных независимых частиц, сопротивление шара равно половине сопротивления цилиндра.

В следствии (2) рассчитывается предельная скорость, которой может достигнуть падающий в жидкости шар. Эта скорость $v_0$ определяется из равенства сопротивления и кажущегося веса:

$$\frac{1}{16} \pi D^2 v_0^2 \Delta = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} (\delta - \Delta) \cdot g$$

откуда

$$v_0^2 = \frac{8}{3} D \frac{\delta - \Delta}{\Delta} g. \qquad (3)$$

Ньютон эту формулу представляет иначе.

Так как масса шара есть $\frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{3} \cdot \delta$ и кажущийся его вес в жидкости

$$\frac{4}{3} \pi D^3 (\delta - \Delta) g$$

то ускорение $g_1$ при свободном падении шара в жидкости есть $\frac{\delta - D}{\delta} g$, и формулу (3) можно написать так:

$$v_0^2 = \frac{8}{3} Dg_1 \cdot \frac{\delta}{\Delta}.$$

Полагая $v_0^2 = 2Lg_1$, получим

$$L = \frac{4}{3} D \cdot \frac{\delta}{\Delta}$$

как это и высказано в следствии 2.

равномерно в продолжение времени своего падения, прошел бы путь, относящийся к восьми третям его диаметра, как плотность шара к плотности жидкости, отношение же силы тяжести, производящей это количество движения, к силе, которая могла бы произвести такое же количество движения в продолжение времени, пока шар, двигаясь равномерно с этою скоростью, проходит путь в восемь третей диаметра, равно отношению плотности жидкости к плотности шара, следовательно кажущаяся сила тяжести будет равна силе сопротивления, и значит, шар не может ускоряться.

*Следствие 3.* Когда заданы плотность шара и начальная его скорость, а также и плотность покоящейся и находящейся под давлением жидкости, в которой шар движется, то для всякого времени найдутся скорость шара, его сопротивление и пройденный им путь по следствию 7 предложения XXXV.

*Следствие 4.* Шар, движущийся в находящейся под давлением покоящейся жидкости одинаковой с ним плотности, утрачивает половину своего количества движения ранее, нежели пройдет путь, равный удвоенной длине своего диаметра, по тому же следствию 7.

### Предложение XXXIX. Теорема XXXI

*Отношение сопротивления шара, движущегося равномерно в жидкости, находящейся под давлением и заключенной в замкнутой трубе, к такой силе, которая могла бы произвести или уничтожить полное его количество движения в продолжение времени, пока он проходит восемь третей своего диаметра, приблизительно равно произведению следующих отношений: площади сечения трубы к избытку площади этого сечения над половиною площади большего круга шара, квадрату отношения площади сечения трубы к избытку этой площади над площадью большего круга шара и плотности жидкости к плотности шара.*

Получается из следствия 2 предложения XXXVII таким же образом, как и предыдущее предложение.

### *ПОУЧЕНИЕ*

В двух последних предложениях (так же как и в лем. V) предполагается, что вся вода впереди шара, текучесть которой увеличивает сопротивление, к нему примерзла; если же эта вода в жидком состоянии, то сопротивление будет немного более. Однако это увеличение сопротивления в рассматриваемых случаях не велико, и им можно пренебречь, ибо выпуклая поверхность шара исполняет ту же роль, как и лед.

**Предложение XL. Задача IX**

*Определить по наблюдаемым явлениям сопротивление, испытываемое шаром при движении в жидкой среде, находящейся под давлением.*

Пусть $A$ есть вес шара в пустоте, $B$ — его вес в жидкости, $D$ — диаметр шара, $F$—длина пути, так относящаяся к $\frac{4}{3}D$, как плотность шара к плотности жидкости, т. е. как $A:(A-B)$; $G$ — время, в течение которого шар, падая без сопротивления, проходит путь $F$, и $H$ — скорость, которую он в этом случае получает. Тогда $H$ будет тою наибольшею скоростью, которую шар может достигнуть под действием веса $B$ в сопротивляющейся среде; по следствию 2 предложения XXXVIII, сопротивление, испытываемое шаром при этой скорости, будет равно весу $B$; сопротивление же при всякой другой скорости будет относиться к весу $B$, как квадрат этой скорости к квадрату наибольшей скорости $H$, по следствию 1 предложения XXXVIII. Таково сопротивление, происходящее от инерции вещества жидкости.

Сопротивление же, которое происходит от упругости, вязкости и трения жидкости, исследуется следующим образом: шар пускаетсн свободно падать в жидкости под действием своего веса $B$; пусть $P$ есть время падения, выраженное также в секундах, как и время $G$. Определяется число $N$, соответствующее логарифму $0.4342944819 \cdot \frac{2P}{G}$, и пусть $L$ означает логарифм числа $\frac{N+1}{N}$; тогда, если скорость, достигнутая при падении, будет $\frac{N-1}{N+1}H$, пройденное при падении пространство будет [170]

$$\frac{2P \cdot F}{G} - 1.3862943611\,F + 4.605170186\,L \cdot F.$$

---

170 Обозначая через $g$ — ускорение силы тяжести и через $g_1$ — ускорение, которое имело бы тело, двигаясь в жидкости под действием кажущегося своего веса так, что при ньютоновом обозначении $g_1 : g = B : A$; тогда, обозначая через $v_0$ — предельную скорость, можем написать уравнение движения тела

$$m\frac{dv}{dt} = m\left(g_1 - g_1\frac{v^2}{v_0^2}\right)$$

откуда получаем

$$\frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{g_1}{v_0^2}\,dt$$

полагая затем

$$\tau = \frac{v_0}{g_1} \quad \text{и} \quad \frac{2}{\tau} = n$$

имеем

$$\log\frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{2t}{\tau}$$

или иначе:

$$v = \frac{e^{nt} - 1}{e^{nt} + 1}\,v_0 \tag{1}$$

Если жидкость достаточно глубока, то членом $4.605170186\,L \cdot F$ можно пренебречь, и пройденное пространство составит приблизительно

$$\frac{2P \cdot F}{G} - 1.3862943611\,F.$$

Все это следует из предложения IX этой книги и его следствий, в предположении, что шар никакого другого сопротивления не испытывает, как только происходящее от инерции материи. Если же, сверх того, он будет испытывать еще какое-либо сопротивление, то его падение будет происходить медленнее, и по этому замедлению можно определить и величину этого добавочного сопротивления.

Чтобы проще находить скорость и длину пути тела, падающего в жидкости, я составил таблицу (стр. 456), в которой первый столбец заключает время падения, второй дает приобретаемую при падении скорость, принимая наибольшую скорость за 100 000 000, в третьем показано пространство, пройденное за это время падающим телом, принимая за $2F$ то пространство, которое тело описывает в продолжение времени $G$, двигаясь равномерно с наибольшею скоростью, в четвертом показано пространство, проходимое за время, указанное в первом столбце при д ижении с наибольшею скоростью. Числа четвертого столбца суть $\frac{2P}{G}$; вычитанием из них числа

$$1.3862944 - 4.6051702\,L$$

получаются числа третьего столбца. Эти числа надо помножить на $F$, чтобы получить пространства, пройденные падающим телом. Сверх того, прибавлен еще пятый столбец, заключающий пространства, проходимые телом при падении в пустоте под действием силы, равной его кажущемуся весу $B$ (см. таблицу на стр. 456).

---

Высота падения

$$h = \int_0^t v\,dt = v_0 \int_0^t \frac{\epsilon^{nt} - 1}{\epsilon^{nt} + 1}\,dt = v_0 t + \frac{2v}{n} \log \frac{1 + \epsilon^{nt}}{\epsilon^{nt}} - \frac{2r_0}{n} \log 2. \tag{2}$$

Ньютон формулы (1) и (2) пишет иначе, а именно: время $t$ у него обозначено через $P$, величина $\tau$ — через $G$, величина $v_0\tau$ обозначена через $2F$, величина $\epsilon^{nt}$ обозначена через $N$, логарифмы он предполагает обыкновенные, число 0.43429... есть модуль обыкновенных логарифмов, т. е. $\log_{10} e$, число $4.60517\ldots = 2 \log 10$, число 1.38629... есть $2 \log 2$; таким образом формула, приведенная в тексте, есть не что иное, как формула (2), величины $F$ и $G$ вычисляются по формулам

$$F = \frac{3}{4} D \cdot \frac{A}{A - B} = \frac{1}{2} g \frac{B}{A} \cdot G^2$$

и

$$G^2 = \frac{2F \cdot A}{B \cdot g}.$$

| Времена $P$ | Скорости падающего тела в жидкости | Пространства, пройденные при падении в жидкости | Пространство, которое тело прошло бы, двигаясь с наиб. скоростью | Пространство, проходимое при падении в пустоте |
|---|---|---|---|---|
| 0,001 $G$ | $99999\frac{29}{30}$ | 0,000001 $F$ | 0,002 $F$ | 0,000001 $F$ |
| 0,01 | 999967 | 0,0001 | 0,02 | 0,0001 |
| 0,1 | 9966799 | 0,0099834 | 0,2 | 0,01 |
| 0.2 | 19737532 | 0,0397361 | 0,4 | 0,04 |
| 0,3 | 29131261 | 0,0886815 | 0,6 | 0,09 |
| 0,4 | 37994896 | 0,1559070 | 0,8 | 0,16 |
| 0,5 | 46211716 | 0,2402290 | 1,0 | 0,25 |
| 0,6 | 53704957 | 0,3402706 | 1,2 | 0,36 |
| 0,7 | 60436778 | 0,4545405 | 1,4 | 0,49 |
| 0,8 | 66403677 | 0,5815071 | 1,6 | 0,64 |
| 0,9 | 71629787 | 0,7196609 | 1,8 | 0,81 |
| 1,0 | 76159416 | 0,8675617 | 2,0 | 1,0 |
| 2,0 | 96402758 | 2,6500055 | 4,0 | 4,0 |
| 3,0 | 99505475 | 4,6186570 | 6,0 | 9,0 |
| 4,0 | 99932930 | 6,6143765 | 8,0 | 16,0 |
| 5,0 | 99990920 | 8,6137964 | 10,0 | 25,0 |
| 6,0 | 99998771 | 10,6137179 | 12,0 | 36,0 |
| 7,0 | 99999834 | 12,6137073 | 14,0 | 49,0 |
| 8,0 | 99999980 | 14,6137059 | 16,0 | 64,0 |
| 9,0 | 99999997 | 16,6137057 | 18,0 | 81,0 |
| 10,0 $G$ | $99999999\frac{3}{5}$ | 18,6137056 $F$ | 20,0 $F$ | 100,0 $F$ |

## *ПОУЧЕНИЕ*

Чтобы исследовать сопротивление жидкостей по опытам, я изготовил деревянный сосуд квадратного сечения, шириною и длиною внутри по 9 англ. дюймов, глубиною же $9^1/_2$ футов, наполнил его дождевою водой и замечал время падения шаров, сделанных из воска с свинцовым ядром внутри; высота падения была 112 дюймов. Английский кубический фут заключает 76 римских фунтов дождевой воды, кубический же дюйм — $\frac{19}{36}$ унции, т. е. $253\frac{1}{3}$ грана; водяной шар, коего диаметр 1 дюйм, весит 132.645 грана в воздухе или 132.8 грана в пустоте; объем всякого другого шара пропорционален избытку его веса в пустоте над весом его в воде.

*Опыт 1.* Шар, вес которого в воздухе был $156\frac{1}{4}$ гранов и 77 гранов в воде, прошел полную высоту 112 дюймов в 4 секунды. При повторении опыта шар опять падал в продолжение тех же 4 секунд.

Вес шара в пустоте есть $156\frac{13}{38}$ гранов, и избыток его веса над весом воды $79\frac{13}{38}$ гранов; отсюда следует, что диаметр этого шара равен 0.84224 дюйма.

Плотность воды относится к плотности этого шара, как избыток его веса над весом воды к весу самого шара; в таком же отношении находятся и восемь третей диаметра шара (т. е. 2.24597 дюйма) к длине $2F$, которая поэтому равна 4.4256 дюйма. Шар в продолжение 1 секунды, падая под действием полного своего веса $156\frac{13}{38}$ гранов в пустоте, проходит путь, равный $193\frac{1}{3}$ дюймам; под действием силы в 77 гранов в то же время, без сопротивления, прошел бы в воде 95.219 дюймов, в продолжение же времени $G$, которое составляет от 1 секунды такую же долю, как $\sqrt{F}$ от $\sqrt{95.219}$, т. е. $\sqrt{\frac{2.2128}{95.219}}$, шар пройдет путь, равный 2.2128, и достигнет своей наибольшей возможной скорости в воде. Следовательно, время $G = 0.15244$ секунды. В продолжение этого времени $G$, двигаясь с своею наибольшей скоростью $H$, шар проходит путь $2F = 4.4256$ дюйма, следовательно в продолжение 4 секунд он прошел бы путь 116.1245 дюймов. Вычитая пространство $1.3862944 \cdot F = 3.0676$ дюйма, получим в остатке 113.0569 дюймов, которые должен бы пройти шар в 4 секунды, двигаясь в воде, заключенной в безграничном сосуде. Эту величину надо уменьшить, в виду узкости сосуда, в отношении, равном произведению корня квадратного из отношения площади сечения сосуда к избытку этой площади над половиною площади большого круга шара на отношение площади того же сечения к избытку ее над площадью большого круга шара, что составляет $1:0.9914$. Сделав это, получаем 112.08 дюймов, которые и должен бы проходит шар, падая в продолжение 4 секунд в упомянутом деревянном сосуде, согласно теории. Прошел же он при испытании 112 дюймов.

*Опыт 2.* Три равных шара, вес каждого из которых был в воздухе $76\frac{1}{3}$ гранов и $5\frac{1}{16}$ гранов в воде, пускались последовательно; каждый из них падал в воде в продолжение 15 секунд, проходя путь 112 дюймов.

Производя расчет, получаем: вес шара в пустоте $76\frac{5}{12}$ гранов, избыток этого веса над весом в воде $71\frac{17}{48}$ гран, диаметр шара равен 0.81296 дюйма, восемь третей этого диаметра равно 2.16789 дюйма, пространство $2F = 2.3217$ дюйма, пространство, проходимое шаром под действием силы, равной его весу в воде, т. е. $5\frac{1}{16}$ гранам, в 1 секунду без сопротивления равно 12.808 дюймам и время $G = 0.301056$ секунды. Следовательно шар при наибольшей скорости, которую он может иметь в воде, двигаясь под действием своего кажущегося веса $5\frac{1}{16}$ гранов, — в продолжение времени 0.301056 секунды пройдет путь 2.3217 дюйма, в продолжение же 15 секунд — путь 115.678 дюймов.

Вычитая величину $1.3862944\,F = 1.609$ дюйма, получаем в остатке 114.069 дюймов, которые шар прошел бы в 15 секунд в весьма широком сосуде. Вследствие узкости сосуда надо вычесть около 0.895 дюйма, таким образом остается 113.174 дюймов, которые шар должен бы пройти в продолжение 15 секунд, согласно теории, при падении в рассматриваемом сосуде. Опыт дал 112 дюймов. Разница — нечувствительная.

*Опыт 3.* Три равных шара, веса коих составляли в воздухе 121 гран и в воде 1 гран, пускались последовательно; время их падения с высоты 112 дюймов в воде составило 46 секунд, 47 секунд, 50 секунд.

По теории эти шары должны были бы падать приблизительно в 40 секунд. Что они падали более продолжительно, может быть приписано: или меньшей величине при медленных движениях сопротивления, которое происходит от инерции материи, по сравнению с сопротивлением, происходящим от других причин, или же прилипанию к шарам некоторых пузырьков воздуха, или же расширению воска от теплоты руки или погоды, или же незначительным погрешностям взвешивания шаров в воде, а чему именно, — я считаю неопределенным. Таким образом вес шара в воде должен составлять несколько гранов, чтобы опыт мог быть произведен с уверенностью и был бы достоверным.

*Опыт 4.* Я начал производить предыдущие опыты ранее, нежели я обладал теориею, изложенною в предыдущих предложениях. Но затем, для исследования найденной теории, я изготовил деревянный сосуд, шириною внутри $8\frac{2}{3}$ дюймов и глубиною $15\frac{1}{3}$ футов, и сделал из воска со свинцом внутри три шара, весом по $139\frac{1}{4}$ гранов в воздухе и $7\frac{3}{8}$ гранов в воде.

Я пускал их падать в воде, измеряя время падения помощью маятника, делавшего полусекундные размахи. Шары были холодными и сохранялись на холоде некоторое время как перед взвешиванием, так и перед падением; тепло делает воск менее плотным и, значит, уменьшает его кажущийся вес в воде, и этот менее плотный воск от холода не возвращается мгновенно к первоначальной своей плотности. Прежде чем пустить шары падать, их вполне погружали в воду, чтобы при начале движения их не ускорялось действием веса выступающих из воды частей, и когда они были вполне погружены и находились в покое, то их пускали самым осторожным образом, чтобы не сообщить никакого толчка рукою, пускающею их. Они падали соответственно в продолжение $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 и 51 размах маятника, проходя высоту в 15 футов 2 дюйма. Однако погода была несколько холоднее, нежели при взвешивании шаров, поэтому я повторил испытание в другой день, и время падения шаров составило $49\frac{1}{2}$, 50, 51, 53 размаха. При многократном повторении испытания шары падали по большей части в продолжение времени $49\frac{1}{2}$ и 50 размахов маятника. Когда же их падение было более медленное, то я подозреваю, что они замедлялись от ударов о стенки сосуда.

Производя расчет согласно теории, получаем: вес шара в пустоте равен 139.67 гранам, избыток этого веса над весом в воде равен 132.275 гранам, диаметр шара равен 0.99868 дюйма, восемь третей диаметра равны 2.66315 дюймам, пространство $2F = 2.8066$ дюйма. Пространство, проходимое шаром в 1 секунду, при падении без сопротивления под действием силы в 7.125 гранов равно 9.88164 дюймам, и время $G = 0.376843$ секунды. Следовательно, шар, двигаясь с наибольшею скоростью, которую он только может получить в воде под действием силы в 7.125 гранов, пройдет в продолжение 0.376843 секунды пространство, равное 2.8066 дюймам, в продолжение же 1 секунды — пространство, равное 7.44766 дюймам, и в 25 секунд, т. е. в продолжение времени 50 размахов, — пространство, равное 186.1915 дюймам. Вычитая величину $1.386294F = 1.9454$ дюйма, получим в остатке 184.2461 дюйма, которые в продолжение этого времени шар прошел бы в весьма широком сосуде.

Вследствие узкости нашего сосуда, это пространство надо уменьшить в отношении, которое получается, если корень квадратный из отношения площади сечения сосуда к избытку этой площади над половиною площади большого круга шара умножить на отношение площади того же сечения к избытку ее над площадью большого круга шара; тогда получится пространство, равное 181.86 дюймам, которое по теории должен бы проходить шар в нашем сосуде в продолжение 50 размахов. На самом же деле при испытании он проходит 182 дюйма в продолжение 49.5 или 50 размахов.

*Опыт 5.* Четыре шара, весом по $154\frac{3}{8}$ грана в воздухе и $21\frac{1}{2}$ гран в воде, падали при многократных испытаниях в продолжение 28.5, 29, 29.5, 30 размахов, а иногда 31, 32 и 33, проходя пространство в 15 футов 2 дюйма.

По теории время их падения должно бы приблизительно составлять 29 размахов.

*Опыт 6.* Пять шаров, весом по $212\frac{3}{8}$ гранов в воздухе и $79\frac{1}{2}$ гранов в воде, при нескольких испытаниях падали в продолжение 15, 15.5, 16, 17 и 18 размахов, проходя ту же высоту 15 футов 2 дюйма.

По теории время их падения должно бы составлять приблизительно 15 размахов.

*Опыт 7.* Четыре шара, весом в воздухе по $293\frac{3}{8}$ грана и в воде по $35\frac{7}{8}$ гранов, при многих опусканиях падали в воде, проходя путь 15 футов 2 дюйма в продолжение 29.5, 30, 30.5, 31, 32 и 33 размахов.

По теории время падения их должно бы составлять приблизительно 28 размахов.

Исследуя причину, почему шары того же самого веса и величины падают одни быстрее, другие медленнее, я напал на следующее: когда шары пускаются и начинают падать, то они поворачиваются около своих центров, причем опускается вперед та сторона, которая тяжелее, вследствие чего происходит колебательное движение. При колебаниях шар сообщает воде большее количество движения, нежели опускаясь без колебания, и сообщая таковое, утрачивает и часть того количества движения, с которым он должен бы опускаться; сообразно большему или меньшему колебанию шар более или менее замедляется. Кроме того, шар при этом получает боковое движение в сторону, обратную той, в которую опускается его бок, приближается к стенкам сосуда и иногда даже о них ударяется. Это колебание для тяжелых шаров сильнее и для бо́льших в большей степени возмущает воду. Поэтому, чтобы уменьшить колебания шаров, я сделал из воска и свинца новые шары, помещая свинец с одной стороны шара близ поверхности его, и пускал шары так, чтобы при начале движения более тяжелая сторона была внизу, насколько это оказывалось возможным. Таким образом, колебания стали гораздо меньше, нежели прежде, и время падения шаров стало менее разнообразно, как то видно из следующих испытаний.

*Опыт 8.* Четыре шара, весом в воздухе по 139 гранов и в воде по 6.5, при многих опусканиях падали в продолжение не более 52 и не менее 50 размахов маятника, большею же частью в продолжение около 51, проходя путь в 182 дюйма.

По теории время падения должно бы составлять около 52 размахов.

*Опыт 9.* Четыре шара, весом по 273.25 грана в воздухе и по 140.75 в воде, при многих опусканиях падали в продолжение не более 13 размахов и не менее 12, проходя путь в 182 дюйма.

По теории эти шары должны были бы падать в продолжение времени приблизительно $11\frac{1}{3}$ качаний.

*Опыт 10.* Четыре шара, весом по 384 грана в воздухе и по 119.5 в воде, при многих опусканиях падали в продолжение 17.75, 18, $18\frac{1}{2}$ и 19 размахов, проходя путь в 181.5 дюйма, и когда время их падения составляло 19 размахов, то я иногда слышал их удары о стенки сосуда ранее, нежели они достигали его дна.

По теории время их падения должно бы составлять приблизительно $15\frac{5}{9}$ размахов.

*Опыт 11.* Три равных шара, весом по 48 гранов в воздухе и по $3\frac{29}{32}$ в воде, при многих опусканиях падали в продолжение $43\frac{1}{2}$, 44, 44.5, 45 и 46 размахов, по большей части 44 и 45, проходя путь приблизительно в 182.6 дюйма.

По теории время их падения должно бы составлять около $46\frac{5}{9}$ размаха.

*Опыт 12.* Три равных шара, весом по 141 гран в воздухе и по $4\frac{3}{8}$ в воде, при многих опусканиях падали в продолжение 61, 62, 63, 64 и 65 размахов, проходя высоту в 182 дюйма.

По теории время их падения должно бы составлять приблизительно 64.5 размаха.

Из этих опытов обнаруживается, что когда шары падают медленно, как в опытах: 2-м, 4-м, 5-м, 8-м, 11-м и 12-м, времена падения даются теорией правильно; когда же шары падают быстрее, как в опытах 6-м, 9-м и 10-м, то сопротивление растет несколько быстрее, нежели в отношении квадратов скорости. При падении шары немного колеблются; это колебание для шаров, более легких и падающих медленно, вследствие слабости движения, быстро прекращается; для более же тяжелых и больших, вследствие значительности движения, продолжается долее, прекращается окружающей водой лишь после нескольких колебаний. Кроме того, шары, более быстро движущиеся, испытывают меньшее давление на заднюю свою часть, и если скорость постоянно увеличивать, то наконец за ними образовалось бы пустое пространство, если только одновременно не увеличивалось бы и давление, под которым жидкость находится. Это давление на жидкость по предложениям XXXII и XXXIII должно увеличиваться пропорционально квадрату скорости, для того чтобы и сопротивление следовало такой же пропорции. Так как это не имеет места, то более быстро движущиеся шары испытывают сзади несколько меньшее давление, и вследствие этого недостатка давления их сопротивление несколько большее, нежели то, которое пропорционально квадрату скорости.

Таким образом теория согласуется с наблюдаемыми явлениями при падении тел в воде; остается исследовать явления падения тел в воздухе.

*Опыт 13*. С вершины собора Св. Павла в Лондоне в июле 1710 г. одновременно пускали падать два стеклянных шара, один наполненный ртутью, другой — воздухом. При падении пройденная ими высота составляла 220 англ. футов. Деревянная доска была подвешана на петлях за один из концов, другой же ее конец удерживался деревянной чекой; оба шара, положенные на эту доску, пускались одновременно, для чего выдергивали чеку помощью железной проволоки, опущенной до земли; тогда доска, удерживаясь лишь на железных петлях, поворачивалась; в тот же самый момент времени натяжением той же проволоки пускался маятник, делавший размах в 1 секунду. Диаметры шаров и времена их падения показаны в следующей таблице:

| Шары, заполненные ртутью | | | Шары, заполненные воздухом | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Веса | Диаметры | Времена падения | Веса | Диаметры | Времена падения |
| Граны | Дюймы | Секунды | Граны | Дюймы | Секунды |
| 908 | 0,8 | 4 | 510 | 5,1 | $8\frac{1}{2}$ |
| 983 | 0,8 | 4(—) | 642 | 5,2 | 8 |
| 866 | 0,8 | 4 | 599 | 5,1 | 8 |
| 747 | 0,75 | 4(+) | 515 | 5,0 | $8\frac{1}{4}$ |
| 808 | 0,75 | 4 | 483 | 5,0 | $8\frac{1}{2}$ |
| 784 | 0,75 | 4(+) | 641 | 5,2 | 8 |

Наблюденные времена требуют некоторой поправки; шары, заполненные ртутью, в продолжение 4 секунд проходят (по теории *Галилея*) путь 257 англ. футов, а 220 футов — в 3 секунды 42 терции. Следовательно, деревянная доска не поворачивалась около своих петель так быстро, как было желательно, и вследствие такого замедленного поворота задерживала начало падения шаров, ибо шары располагались на доске близ ее середины и даже немного ближе к петлям, нежели к чеке. Таким образом времена падения удлинялись приблизительно на 18 терций и, значит, должны быть исправлены, вычитая эти терции, в особенности для больших шаров, которые, вследствие величины своего диаметра, оставались несколько далее на доске при повороте ее. Делая эту поправку, получим следующие времена падения для больших шаров: $8''12'''$, $7''42'''$, $7''42$, $7''57'''$, $8''12'''$, $7''42'''$. Таким образом пятый из заполненных воздухом шаров, диаметром в 5 дюймов и весом 483 грана, падал с высоты в 220 футов в продолжение $8''\ 12'''$. Вес воды в объеме, равном этому шару, составляет 16600 гранов, вес воздуха равен $\frac{16600}{860}$ т. е. 19.3 гранов, поэтому вес шара в пустоте есть 502.3 грана; отношение этого веса к весу соответствующего объема воздуха равно 502.3: 19.3. В таком же отношении находится $2F$ к восьми третям диаметра шара, т. е. к $13\frac{1}{3}$ дюймам. Отсюда следует, что $2F = 28$ футам 11 дюймам. При падении в пустоте под действием полного своего веса 502.3 грана шар проходит в первую секунду $193\frac{1}{3}$ дюйма, под действием же силы 483 грава пройдет 185.905 дюймов, путь же $F$, равный 14 футам 5.5 дюймам, при этой же силе и в пустоте шар пройдет в 57 секунд 58 терций и приобретет ту наибольшую скорость, которой может достичь в воздухе. С этой скоростью шар в 8 секунд 12 терций пройдет путь в 245 футов $5\frac{1}{3}$ дюймов. Вычитая $1.3863\ F$, иначе 20 футов $\frac{1}{2}$ дюйма, получим в остатке 225 футов 5 дюймов. Это и есть то пространство, которое шар должен проходить согласно теории в продолжение 8 секунд 12 терций при своем падении в воздухе. По испытании же оказалось 220 футов. Разница нечувствительная.

Делая подобный же расчет для прочих шаров, я составил следующую таблицу (см. таблицу на стр. 464).

*Опыт 14.* В июле 1719 г. Г. Дезагюлье (Desaguliers) произвел вновь подобные испытания, придав свиным пузырям шаровой вид при помощи полой деревянной шаровой формы, в которую помещались предварительно размоченные пузыри и раздувались воздухом и после

| Веса шаров, в граммах | Диаметры шаров, в дюймах | Времена падения с высоты 220 фут. | Пространства, проходимые по теории | | Избытки | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | фут. | дюйм. | фут. | дюйм. |
| 510 | 5,1 | 8″ 12‴ | 226 | 11 | 6 | 11 |
| 642 | 5,2 | 7 42 | 230 | 9 | 10 | 9 |
| 599 | 5,1 | 7 42 | 227 | 10 | 7 | 10 |
| 515 | 5 | 7 57 | 224 | 5 | 4 | 5 |
| 483 | 5 | 8 12 | 225 | 5 | 5 | 5 |
| 641 | 5,2 | 7 42 | 230 | 7 | 10 | 7 |

просушки вынимались. Их пускали затем падать с вершины фонаря над куполом того же храма, именно с высоты 272 фута, пуская в тот же момевт и свинцовый шар, вес которого был около 2 римских фунтов. Одни наблюдатели, стоявшие вверху храма, откуда пускались шары, замечали полное время падения, другие же, стоявшие внизу, замечали разность между временами падения свинцового шара и пузыря. Времена замечались по маятникам, делавшим полусекундные размахи. Один из наблюдателей, стоявших внизу, имел пружинный маятник, делавший четверть-секундные размахи, у другого была машива иначе, но весьма тщательно, устроенная, также с маятником, делавшим четверть-секундные размахи. Подобную же машину имел и один из наблюдателей на верху храма. Все эти инструменты были устроены так, что по желанию они или пускались в ход, или останавливались. Свинцовый шар падал приблизительно в $4^1/_4$ секунды. Прилагая это время к наблюденной разности времев падения, получали полное время падения пузыря.

Промежутки времени в секундах, через которые достигли земли пять пузырей после свинцового шара, были при первом ряде испытавий: $14\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$, $14\frac{5}{8}$, $17\frac{3}{4}$ и $16\frac{7}{8}$, при втором же ряде: $14\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{4}$, 14, 19, $16\frac{3}{4}$, прибавляя $4\frac{1}{4}$ — время падения свинцового шара, получим полные времена падения пузырей для первого ряда: 19, 17, $18\frac{7}{8}$, 22 и $21\frac{1}{8}$ секунд, для второго ряда: $18\frac{3}{4}$, $18\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{4}$, $23\frac{1}{4}$ и 21 секунд. Наблюденные же времена на вершине храма были для первого ряда: $19\frac{3}{8}$, $17\frac{1}{4}$, $18\frac{3}{4}$, $22\frac{1}{8}$, $21\frac{5}{8}$ и для второго: 19, $18\frac{5}{8}$, $18\frac{3}{8}$, 24 и $21\frac{1}{4}$. Пузыри не всегда падали нрямо, а иногда отклонялись и колебались в ту и другую сторову во время падевия. Вследствие этих боковых движевий времена падения увеличивались иногда ва полсекунды, а иногда и на целую секувду.

Наиболее прямо падали при первом ряде испытаний пузыри второй и четвертый, при втором ряде — первый и третий. Пятый пузырь был шершавый, вследствие чего он несколько замедлялся. Диаметры пузырей я вывел из обмера их окружностей помощью тонкой нити, обвиваемой дважды. Я сопоставил теорию и опыт в следующей таблице, принимая отношение плотности воздуха к плотности дождевой воды равным 1 : 860 и рассчитав длину пути, которую шары должны бы проходить в продолжение времени своего падения.

| Веса пузырей, в граммах | Диаметры, в дюймах | Времена падения с высоты 272 футов, в секундах | Пространства, проходимые по теории | | Разность между теорией и наблюд. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | фут. | дюйм. | фут. | дюйм. |
| 128 | 5.28 | 15 | 271 | 11 | — 0 | 1 |
| 156 | 5,19 | 17 | 272 | $\frac{1}{2}$ | + 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $137\frac{1}{2}$ | 5,3 | $18\frac{1}{2}$ | 272 | 7 | + 0 | 7 |
| $97\frac{1}{2}$ | 5.26 | 22 | 277 | 4 | + 5 | 4 |
| $99\frac{7}{8}$ | 5 | $21\frac{1}{8}$ | 282 | 0 | +10 | 0 |

Таким образом сопротивление движению шаров как в воде, так и в воздухе представляется в общем весьма правильно нашей теорией, причем оно оказывается при одинаковых скоростях и размерах шаров пропорциональным плотности жидкости.

В поучении к отделу VI этой книги показано опытами над маятниками, что сопротивление, испытываемое равными и двигающимися с одинаковыми скоростями в воздухе, воде и ртути шарами, пропорционально плотности жидкости. То же самое получено гораздо более точно по опытам с падением тел в воздухе и в воде, ибо маятник при каждом своем колебании в озбуждает в жидкости движение, направленное навстречу возвращающемуся маятнику; происходящее от этого сопротивление, а также и действующее на нить подвеса увеличивают сопротивление маятника, и оно получается больше, нежели по опытам с падением тел.

Так, по опытам с маятником, изложенным в указанном поучении, шар одинаковой плотности с водою при проходе в воздухе пути, равного своему полудиаметру, должен потерять $\frac{1}{3342}$ своего количества движения. По теории же, изложенной в отделе VII, подтвержденной опытами с падением тел, тот же шар, при прохождении того же пути, должен утратить $\frac{1}{4586}$ своего количества движения, предполагая, что плотность воздуха относится к плотности воды, как 1 к 860. Таким образом по опытам с маятниками сопротивление получается больше (по указанной выше причине), нежели по опытам с падением тел, в отношении приблизительно 4 к 3.

Так как сопротивления маятников, находящихся в воздухе, воде и ртути, от подобных причин увеличиваются подобным же образом, то пропорциональность сопротивлений в этих срединах обнаруживается с достаточною точностью как по опытам над маятниками, так и над падением тел. Отсюда можно заключить, что сопротивление тел, испытываемое при движении в каких угодно жидких срединах, при прочих, одинаковых условиях, пропорционально плотности этих жидкостей.

После того как все это установлено, можно показать, какую приблизительно часть своего количества движения утрачивает в продолжение заданного времени шар, пущенный двигаться в какой-либо жидкости; Пусть $D$ — диаметр шара, $V$ — его скорость при начале движения, $T$ — время, в продолжение которого шар проходит в пустоте, двигаясь со скоростью $V$, путь, относящийся к $\frac{8}{3}D$, как плотность шара к плотности жидкости; тогда шар, будучи брошен в этой жидкости, в продолжение какого-либо иного времени $t$ утрачивает в своей первоначальной скорости часть, равную $\frac{tV}{T+t}$, и остается скорость $\frac{TV}{T+t}$, проходит же он путь, который относится к пути, проходимому в пустоте при движении со скоростью $V$ в продолжение того же времени $t$, как логарифм числа $\frac{T+t}{T}$, умноженный на число 2.302 585 093, к числу $\frac{t}{T}$, что показано в следствии 7 предложения XXXV.

Для медленных движений сопротивление может быть немного менее, так как шаровая форма тела более приспособлена к такому движению, нежели цилиндр, описанный около этого шара.

Для быстрых движений сопротивление может быть немного более, ибо упругость и давление на жидкость не увеличиваются в отношении квадратов скоростей. Но здесь я не вхожу в рассмотрение этих подробностей.

Хотя бы воздух, вода, ртуть и подобные им жидкости от разделения их частиц до бесконечности становились бы все более и более тонкими и образовали бы средины бесконечно жидкие, все-таки они оказывали бы движущимся телам лишь немногим меньшее сопротивление. Ибо то сопротивление, о котором шло дело в предыдущих предложениях, происходит от инерции материи, инерция же вещества существенна для тел и всегда пропорциональна количеству вещества. Подразделением частиц жидкости может быть несколько уменьшено сопротивление, происходящее от ее сцепления и трения частиц, количество же вещества не уменьшается от разделения частиц его; при неизменности же количества материи сохраняется и ее сила инерции, которой пропорционально рассматриваемое сопротивление. Чтобы уменьшилось это сопротивление, надо чтобы уменьшилось количество вещества в том пространстве, через которое тело движется. Поэтому небесные пространства, через которые планетные и кометные шары повсюду непрестанно движутся совершенно свободно и без всякого заметного уменьшения своего количества движения, совершенно лишены какой-либо телесной жидкости, за исключением, может быть, чрезвычайно тонких паров и пронизывающих эти пространства световых лучей.

Брошенные тела возбуждают движение в жидкости при своем прохождении; образующееся в ней при этом количество движения происходит от избытка давления жидкости на передние части этих тел над давлением ее на задние их части и не может быть для тончайшей жидкости меньше, нежели в отношении ее плотности к плотности воздуха, воды или ртути. Вместе с тем этот избыток давления не только возбуждает движение в жидкости, но действует и на брошенное тело, замедляя движение его: поэтому сопротивление во всякой среде пропорционально количеству движения, возбужденному движущимся телом в среде, и не может быть в тончайшем эфире меньше, нежели в отношении плотности этого эфира к плотности воздуха, воды или ртути, по сравнению с сопротивлением этих жидкостей.

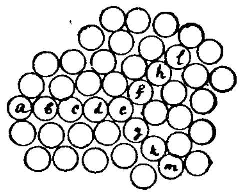
## ОТДЕЛ VIII

## О ДВИЖЕНИИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕМСЯ ЧЕРЕЗ ЖИДКОСТИ

### Предложение XLI. Теорема XXXII

*Давление не распространяется через жидкость прямолинейно, если только частицы жидкости не лежат на одной прямой.*

Если частицы $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ (фиг. 177) расположены на одной прямой, то давление может распространяться прямо от $a$ к $e$. Если же частица $e$ будет действовать на косвенно лежащие частицы $f$ и $g$ косвенно, то эти частицы не иначе выдержат приложенное давление, как будучи поддерживаемы последующими частицами $h$ и $k$, и насколько они ими поддерживаются, настолько же они нажимают и на эти поддерживающие частицы; эти последние, в свою очередь, не иначе выдержат давление, как при поддержке дальнейших частиц $l$ и $m$, на которые они давят, и так далее до бесконечности.




Фиг. 177.

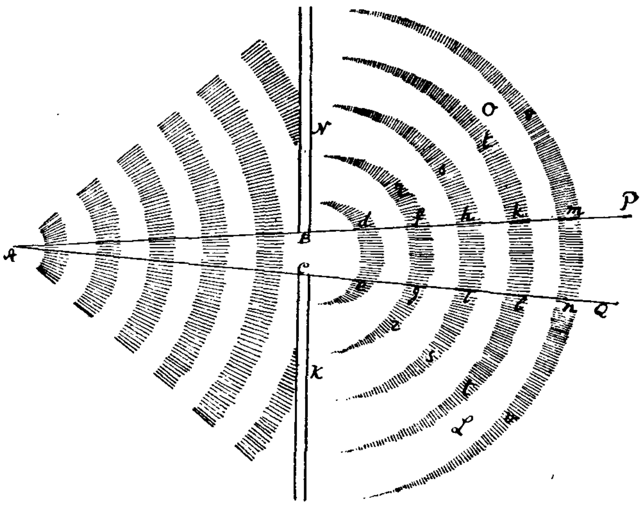
Следовательно, давление, как только оно достигнет до частиц, не лежащих на одной прямой, начнет уклоняться и распространяется косвенно до бесконечности. Начав распространяться косвенно, если оно опять встретит частицы, не лежащие на одной прямой, оно вновь уклонится, и так это будет происходить всякий раз, как только встретятся частицы, не лежащие на одной прямой.

*Следствие.* Если некоторая часть давления, распространяющегося по жидкости из заданной точки, будет задержана каким-либо препятствием, то остающаяся не задержанная препятствием часть уклонится в пространство, находящееся за препятствием. Это может быть доказано так: пусть из точки $A$ (фиг. 178) распространяется давление по всем направлениям, притом, если это возможно, по прямым линиям, и пусть они все, кроме той конечной части $APQ$, которая проходит через круговое отверстие $BC$, задерживаются препятствием $NBCK$, имеющим отверстие в $BC$. Разделим конус $APQ$ поперечными плоскостями $de$, $fg$, $hi$ на отсеки; конус $ABC$, распространяя давление, действует на ближайший отсек $degf$ по поверхности $de$, этот отсек по поверхности $fg$ действует на следующий $fghi$, который, в свою очередь, действует на третий, и так далее до бесконечности; по третьему закону движения очевидно, что первый отсек $defg$ противодействием второго отсека $fghi$ нажимается по поверхности $fg$ настолько же, насколько он сам давит на этот второй, следовательно отсек $degf$ сжимается между конусом $Ade$ и отсеком $fhig$ с двух сторон; поэтому (предл. XIX, след. 6) он не может сохранить своей формы, если только не будет сжиматься отовсюду с одинаковой силой. Таким образом, вследствие действующего на поверхности $de$ и $fg$ давления, он должен бы раздаваться по боковым поверхностям $df$ и $eg$, и так как этот отсек не твердый, а вполне жидкий, то он и стал бы по этой поверхности растекаться или расширяться, если бы не было окружающей жидкости, которая воспрепятствовала бы этому стремлению. Следовательно, от своего стремления растечься этот отсек оказывает по боковой поверхности $df$ и $eg$ такое же давление на окружающую жидкость, как и на отсек $fghi$, и значит, давление распространяется от боков $df$ и $eg$ в области $NO$ и $KL$ с не меньшим напряжением, как от поверхности $fg$ в сторону $PQ$.

**Предложение XLII. Теорема XXXIII**

***Всякое движение, распространяющееся через жидкость, отклоняется от прямого пути в области, занятые неподвижной жидкостью.***

*Случай 1.* Положим, что движение распространяется из точки $A$ через отверстие $BC$ (фиг. 178) и продолжает итти, если это возможно, внутри конического пространства $BCQP$ по прямым линиям, расходящимся из точки $A$. Примем сперва, что это движение подобно волнам на стоячей воде, и пусть $de$, $fg$, $hi$, $kl$ и т. д. суть вершины последовательных волн, разделенные друг от друга промежуточными впадинами. Так как вода на вершинах волн выше, нежели в тех областях $LK$ и $NO$, где она неподвижна, то она стекает с границ вершин волн $e$, $g$, $i$, $l$ и т. д., $d$, $f$, $h$, $k$ и т. д. по направлению к $KL$ и $NO$, и так как в впадинах волн вода ниже, нежели в областях $KL$ и $NO$, где она неподвижна, то она течет из этих областей в впадины волн. Вследствие первого из этих течений — вершины волн, вследствие второго — их впадины расширяются и распространяются в сторону $KL$ и $NO$. Так как движение волн от $A$ к $PQ$ совершается постоянным стоком вершин в ближайшие впадины и, следовательно, не быстрее соответствующей скорости падения, то и падение воды по направлениям $KL$ и $NO$ должно совершаться с такою же скоростью; следовательно, расширение волн по направлению к $KL$ и $NO$ должно распространяться с такою же скоростью, как и самих волн из $A$ к $PQ$; вследствие этого все пространство в сторону к $KL$ и $NO$ будет занято расширившимися волнами $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$ и т. д. Что действительно все происходит именно так, может испытывать всякий на стоячей воде



Фиг. 178.

*Случай 2.* Положим теперь, что $de$, $fg$, $hi$, $kl$, $mn$ представляют распространяющиеся из точки $A$ в упругой среде биения. Распространение биений надо себе представлять как последовательное сгущение и разрежение среды, так что самая плотная часть какого-либо отдельного биения занимает сферическую поверхность, описанную из центра $A$, и между последовательными биениями заключаются равные промежутки. Пусть линии $de$, $fg$, $hi$, $kl$ и пр. обозначают места наибольшей плотности в биениях, распространяющихся через отверстие $BC$. Так как среда здесь более плотна, нежели в областях, расположенных отсюда в сторону $KL$ и $NO$, то эта среда будет расширяться как в сторону этих областей, так и в промежутки между наиболее плотными местами биений; поэтому среда, становясь постоянно более редкой в промежутках между биениями и более плотной в местах их, способствует их движению. Так как поступательное движение биений происходит от постоянного расширения более плотных частей в сторону предшествующих им менее плотных промежутков, то биения должны распространяться от этих плотных мест и в сторону покоящихся частей среды $KL$ и $NO$ приблизительно с тою же самою скоростью, следовательно биения ширятся отовсюду в области $KL$ и $NO$, занятые неподвижной средою, приблизительно с тою же скоростью, с какою они распространяются прямо от центра $A$, и значит, они заполнят все пространство $KLNO$. Мы это испытываем в звуке, который слышен и за горою; проникнув в комнату через окно, звук распространяется по всей комнате, так что слышен и в каждом углу ее не через отражение от противоположных стен, а распространяясь непосредственно от окна, поскольку об этом можно судить по ощущению.

*Случай 3.* Положим, наконец, что из $A$ распространяется через отверстие $CB$ движение какого бы то ни было рода; так как это распространение совершается не иначе, как поскольку части среды, ближайшие к центру $A$, напирают и приводят в движение дальше расположенные части ее, то части, подвергающиеся напору, будучи жидкими, отступают во все те стороны, откуда они подвергаются меньшему давлению, т. е. в сторону всех покоящихся частей среды, как боковых $KL$ и $NO$, так и впереди лежащих $PQ$; вследствие этого всякое движение, как только оно проникнет через отверстие $BC$, начинает шириться и распространяется поэтому от своего начала и центра во все стороны непосредственно.

### Предложение XLIII. Теорема XXXIV

*Всякое дрожащее тело распространяет в упругой среде колебательное движение, расходящееся во все стороны прямолинейно, в среде же неупругой возбуждает замкнутое круговое движение.*

*Случай 1.* Вследствие своих попеременных перемещений взад и вперед, части дрожащего тела при ходе в одну сторону напирают на ближайшие части среды, приводят их в движение, сжимают и уплотняют; затем при обратном ходе предоставляют этим смещенным и сжатым частям среды свободу возвращаться и расширяться. Следовательно, части среды, ближайшие к дрожащему телу, колеблются поочередно взад и вперед, подобно частям самого тела, и как части тела возмущали эти части среды, так и они, совершая подобные же дрожания, возмущают смежные с ними части, которые, в свою очередь, возмущают следующие, и так до бесконечности. Подобно тому как первые части среды при ходе вперед сгущались и при ходе назад расширялись, так и прочие части при ходе вперед будут уплотняться, при ходе назад расширяться. Вследствие этого не все части идут совместно вперед и совместно же возвращаются назад (в таком случае они сохраняли бы неизменными взаимные расстояния и, значит, не сгущались бы и не расширялись бы поочередно), а приближаясь взаимно там, где происходят сгущения, и удаляясь там, где происходят расширения, одни из них идут вперед, другие — назад, колеблясь таким образом до бесконечности. Части, идущие вперед, которые при этом ходе сгущены, в поступательном своем движении ударяют о препятствия и образуют сотрясения; поэтому последовательные сотрясения распространяются прямолинейно от дрожащего тела, сохраняя равные друг от друга расстояния, вследствие равенства тех промежутков времени, через которые дрожащее тело каждым отдельным своим размахом возбуждает отдельное сотрясение. Хотя части дрожащего тела совершают свой ход взад и вперед по некоторому известному и определенному направлению, тем не менее сотрясения, распространяющиеся в среде, расходятся во все стороны согласно предыдущему предложению и распространяются всюду от дрожащего тела, как общего центра, по концентрическим сферическим поверхностям. Примером этого может служить распространение волн по поверхности воды: если их возбуждать колебаниями пальца, они идут не только по направлению движения пальца, но окружают палец концентрическими кругами и расходятся во все стороны, ибо сила тяжести заменяет в этом случае силу упругости.

*Случай 2.* Если же среда не упругая, то ее части не могут уплотняться от давлений, производимых на них колеблющимися частями дрожащего тела; движение распространяется мгновенно до тех областей среды, где она легче всего движению уступает, т. е. к тем частям ее, которые в начале оставляются дрожащим телом свободными. Таков случай падения тела, брошенного как бы то ни было в среде. Среда, уступая брошенному телу, не расходится до бесконечности, но круговым образом переходит в пространство, только что оставленное телом. Следовательно, всякий раз как дрожащее тело идет в какую-либо сторону, среда, уступая ему, переходит круговым движением туда, откуда тело ушло, и когда тело возвратится в свое первоначальное положение, то и среда будет вновь вытолкнута и вернется в свое первоначальное место. Так как дрожащее тело не может быть вполне твердым, но должно быть несколько гибким, сохраняя при этом свою величину, то оно не иначе может при своих дрожаниях напирать где-либо на среду, как одновременно уступая ей в другом месте; поэтому и происходит, что среда, отступая в тех местах, где на нее производится напор, переходит круговым образом к тем местам, где ей уступают.

*Следствие.* Следовательно, заблуждаются те, кто полагает, что колебания частей пламени приводят к заключению о прямолинейном распространении давления в окружающей среде. Заключение о такого рода давлении должно выводить не по колебаниям одних только частей пламени, а по общему расширению всей среды.

### Предложение XLIV. Теорема XXXV

*Пусть в трубе с поднятыми вверх коленами $KL$, $MN$ вода поочередно то поднимается, то опускается; если устроить маятник, длина которого между точкою подвеса и центром качаний равна половине полной длины водяного столба, то я утверждаю, что вода поднимается и опускается в такие же промежутки времени, в какие маятник делает свои промежутки.*

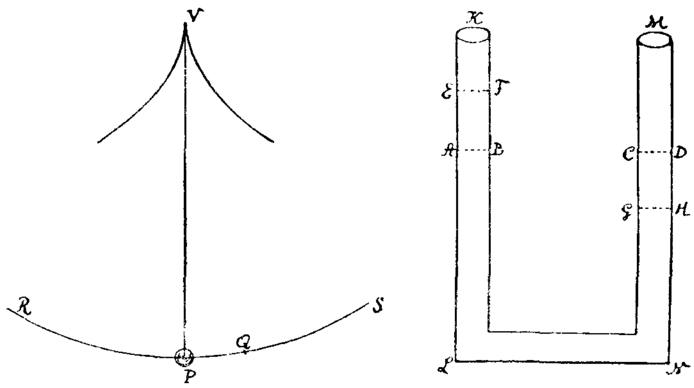
Полную длину водяного столба я измеряю по оси трубы и колен, так что она равна сумме длин осей их, и я здесь не рассматриваю сопротивления воды от трения ее о стенки трубы. Пусть $AB$, $CD$ (фиг. 179) представляют средний уровень воды в обоих коленах; когда вода поднимается в колене $KL$ до уровня $EF$, она опустится в колене $MN$ до уровня $GH$. Пусть $P$ есть тело маятника, $VP$ — нить, $V$ — точка подвеса, $RPQS$ — циклоида, описываемая маятником, $P$ — низшая ее точка, $PQ$ — дуга, равная высоте $AE$.

Сила, которою поочередно ускоряется и замедляется движение воды, равна избытку веса воды, находящейся в одном колене, над весом ее в другом, так что когда вода в колене $KL$ поднялась до $EF$, в колене же $MN$ опустилась до $GH$, сила эта равна удвоенному весу объема воды $EABF$ и, значит, относится к весу всей воды, как $AE$ к $VP$, иначе как $PQ$ к $PR$.

Но сила, которою тело $P$ ускоряется или замедляется в любом месте $Q$ циклоиды (по следствию предл. LI), относится к полному весу этого тела, как расстояние его $PQ$ до низшей точки $P$ относится к длине циклоиды $PR$. Вследствие этого, когда вода и маятник описали равные пространства $AE$ и $PQ$, движущие силы, на них действующие, пропорциональны весам, приводимым в движение, поэтому, если вода и маятник находились в начале в покое, эти силы будут сообщать им в равные времена равные перемещения и будут их заставлять двигаться взад и вперед совместно.

*Следствие 1.* Следовательно, восходящие и нисходящие колебания воды имеют одинаковую продолжительность, независимо от того, сильнее они или слабее.

*Следствие 2.* Если полная длина столба воды составляет $6\frac{1}{9}$ парижских футов, то вода будет опускаться в продолжение 1 секунды и в продолжение второй секунды подниматься, двигаясь таким образом поочередно до бесконечности, ибо маятник, длиною в $3\frac{1}{18}$ фута, совершает размахи в 1 секунду.



Фиг 179.

*Следствие 3.* При увеличении или уменьшении длины столба воды, время колебаний ее увеличивается или уменьшается пропорционально корню квадратному из длины столба.

### Предложение XLV. Теорема XXXVI

*Скорость волн пропорциональна корню квадратному из длины их.*

Явствует из построения следующего предложения.

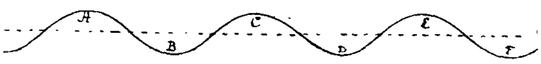
### Предложение XLVI. Задача X

*Найти скорость волн.*

Если устроить маятник, длина которого между точкою подвеса и центром качания равна длине волны, тогда, в то время как маятник совершает свой каждый отдельный размах, волны пробегут путь, приблизительно равный длине их. Длиною волн называется поперечное расстояние между двумя последовательными их подошвами или двумя вершинами.[171] Так, если

[171] Ньютон называет это расстояние «шириною волны»; в переводе принят теперешний термин.

*ABCDEF* (фиг. 180) представляет поверхность стоячей воды, по которой бегут, поднимаясь и опускаясь, последовательные волны, то *A*, *C*, *E*, ... суть вершины волн, *B*, *D*, *F*, ..., суть лежащие между ними подошвы. Движение волн совершается последовательным подъемом и опусканием воды, так что те части ее *A*, *C*, *E*, ..., которые в одно время составляли вершины волн, в следующее будут подошвами, движущая же сила, вследствие которой вершины опускаются, а подошвы поднимаются, есть вес поднятой воды, поэтому вышеупомянутое последовательное ее поднятие и опускание подобно движению воды в коленчатой трубе и следует тем же законам. Вледствие этого (по предл. XLIV), если расстояния между вершинами *A*, *C*, *E*, ... или подошвами *B*, *D*, *F*, ... будут равны удвоенной длине маятника, то в продолжение одного его размаха вершины станут подошвами и в продолжение следующего размаха вновь поднимутся. Следовательно, промежутки времени между прохождениями отдельных волн равны времени двух размахов маятника, т. е. волна проходит путь, равный своей длине, за время двух размахов этого маятника, но в такое время совершает один размах маятник вчетверо большей длины, т. е. такой, коего длина равна длине волны.




Фиг. 180.

*Следствие 1.* Следовательно, волны, длиною по $3\frac{1}{18}$ парижского фута, проходят длину свою в 1 секунду, т. е. в 1 минуту пробегают $183\frac{1}{3}$ фута и около 11 000 футов в час.

*Следствие 2.* Скорость волн большей или меньшей длины больше или меньше этой в отношении корней квадратных из их длины.

Все происходит таким образом при предположении, что частицы воды поднимаются и опускаются по отвесным прямым линиям; но их движение вверх и вниз на самом деле происходит не по прямой, а вернее по кругу,[172] поэтому я утверждаю, что время дается этим предложением лишь приближенно.

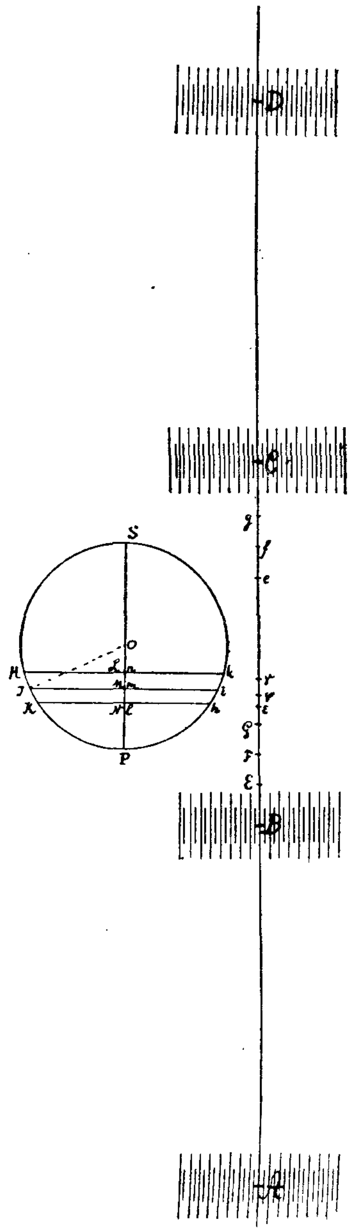
### Предложение XLVII. Теорема XXXVII

*Когда по жидкости распространяются сотрясения, то отдельные ее частицы, совершая взад и вперед весьма малые колебания, ускоряются и замедляются по закону качания маятника.*

---

172 Теорию волн, предполагая, что частицы описывают круги, дал Ранкин, изложив ее чисто геометрически, подобно тому как изложены все предложения в «Началах» Ньютона. Эту теорию можно найти или в Philosophical Transactions за 1863 г. или в собрании сочинений Ранкина, или же в курсах теории корабля.

Пусть $AB$, $BC$, $CD$ и т. д. (фиг. 181) представляют расстояния между последовательными сотрясениями; $ABC$ — направление их бега при распространении от $A$ к $B$; $E$, $F$, $G$ — три физические точки покоящейся среды, расположенные на прямой $AC$ на равных друг от друга расстояниях; $Ee$, $Ff$, $Gg$ — равные между собою весьма малые пространства, проходимые этими точками при их колебаниях взад и вперед; $\varepsilon$, $\varphi$, $\gamma$ — некоторые промежуточные между этими точками места; $EF$, $FG$ — физические отрезочки, т. е. линейные части среды, расположенные между этими точками, перемещающиеся последовательно в места $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ и $ef$, $fg$. Проводим прямую $PS$, равную $Ee$; разделив ее пополам в точке, описываем радиусом $OP$ круг $SJPi$. Пусть полною длиною окружности этого круга представляется полное время одного колебания и частями ее — пропорциональные его доли; тогда, по прошествии времени $PH$ или $PHSh$, положение частицы $E$ получится в $\varepsilon$, если взять $E\varepsilon = PL$ или $E\varepsilon = Pl$, причем точки $L$ и $l$ суть основания перпендикуляров, опущенных из $H$ или $h$ на диаметр $PS$. Двигаясь по такому закону, любая точка $E$, идя из $E$ через $\varepsilon$ в $e$ и возвращаясь затем из $e$ через $\varepsilon$ в $E$, совершает отдельные свои колебания, обладая такими же ускорениями и замедлениями, как и качающийся маятник.



Фиг. 181.

Надо доказать, что всякая отдельная физическая точка среды должна колебаться, двигаясь вышеуказанным образом. Вообразим поэтому, что среда, вследствие какой бы то ни было причины, обладает таким движением, и рассмотрим, что отсюда следует.

Возьмем на окружности $PHSh$ равные дуги $HJ$, $JK$ или $hi$, $ik$, находящиеся к полной окружности в том же отношении, как равные длины $EF$, $FG$ к расстоянию между биениями $BC$. Опустим перпендикуляры $JM$, $KN$ и $im$, $kn$; точки $E$, $F$, $G$ начинают свои одинаковые движения последовательно одна за другою, полные же свои колебания, состоящие из хода вперед и возвращения обратно, совершают в такое время, в продолжение которого биение пробегает от $B$ до $C$; поэтому, если $PH$ или $PHSh$ представляет время, протекшее от начала движения точки $E$, то $PJ$ или $PHSi$ будет представлять время, протекшее от начала движения точки $F$, и $PK$ или $PHSk$ — время от начала движения точки $G$, так что при ходе точек вперед будет соответственно:

$$E\varepsilon = PL; \quad F\varphi = PM; \quad G\gamma = PN$$

и при возвращении назад будет:

$$E\varepsilon = Pl; \quad F\varphi = Pm; \quad G\gamma = Pn.$$

Отсюда следует, что длина $\varepsilon\gamma$ или $EG + G\gamma - E\varepsilon$ при ходе точек вперед равна $EG - LN$, при возвращении же назад равна $EG + ln$. Но $\varepsilon\gamma$ есть длина или протяжение части среды $EG$, когда она находится в положении $\varepsilon\gamma$, поэтому длина этой части при ходе вперед относится к средней ее длине, как $(EG - LN) : EG$; при возвращении же назад — как $(EG + ln) : EG$, или, что то же, как $(EG + LN) : EG$. Но так как

$$LN : KH = JM : OP$$

и

$$KH : EG = \text{окр. } PHShP : BC,$$

то, обозначая через $V$ — радиус круга, длина окружности которого равна $BC$, будем иметь

$$KH : EG = OP : V,$$

и следовательно,

$$LN : EG = JM : V.$$

Таким образом при ходе вперед протяжение части $EG$, когда она находится в положении $\varepsilon\gamma$, относится к ее среднему протяжению, которое она имеет при своем первоначальном положении $EG$, как $(V - JM) : V$, и при ходе назад — как $(V + im) : V$. Поэтому сила упругости точки $F$ при положении в $\varphi$ в месте $\varepsilon\gamma$ при ходе вперед относится к средней величине этой силы в месте $EG$, как $\frac{1}{V - JM} : \frac{1}{V}$, и при возвращении назад — как

$\frac{1}{V+im}:\frac{1}{V}$. На основании такого же рассуждения, получим, что упругие силы физических точек $E$ и $G$ при ходе вперед относятся к средней своей величине, как $\frac{1}{V-HL}:\frac{1}{V}$ и как $\frac{1}{V-KN}:\frac{1}{V}$; разность этих сил относится к той же средней величине силы упругости среды, как

$$\frac{HL-KN}{(V-HL)\cdot(V-KN)}:\frac{1}{V},$$

т. е. как

$$\frac{HL-KN}{V^2}:\frac{1}{V}=\frac{HL-KN}{V},$$

если, вследствие весьма малых пределов колебаний, принять, что $HL$ и $KN$ бесконечно малы по сравнению с $V$.

Так как величина $V$ — постоянная, то разность сил пропорциональна $HL-KN$, т. е. длине $OM$, ибо

$$(HL-KN):HK=OM:OJ=OM:OP,$$

длины же $HK$ и $OP$ — постоянные, значит эта разность пропорциональна также длине $\Omega\varphi$, причем $\Omega$ есть середина $Ff$. На основании такого же рассуждения будем иметь, что и при обратном ходе разность упругих сил физических точек $\varepsilon$ и $\gamma$, т. е. сила, действующая на физический отрезочек $\varepsilon\gamma$, пропорциональна $\Omega\varphi$. Но эта разность (т. е. избыток упругой силы точки $\varepsilon$ над упругою силою точки $\gamma$) есть та сила, которою физический отрезочек $\varepsilon\gamma$ ускоряется при ходе вперед и замедляется при ходе назад, поэтому ускоряющая сила физического отрезочка $\varepsilon\gamma$ пропорциональна его расстоянию от места середины его колебаний $\Omega$. Вследствие этого (по предл. XXXVIII кн. I) время правильно представляется дугою $PJ$, и линейный отрезочек среды $\varepsilon\gamma$ будет двигаться по указанному закону, т. е. по закону колебаний маятника. То же самое относится и до всех линейных отрезочков, из которых и составляется среда.[173]

---

[173] Лагранж в § 5 своей статьи «Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton», изложив вольным переводом предложения XLVII и XLIX, говорит: «такова данная Ньютоном теория распространения звука; эта теория одними почиталась за непонятную (inintelligible), другие находят ее противоречивой, в сущности же, если она и обладает таким недостатком, то тем, что она слишком частная; но вместе с тем она содержит зачаток истинной теории, открытой лишь в последнее время при помощи анализа». Лагранж показывает далее, что рассуждения Ньютона сохраняют силу и в том случае, когда круг $PHShP$, которым Ньютон пользуется для представления закона колебательного движения частиц, будет заменен и какою угодно другою кривою, иными словами когда частица совершает не простые синусоидальные колебания, а какие угодно.

*Следствие*. Отсюда следует, что число распространяющихся сотрясений то же самое, как и число колебаний дрожащего тела, ибо они не умножаются при распространении, — физический отрезочек $\varepsilon\gamma$, как только возвратится в первоначальное свое положение, то и остается в покое и не иначе

---

Рассуждение Ньютона и здесь, как и в других местах «Начал», становится гораздо легче проследить, если выразить формулами то, что им выражено и представлено геометрически.

Обозначим через $\lambda$ — длину $AB = BC = CD$, называемую Ньютоном «расстоянием между последовательными сотрясениями или биениями» (pulsuum successivorum distantiae), примем какую-либо точку $Q$ прямой $AD$ за начало абсцисс $x$, и пусть будет $x_0 = QF$ — абсцисса точки $F$ при покое, расстояние $QE$ обозначим через $x_0 = \xi_1$ и расстояние $QG$ — через $x_0 + \xi_1$; амплитуду колебаний частицы, т. е. длину $\Omega F$, равную $OP$, обозначим через $v$, и фазу ее, т. е. угол $POJ$ в момент времени $t$, — через $\theta$.

Прежде всего надо составить аналитическое выражение фазы $\theta$ в зависимости от времени $t$ и абсциссы $x$.

Это выражение следует из начальных слов ньютонова доказательства; в самом деле, длина окружности $PHSh$ равна $2\pi r$, длина дуги $HJ$ определяется пропорцией

$$HJ : 2\pi r = EF : BC = \xi_1 : \lambda$$

значит будет

$$HJ = \frac{2\pi r}{\lambda}\xi_1.$$

Но так как $JHO$ есть приращение фазы, соответствующее приращению $(-\xi_1)$ абсциссы, то будет

$$JOH = -\frac{\partial\theta}{\partial x}\xi_1 = \frac{HJ}{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\xi_1$$

и значит

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda}$$

и

$$\theta = T - \frac{2\pi}{\lambda}(x - x_0) \tag{1}$$

где $T$ есть функция только времени $t$.

Обозначая через $t_0$ — момент начала движения точки $F$, на основании оговоренного условия: «длиною окружности $PHShP$ и частями ее представляется полное время одного колебания и пропорциональные части его», видим, что

$$T = \frac{2\pi}{\tau}\cdot(t - t_0)$$

причем через $\tau$ обозначено сказанное полное время одного колебания.

Итак,

$$\theta = 2\pi\left[\frac{t - t_0}{\tau} - \frac{x - x_0}{\lambda}\right]. \tag{2}$$

Как уже указано, для точки $F$ абсцисса $x = x_0$, для точки $E$ абсцисса $x_1 = x - \xi_1$ и для точки $G$ абсцисса $x_2 = x_0 + \xi_1$, следовательно соответствующие фазы:

$$\theta_0 = 2\pi\frac{t - t_0}{\tau}, \quad \theta_1 = 2\pi\left[\frac{t - t_0}{\tau} + \frac{\xi_1}{\lambda}\right], \quad \theta_2 = 2\pi\left[\frac{t - t_0}{\tau} - \frac{\xi_1}{\lambda}\right].$$

Перемещения этих точек суть:

$$F\varphi = u_0 = r(1 - \cos\theta_0); \quad E\varepsilon = u_1 = r(1 - \cos\theta_1); \quad G\gamma = u_2 = r(1 - \cos\theta_2).$$

Таким образом в момент $t$ протяжение или длина $\varepsilon\gamma$ частицы, коей первоначальная длина была $EG$, будет

$$\varepsilon\gamma = (x_0 + \xi_1 + u_2) - (x_0 - \xi_1 + u_1) = 2\xi_1 - (u_1 - u_2) = EG - LN.$$

придет в движение, как или от натиска дрожащего тела или же от натиска распространяемых этим телом сотрясений. Поэтому он будет оставаться в покое, как только сотрясения перестанут распространяться дрожащим телом.

---

Но

$$LN = u_1 - u_2 = r[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = 2r \cdot \frac{2\pi\xi_1}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t - t_0}{\tau}$$

ибо величина $\xi_1$ предполагается весьма малой по сравнению с $\lambda$; следовательно, отношение протяжения частицы $EG$, когда ее середина $F$ занимает положение $\varphi$, к ее длине $EG$ при покое, обозначая через $V$ — длину $\frac{\lambda}{2\pi}$, будет

$$\frac{EG - LN}{EG} = 1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\sin 2\pi \frac{t - t_0}{\tau} = \frac{V - JM}{V}. \tag{3}$$

Так как упругость среды предполагается пропорциональной ее плотности $\rho_0$, плотность же физической частицы $EG$ будет обратно пропорциональна ее протяжению, ибо площадь $\sigma$ поперечного сечения этой частицы предполагается неизменной, поэтому сила упругости, иначе давления на площадку $\sigma$, когда эта площадка, проведенная через точку $F$, вместе с нею находится в положении $\varphi$, будет выражаться формулою

$$p_0 \frac{V}{V - MJ} \cdot \sigma$$

где $p_0$ есть начальное давление при покое среды. Точно так же сила упругости, действующая на такую же площадку $\sigma$, для точки $\gamma$ будет

$$p_0 \frac{V}{V - HL} \cdot \sigma$$

и для точки $\varepsilon$ эта сила будет

$$p_0 \frac{V}{V - KN}\sigma.$$

Разность этих двух последних величин представит полную силу, действующую на рассматриваемую частицу по направлению от $A$ к $D$. Масса частицы получится, если умножить ее начальный объем $2\xi_1\sigma$ на плотность $\rho_0$, и будет $2\rho_0\xi_1\sigma$.

По малости величин $HL$ и $KN$ по сравнению с $V$ вышеупомянутую разность, т. е. действующую силу, можно написать так:

$$k \cdot \frac{HL - KN}{V} \cdot \sigma.$$

Но по малости величины $\xi_1$ по сравнению с $\lambda$ будет

$$HL - KN = r\sin 2\pi\left[\frac{t - t_0}{\tau} + \frac{\xi_1}{\lambda}\right] - r\sin 2\pi\left[\frac{t - t_0}{\lambda} - \frac{\xi_1}{\lambda}\right] = 2r \cdot \frac{2\pi\xi_1}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t - t_0}{\tau}$$

и следовательно, действующая сила

$$p_0 \frac{HL - KN}{V} \cdot \sigma = 2\xi_1\sigma \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot p_0 \cdot r\cos 2\pi\frac{t - t_0}{\tau} = 2\xi_1 \cdot \sigma \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot p_0(r - u_0) \tag{4}$$

и следовательно, ускорение $w$ частицы будет

$$w = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}(r - u_0) \tag{5}$$

т. е. это ускорение пропорционально расстоянию $r - u_0$ частицы до точки $\Omega$, представляющей центр ее колебаний, и направлено к этой точке; следовательно, частица совершает простые синусоидальные колебания или, по терминологии Ньютона, колеблется по закону циклоидального маятника.

**Предложение XLVIII. Теорема XXXVIII**

*Скорости распространяющихся в упругих жидкостях сотрясений находятся в прямом отношении корней квадратных сил упругости жидкостей и в обратном отношении корней квадратных их плотностей, причем предполагается, что сила упругости жидкости пропорциональна сгущению ее.*

*Случай 1.* Если обе среды однородные и расстояния между трясениями в обеих срединах одинаковые, но движение в одной более сильное, нежели в другой, то сжатия и расширения подобных частиц будут относиться между собою, как количества движения их. Это предложение не вполне точно, но если сжатия и расширения не слишком велики, погрешность не чувствительна, и значит, предложение может быть принимаемо физически за точное. Движущие упругие силы пропорциональны сжатиям и расширениям, скорости равных частиц, производимые в одинаковые времена, пропорциональны силам; поэтому равные и соответствующие частицы жидкости, по которой распространяются сотрясения, при своих колебаниях взад и вперед проходят пропорциональные сжатиям и расширениям пространства со скоростями, пропорциональными этим пространствам, следовательно, в одинаковое время; поэтому сотрясения пробегают при своем распространении в продолжение постоянного времени одного полного колебания частицы путь, равный расстоянию между соответствующими частицами, так что каждое сотрясение приходит на место, занимавшееся ближайшим ему предшествующим. Из равенства этих расстояний следует, что сотрясения бегут в обеих срединах с одинаковыми скоростями.

*Случай 2.* Если расстояния между двумя смежными биениями, иначе длины их, в одной среде больше, нежели в другой, то положим, что соответствующие частицы совершают такие колебания, величины наибольших отклонений в которых пропорциональны сказанным длинам, тогда сгущения и разрежения в обеих срединах будут равны. Следовательно, если средины — однородные, будут равны и те движущие упругие силы, под действием которых частицы колеблются. Массы, приводимые этими силами в движение, пропорциональны длинам биений; в том же отношении находятся и пространства, проходимые при каждом колебании. Но время одного колебания пропорционально корню квадратному из массы и корню квадратному из величины наибольших отклонений, следовательно это время пропорционально длине сотрясений. Сотрясения пробегают за время одного полного колебания частицы пути, равные своему протяжению, т. е. пропорциональные времени, поэтому скорости распространения их в обеих срединах между собою равны.

*Случай 3.* Таким образом в срединах, у которых плотности и силы упругости одинаковы, скорости распространения сотрясений равны. Если же плотность или сила упругости среды будут увеличены, то движущая сила возрастет в том же отношении, как сила упругости, приводимая же в движение масса — как плотность; время, в течение которого будут совершаться те же движения, как и прежде, увеличится, как корень квадратный из отношения плотностей, и уменьшится, как корень квадратный из отношения сил упругости. Вследствие этого, скорость распространения сотрясений будет прямо пропорциональна корню квадратному из плотности и обратно пропорциональна корню квадратному из сил упругости.

Это предложение явствует с еще большею ясностью из построения следующего предложения.

### Предложение XLIX. Задача XI

*Найти скорость распространения сотрясений, когда заданы плотность и сила упругости среды.*

Вообразим среду, находящуюся под действием веса, которым она, подобно нашему воздуху, сжимается; пусть $A$ есть высота однородной среды, вес которой равен давящему весу и плотность которой такая же, как плотность той сжатой среды, в которой биения распространяются.

Представим себе маятник, длина которого между точкою подвеса и центром качания равнялась бы $A$,—в какое время этот маятник совершит свой полный размах, состоящий из хода вперед и возвращения назад, в такое же время биение пробежит путь, равный длине окружности, описанной радиусом $A$.

Сохраним обозначения и построения предложения XLVII. Если какой-либо физический отрезочек $EF$, описывающий при своих отдельных колебаниях пространство $PS$, подвергается действию такой силы упругости, которая в концах его хода $P$ и $S$ равна его весу, то он будет совершать эти колебания в такое же время, как и колеблясь по циклоиде, полный обвод которой равен длине $PS$, и это потому, что в обоих случаях равные силы действуют на равные массы на равных протяжениях. Так как время размахов маятника пропорционально корню квадратному из его длины, длина же маятника равна половине длины полной циклоиды, то отношение времени одного колебания частицы к времени размаха маятника, длина которого $A$, будет равно $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}BS}{A}}$, т. е. $\sqrt{\frac{PO}{A}}$. Но величина силы упругости, действующая на отрезочек $EG$, вообще относится (по доказательству предл. XLVII) к полной его силе упругости, как $(HL - KN):V$, при крайних же положениях $P$ и $S$, когда точка $K$ совпадает с $P$, это отношение будет $HK:V$. Но эта полная величина силы упругости, т. е. тот действующий вес, которым сжимается отрезочек $EG$, относится к весу этого отрезочка, как высота напора $A$, соответствующая действующему весу, относится, к длине отрезочка $EG$; следовательно, сила, действующая на отрезочек $EG$ в крайних его положениях $P$ и $S$, относится к весу этого отрезочка, как

$$HK \cdot A : V \cdot EG,$$

т. е. как

$$PO \cdot A : V^2,$$

ибо

$$HK : EG = PO : V.$$

Так как времена, в продолжение которых равные массы проходят равные пространства, обратно пропорциональны корню из сил, то отношение времени одного колебания под действием сказанной силы упругости ко времени колебания под действием веса равно $\sqrt{\frac{V^2}{PO \cdot A}}$, а значит, отношение его к времени размаха маятника, длина которого есть $A$, равно произведению отношений $\sqrt{\frac{V^2}{PO \cdot A}}$ и $\sqrt{\frac{PO}{A}}$, т. е. равно $\frac{V}{A}$. Но в продолжение времени одного полного, состоящего из хода вперед и возвращения назад, колебания частицы сотрясение пробегает в своем распространении путь, равный своей длине $BC$, поэтому время, в продолжение коего сотрясение пробегает пространство $BC$, относится ко времени одного полного колебания частицы, как $V:A$, т. е. как $BC$ относится к окружности, описанной радиусом $A$. Время же, в продолжение коего сотрясение проходит пространство $BC$, находится в том же отношении к времени, в течение которого оно проходит путь, равный длине сказанной окружности, следовательно в указанное время сотрясение пробегает путь, равный этой окружности. [174]

---

[174] Доказательство, изложенное в тексте, есть лишь развитие равенства (5) примечания 173. В самом деле, положив $r - u_0 = y$, имеем

$$y'' + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} y = 0. \tag{1}$$

*Следствие 1.* Скорость бега сотрясений равна скорости, приобретаемой тяжелым телом при равноускоренном падении по прохождении им высоты $\frac{1}{2}A$. Ибо в продолжение времени такого падения сотрясение, двигаясь со скоростью, приобретенной телом в конце падения, прошло бы путь, равный $A$; поэтому в продолжение времени полного колебания частицы, состоящего из ее хода вперед и возвращения обратно, оно пробежит путь, равный окружности, описанной радиусом $A$, ибо время падения относится ко времени одного колебания, как радиус круга к его окружности.

*Следствие 2.* Так как высота $A$ прямо пропорциональна силе упругости жидкости и обратно пропорциональна ее плотности, то скорость распространения сотрясений обратно пропорциональна корню квадратному из плотности и прямо пропорциональна корню квадратному из силы упругости.

---

Отсюда следует, что период $\tau$ колебания частицы определяется уравнением

$$\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$$

из которого следует

$$\frac{\lambda}{\tau}=\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{2}$$

Но это отношение есть не-что иное, как скорость распространения сотрясений.

Формула (2) выведена в том предположении, что рассматриваемая упругая среда следует закону Мариотта. Если бы связь между давлением и объемом или давлением и плотностью выражалась иным образом, напр. было бы

$$p=p_0 f\left(\frac{v_0}{v}\right)=p_0 f\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{3}$$

то вместо разности

$$p_0\sigma\cdot\frac{V}{V-HL}-p_0\sigma\frac{V}{V-KN}$$

выражающей силу, действующую на частицу, имели бы разность

$$p_0\sigma\left[f\left(\frac{V}{V-HL}\right)-f\left(\frac{V}{V-KN}\right)\right]$$

которая, если отбросить бесконечно малые высших порядков, равна

$$p_0\sigma\left[f\left(1+\frac{HL}{V}\right)-f\left(1+\frac{KN}{V}\right)\right]=p_0\sigma\cdot\frac{HL-KN}{V}\cdot f'(1)$$

следовательно в формулах (1) и (2) вместо отношения $\frac{p_0}{\rho_0}$ пришлось бы написать величину $\frac{p_0}{\rho_0}f'(1)$. На основании равенства (3), эта величина есть не что иное, как производная $\frac{dp}{d\rho}$ при $\rho=\rho_0$, обозначая которую через $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$ получим обобщенную формулу Ньютона

$$c=\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0} \tag{4}$$

приложимую для всякой среды. Формула эта, как видно, непосредственно следует из рассуждений Ньютона.

**Педложение L. Задача XII**

*Найти протяжение и длину сотрясения.*

Определяется число колебаний, совершаемых в продолжение заданного промежутка времени дрожащим телом, возбуждающим сотрясения; на найденное число разделяется пространство, которое сотрясение может пробегать в продолжение этого же времени; полученная величина и представит протяжение или длину одного сотрясения или биения.

*ПОУЧЕНИЕ*

В этих последних предложениях имеются в виду распространение света и звука. Так как свет распространяется по прямым линиям, то (по предл. XLI и XLII) он не может состоять из одного только давления. Так как звуки происходят от дрожащих тел, то они не что иное, как сотрясения воздуха, распространяющиеся согласно предложению XLIII. Это подтверждается теми дрожаниями, которые возбуждаются звуками в встречаемых ими телах, когда эти звуки громки и низки, подобно бою барабанов; быстрые же, короткие колебания возбуждаются труднее. Однако известно, что и любые звуки, ударяя струны, настроенные в созвучие с звучащим телом, приводят эти струны в колебательное движение. Подтверждается это также и скоростью звука. Так как удельные веса дождевой воды и ртути относятся приблизительно, как 1 к $13\frac{2}{3}$, то при высоте барометра в 30 англ. дюймов, когда удельный вес воздуха относится к удельному весу дождевой воды, как 1 к 870, отношение удельного веса воздуха к удельному весу ртути составит 1 : 11 890; следовательно, когда высота ртути равна 30 дюймам, высота однородной атмосферы, вес которой сжал бы наш воздух соответственно, составит 356 700 дюймов или 29 725 футов. Это и есть та высота, которая в предыдущей задаче обозначена через A. Окружность круга, описанного радиусом в 29725 футов, равна 186768 футам. Маятник, длина коего 39.2 дюймов, совершает, как известно, полный размах из хода вперед и возвращения обратно в 2 секунды, поэтому маятник, длиною в 29725 футов, т. е. 356700 дюймов, должен совершать подобный же размах в 190.75 секунд; в продолжение этого времени звук пробегает 186 768 футов, т. е. 979 футов в 1 секунду.

Впрочем, в этом расчете не принята во внимание величина самих твердых частиц воздуха, через которые звук распространяется мгновенно. Так как вес воздуха относится к весу воды, как 1 к 870, соли же приблизительно вдвое тяжелее воды, то если положить, что сами частицы воздуха приблизительно такой же плотности, как частицы воды или солей, редкость же воздуха происходит от промежутков между частицами, то диаметр частиц воздуха будет относиться к промежуткам между центрами их, как 1 к 9 или к 10, к промежуткам же между частицами — как 1 к 8 или 9. Поэтому к полученным по предыдущему расчету 979 футам, проходимым звуком в 1 секунду, надо добавить $\frac{979}{9}$, т. е. около 109 футов, на величину частиц, так что звук должен проходить около 1088 футов.

Кроме того, пары, находящиеся в воздухе, обладают иною упругостью и иным тоном и едва ли сколько-нибудь, а может быть и совсем, не участвуют в тех движениях самого воздуха, которыми передается звук. Если же они покоятся, то это движение будет распространяться по самому воздуху с большею, в отношении корня квадратного из меньшей массы, скоростью. Так, если атмосфера состоит из десяти частей чистого воздуха и одной части паров, то скорость звука будет больше в отношении $\sqrt{\frac{11}{10}}$ или кругло $\frac{21}{20}$, нежели скорость его распространения по одиннадцати частям чистого воздуха, и вышеайденная величина должна быть увеличена в этом отношении, после чего получится, что в 1 секунду звук пробегает 1142 фута.[175]

---

[175] Это объяснение Ньютона оказалось неправильным. Лаплас (Mécanique Céleste, t. V, livre XIII, ch. III) показал, что сгущение и разрежение воздуха при звуковых колебаниях совершаются не по изотермическому процессу, для которого имеет место закон Мариотта, а по адиабатическому, при котором связь между давлением и объемом и давлением и плотностью выражается уравнением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^k = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \tag{5}$$

где $k = 1.403$ для воздуха есть отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

При этом законе формула (4) принимает вид

$$c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \tag{6}$$

т. е. скорость 979 футов в секунду, рассчитанная по формуле (2), должна быть помножена на

$$\sqrt{1.403} = 1.184$$

так что получится 1148 футов в секунду в согласии с опытом.

Замечательно, что как Лаплас, так и Пуассон получили формулу (6), исходя из оставленного теперь представления о теплоте как невесомой жидкости — теплороде.

Заметим еще по этому поводу, что в статье «De Natura Acidorum», написанной в 1692 г. для технического словаря Harris'a, Ньютон говорит: «Calor est agitatio partium quamquaversum», т. е. «Теплота есть колебание частиц друг около друга».

Так это должно происходить в весеннее и осеннее время, когда воздух разрежен умеренным теплом и его упругая сила немного повышена. В зимнее время, когда воздух сгущен от холода и его упругость понижена, скорость звука должна быть медленнее в отношении корня квадратного из плотностей; в летнее время, обратно, эта скорость должна быть более.

Из опытов получено, что звук проходит в 1 секунду немногим более или менее 1142 англ. футов, или 1070 парижских. После того как скорость звука известна, можно найти и промежутки между сотрясениями. Совёр (Sauveur) нашел из произведенных им опытов, что открытая труба, длиною около 5 парижских футов, издает звук того же тона, как струна, которая делает в 1 секунду 100 колебаний, следовательно на пространстве 1070 парижских футов, пробегаемых звуком в 1 секунду, укладывается около 100 биений, значит одно биение занимает около 10.7 футов, т. е. приблизительно удвоенную длину трубы. Поэтому вероятно, что длины биений для всех открытых труб равны удвоенной длине труб.[176]

Кроме того, из следствия предложения XLVII видно, почему при прекращении движения звучащего тела прекращается и звук и не слышится более, далеко ли мы будем отстоять от звучащего тела, или близко; из этих же начал явствует, почему звуки так значительно усиливаются переговорными трубами. Всякое колебательное движение увеличивается при отдельных появлениях вновь производящей его силы, движение же в трубах, препятствующих распространению звука в сторону, утрачивается медленнее и повторяется более сильно, и поэтому сильно увеличивается от повторных сообщений новых количеств движения. В этом состоят главнейшие звуковые явления.

## ОТДЕЛ IX

## О КРУГОВОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

### Предположение

*Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих одинаковых условиях предполагается пропорциональным скорости, с которою частицы жидкости разъединяются друг от друга.*

---

[176] Эта догадка Ньютона подтверждена Д. Бернулли, давшим в 1762 г. теорию звучащих труб.

### Предложение LI. Теорема XXXIX

*Если в однородной и беспредельной жидкости вращается равномерно около постоянной своей оси твердый бесконечно длинный цилиндр и жидкость приводится в движение единственно только этим натиском, причем всякая ее частица продолжает сохранять свое равномерное движение, то я утверждаю, что времена обращений частиц жидкости пропорциональны их расстояниям до оси цилиндра.*

Пусть $AFL$ — цилиндр, равномерно вращаемый вокруг оси $S$; проведя концентрические круги $BGM$, $CHN$, $DJO$, $EKP$ и т. д. и построив цилиндры, подразделим жидкость на бесчисленное множество концентрических цилиндрических слоев одинаковой толщины.

Так как жидкость однородна, то взаимодействия слоев друг на друга (по предположению) будут пропорциональны их перемещениям друг по другу и величине тех поверхностей, по которым взаимодействия происходят. Если усилие, приложенное к выпуклой поверхности слоя, будет больше или меньше усилия, приложенного к вогнутой, то большее усилие будет преобладать, и движение слоя будет ускоряться или замедляться, ибо в каждом месте оно направлено или в сторону движения, или же в сторону противоположную. Так как всякий слой сохраняет свое равномерное движение, то оба усилия должны быть между собою равны [177] и направляться в противоположные

---

[177] Стокс (Sir G. G. Stokes. Math. & Phys. Pap., vol. I, p. 103) обращает внимание, что в это рассуждение Ньютона вкралась ошибка: под словом усилия (impressiones), действующие на наружную и внутреннюю поверхность каждого слоя, Ньютон разумел самые величины сил трения, а не их моменты относительно оси цилиндра, как бы следовало. Поэтому и заключения, к которым Ньютон пришел в этом предложении, а также и в следующем, где повторена та же ошибка, неверны.

Обозначая через $\omega$ — угловую скорость слоя, лежащего н расстоянии $r$ от оси, через $k$ — постоянный множитель, через $F$ — силу трения на единицу поверхности и через — $C$ — некоторую постоянную, по Ньютону имеем

$$F = 2\pi kr \cdot r\,\frac{d\omega}{dr} = -C.$$

Откуда следует

$$\omega = \frac{C}{2\pi k} \cdot \frac{1}{r}$$

ибо при $r = \infty$ должно быть $\omega = 0$.

Обозначая через $\omega_0$ — угловую скорость и через $r_0$ — радиус вращающегося внутреннего цилиндра, будем иметь

$$\frac{C}{2\pi k} = \omega_0 r_0$$

и следовательно, будет

$$\omega = \omega_0 \frac{r_0}{r}.$$

стороны, но так как эти усилия пропорциональны поверхностям соприкосновения и их относительным друг по другу скоростям (*умноженным на расстояние до оси*), то разности этих скоростей должны быть обратно пропорциональны расстояниям (*квадратам расстояний*) соответствующих слоев до оси. Вместе с тем разности угловых скоростей пропорциональны разностям вышеупомянутых линейных скоростей, разделенным на расстояния до оси, следовательно они обратно пропорциональны квадратам (*кубам*) расстояний. Поэтому, если в точках $A$, $B$, $C$, $D$, ... неограниченной прямой $SQ$ восставить перпендикуляры и отложить по ним длины $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$ и т. д., обратно пропорциональные квадратам (*кубам*) абсцисс $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ и т. д., и вообразить, что через точки $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ... проведена гиперболическая кривая, то суммы разностей, т. е. полные угловые скорости, при увеличении числа слоев и уменьшении их толщины до бесконечности будут пропорциональны гиперболическим площадям $AaQ$, $BbQ$, $CcQ$, $DdQ$, $EeQ$ и т. д., времена же оборотов, которые обратно пропорциональны угловым скоростям, будут обратно пропорциональны этим площадям. Следовательно, время оборота какой-либо частицы $D$ обратно пропорционально площади $DdQ$, т. е., по известным квадратурам кривых, прямо пропорционально расстоянию (*квадрату расстояния*) $SD$.

*Следствие 1.* Таким образом угловые скорости частиц обратно пропорциональны их расстояниям (*квадратам их расстояний*) до оси цилиндра, и линейные их скорости равны (*обратно пропорциональны расстояниям*).

---

Время оборота $\tau$ слоя будет

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{r}{r_0} = \tau_0 \cdot \frac{r}{r_0}$$

где через $\tau_0$ обозначено время оборота цилиндра, т. е. для слоя $D$ это время пропорционально расстоянию $SD$, как и сказано в предложении.

На самом же деле должно быть

$$F \cdot r = 2\pi k r^2 \cdot r \frac{d\omega}{dr} = -C.$$

Откуда следует

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$$

и

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{r^2}{r_0^2}$$

т. е. угловая скорость обратно, время же оборота прямо пропорциональны квадрату расстояния слоя до оси цилиндра.

Соответственно этому в следствиях (1 и 2) в скобках показаны надлежащие исправления, напечатанные курсивом.

*Следствие 2.* Если жидкость находится в цилиндрическом сосуде бесконечной длины, содержащем другой цилиндр внутри, и оба цилиндра вращаются около общей оси, причем времена оборотов пропорциональны их радиусам, и если всякая частица жидкости сохраняет неизменною скорость своего движения, то времена оборотов частиц жидкости будут пропорциональны их расстояниям (*квадратам их расстояний*) до оси цилиндров.

*Следствие 3.* Если цилиндрам и жидкости, движущимся таким образом, сообщить общее равномерное вращение, то вследствие этого нового движения трение частей жидкости друг по другу не изменится, поэтому не изменится и относительное движение частей жидкости, ибо перемещения частей друг относительно друга зависят лишь от трения. Всякая часть жидкости будет попрежнему сохранять такое движение, которое трением, совершающимся в противоположных направлениях, не ускоряется и не замедляется.

*Следствие 4.* Поэтому, если сообщенное всей системе обоих цилиндров и жидкости вращение таково, что им уничтожается вращение внешнего цилиндра, то получится движение жидкости в покоящемся цилиндре.

*Следствие 5.* Следовательно, если при покоящихся жидкости и внешнем цилиндре начать равномерное вращение внутреннего цилиндра, то круговое движение передается жидкости и будет постепенно распространяться через всю жидкость, и не ранее того перестанет увеличиваться, пока движение всех частей жидкости не станет таким, как указано в следствии 4.

*Следствие 6.* Так как жидкость вынуждается при этом распространять далее свое движение, то от ее натиска придет во вращение и наружный цилиндр, если только его не удерживать насильно; его вращение будет ускоряться до тех пор, пока времена оборотов обоих цилиндров не сравняются. Если же наружный цилиндр задержать, то он будет принуждать жидкость замедлять свое движение, и если вращение внутреннего цилиндра не поддерживается какою-либо внешнею силою, то оно постепенно прекратится.

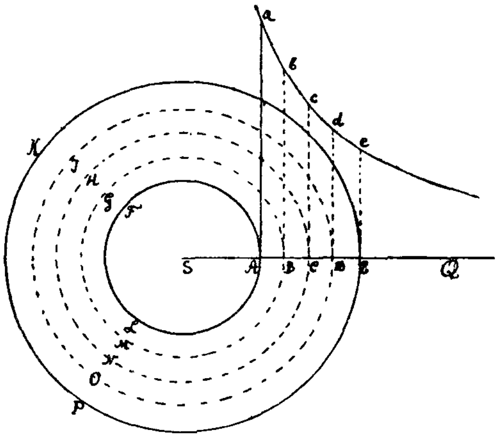
Такой опыт надо производить в глубокой стоячей воде.

### Предложение LII. Теорема XL

*Если в однородной и беспредельной жидкости вращается равномерно около постоянной оси твердый шар и жидкость приводится в вращательное движение единственно только этим натиском и всякая ее часть*

***продолжает сохранять свое равномерное движение, то я утверждаю, что времена оборотов частиц жидкости будут пропорциональны квадратам*** (кубам) ***их расстояний до центра шара.***

*Случай 1.* Пусть $AFL$ (фиг. 182) есть шар, равномерно вращающийся около оси $S$; проведя круги $BGM$, $CHN$, $DJO$, $EKP$ и т. д., подразделим жидкость на бесчисленное множество концентрических шаровых слоев одинаковой толщины. Вообрази затем, что эти шары твердые; так как жидкость однородна, то действия смежных слоев друг на друга будут пропорциональны их относительным друг к другу скоростям и величинам поверхностей соприкосновения. Если усилие, приложенное к которому-либо из шаровых слоев, будет больше или меньше по его впалой поверхности, нежели по выпуклой, то большое усилие будет преобладающим, и скорость слоя будет или возрастать, или уменьшаться, ибо в каждом месте усилие будет направлено или в сторону движения, или обратно. Но так как каждый из слоев продолжает сохранять свое равномерное движение, то усилия,[178] действующие на обе стороны, должны быть между собою равны и направляться противоположно. Так как усилия пропорциональны величинам смежных поверхностей и их относительным друг по другу скоростям скольжения (*и расстояниям до оси*), то эти скорости должны быть обратно пропор-



Фиг. 182.

[178] Введя поправку, указанную в примечании к предложению LI, получим, что производная угловой скорости по расстоянию, или по ньютоновой терминологии «разность угловых скоростей», обратно пропорциональна не кубу, а четвертой степени расстояний. Соответственно этому, самые угловые скорости будут обратно, времена же оборотов прямо пропорциональны не квадратам, а кубам расстояний. В остальном рассуждения Ньютона остаются без изменений; в следствиях в скобках напечатаны курсивом те исправления, которые надо ввести чтобы устранить вкравшуюся в рассуждения Ньютона погрешность.

Решение этой задачи, а также и предыдущей, на основании общих уравнений движения вязкой жидкости можно найти в «Гидродинамике» Ламба (H. Lamb. Hydrodynamics, §§ 291 и 292) и в Механике Киргофа (Kirchhoff. Mechanik, Vorl. 26).

циональны поверхностям (*умноженным на расстояния до оси*), т. е. обратно пропорциональны квадратам (*кубам*) расстояний поверхностей до центра. Но разности угловых скоростей пропорциональны сказанным скоростям скольжения, разделенным на расстояния, иначе прямо пропорциональны этим скоростям и обратно пропорциональны расстояниям, т. е. обратно пропорциональны кубам (*четвертым степеням*) расстояний. Поэтому, если в точках $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и т. д. неограниченной прямой $SQ$ восставить перпендикуляры и отложить по ним длины $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$ и т. д., обратно пропорциональные кубам (*четвертым степеням*) абсцисс $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$ и т. д., то суммы разностей, т. е. самые угловые скорости, будут пропорциональны (увеличивая число слоев и уменьшая их толщину до бесконечности, чтобы образовать однородную жидкость) гиперболическим площадям $AaQ$, $BbQ$, $CcQ$, $DdQ$, $EeQ$ и т. д. Времена же обращений, которые обратно пропорциональны угловым скоростям, будут обратно пропорциональны этим площадям, следовательно время оборота какого-либо слоя $DJO$, обратно пропорциональное площади $DdQ$, по известным квадратурам кривых, прямо пропорционально квадрату (*кубу*) расстояния $SD$. Это я и имел в виду прежде всего доказать.

*Случай 2.* Из центра сферы проводится весьма большое число неограниченных прямых через равные углы; вообрази, что при обращении около оси эти прямые рассекают шаровые слои на бесчисленное множество колец. Каждое кольцо соприкасается с четырьмя кольцами, с ним смежными — внутренним, внешним и двумя боковыми. Ни одно кольцо не может подвергаться равным и противоположно направленным усилиям, происходящим от трения прилегающих к нему колец, внутреннего и наружного, если только движение не совершается как указано в случае первом, что следует из доказательства этого случая. Поэтому любой ряд колец, расходящихся от шара прямолинейно, будет двигаться как указано в первом случае, поскольку ему не препятствовало бы трение по боковым поверхностям его. Но при движении, происходящем по указанному закону, трение и на боковых поверхностях равно нулю и, следовательно, нисколько не препятствует такому движению. Если бы кольца, равноудаленные от центра, обращались бы быстрее или медленнее близ полюсов, нежели близ эклиптики, то более медленные ускорялись бы, более быстрые замедлялись бы от трения их друг по другу; поэтому времена обращений будут приближаться к равенству, согласно закону случая первого. Таким образом трение не препятствует движению, совершающемуся по закону случая первого, поэтому этот закон имеет и здесь место, т. е. времена обращений отдельных колец

17. Зак. 3350

пропорциональны квадратам (*кубам*) их расстояний до центра шара. Это я и имел в виду доказать во-вторых.

*Случай 3.* Пусть каждое кольцо подразделено поперечными сечениями на бесчисленное множество частиц, образующих вещество вполне и равномерно жидкое; так как подразделение такими сечениями не влияет на вращательное движение, служит лишь для образования жидкости, то вращательное движение сохранится такое же, как и ранее. От такого рассечения шероховатость и сила трения бесконечно малых колец или совсем не изменяется, или изменится одинаково для всех. При сохранении же пропорциональности причин сохранится пропорциональность проявлений, т. е. пропорция угловых скоростей и времен обращений. Впрочем, так как движение вращательное и происходящая от него центробежная сила больше по эклиптике, нежели у полюсов, то должна быть какая-нибудь причина, которою отдельные частицы удерживались бы на своих круговых путях, иначе вещество, находящееся на эклиптике, удалялось бы постоянно от центра и вне вихря переходило бы к полюсам, откуда по оси возвращалось бы к эклиптике круговым потоком.

*Следствие 1.* Таким образом угловые скорости частей жидкости обратно пропорциональны квадратам (*кубам*) расстояний до центра шара, и линейные скорости частиц обратно пропорциональны первой (*второй*) степени этих расстояний.

*Следствие 2.* Если шар вращается равномерно в однородной покоящейся беспредельной жидкости около постоянной оси, то он сообщит жидкости движение, подобное движению вихря; это движение будет постепенно распространяться до бесконечности, и отдельные частицы жидкости не ранее того прекратят ускоряться, пока времена их обращений не станут пропорциональными квадратам (*кубам*) расстояний до центра шара.

*Следствие 3.* Так как внутренние части вихря, вследствие большей своей скорости, трутся о части его, лежащие далее от центра, увлекают их и этим действием постоянно сообщают им некоторое количество движения, то эти части передают, в свою очередь, то же самое количество движения частям, снаружи их расположенным, и таким образом сохраняют свое количество движения неизменным; отсюда следует, что некоторое количество движения постоянно переносится от центра к окружности вихря и по бесконечности ее там поглощается. Вещество, находящееся между двумя какими-либо шаровыми поверхностями, концентрическими с вихрем, никогда не ускоряется, ибо передает все получаемое изнутри вихря количество движения наружу.

*Следствие 4.* Поэтому, для постоянного поддержания вихря в том же самом состоянии движения требуется какое-нибудь непрестанно действующее начало, от которого шар получал бы постоянно то количество движения, которое он сообщает веществу вихря. Без такого начала шар и внутренние части вихря, распространяя постоянно свое количество движения наружу и не получая нового, должны постепенно замедляться и прекратить свое вращательное движение.

*Следствие 5.* Если в этом вихре на некотором расстоянии от центра будет плавать второй шар и будет постоянно вращаться под действием некоторой силы около оси, сохраняющей постоянное наклонение, то этим вращением жидкость будет также приводиться в вихревое движение. Сперва этот новый малый вихрь будет обращаться вместе с своим шаром около центра первого вихря, но в то же самое время его собственное движение будет мало-по-малу расширяться и постепенно распространяться до бесконечности, подобно как и для первого вихря. По той же самой причине, по которой шар второго вихря увлекался движением первого, и шар этого первого будет увлекаться движением второго, так что оба шара будут обращаться около некоторой промежуточной точки и, вследствие такого кругового движения, будут стремиться удалиться друг от друга, если только они не будут удерживаться какою-либо силою.

Затем, если то действие сил, вследствие которого шары сохраняли свое движение, прекратилось бы и все дальнейшее совершалось бы по законам механики, то движение шаров постепенно бы замедлялось (по причинам, указанным в следствиях 3 и 4), и вихри бы успокоились.

*Следствие 6.* Если бы несколько шаров, находящихся в заданных местах, вращались бы все время с постоянными скоростями около постоянных осей, то образовалось бы столько же вихрей, уходящих в бесконечность. Ибо по той же причине, как и в том случае, когда он один, каждый отдельный шар распространяет свое движение до бесконечности, вследствие чего каждая часть беспредельной жидкости совершает то движение, которое происходит от совокупного действия всех шаров. Поэтому вихри не будут ограничиваться некоторыми изестными пределами, но постепенно будут проникать друг в друга, шары же, вследствие действия вихрей друг на друга, будут постоянно перемещаться из занимаемых ими мест, как это изложено в предыдущем следствии, и не иначе могут сохранять некоторое определенное друг относительно друга положение, как будучи удерживаемы некоторою силою. По прекращении же постоянного действия тех сил, которым сохранялось движение шаров, вещество, по указанным в следствиях

3 и 4 причинам, будет постепенно успокаиваться и перестанет вращаться в виде вихря.

*Следствие 7.* Если подобную жидкость заключить в сферический сосуд и привести равномерно вращающимся в центре его шаром в вихревое движение, причем шар и сосуд вращаются около одной и той же оси в одну и ту же сторону и времена их оборотов пропорциональны квадратам (*кубам*) их радиусов, то части жидкости лишь тогда начнут сохранять постоянство своего движения, не ускоряясь и не замедляясь, когда времена их обращений станут пропорциональными квадратам (*кубам*) их расстояний до центра вихря. Никакое другое строение вихря не может оставаться постоянным.

*Следствие 8.* Если сосуд, содержащий жидкость и шар, сохраняя свое указанное выше движение, получит еще какое-либо общее вращательное движение около некоторой постоянной оси, то это новое движение не повлияет на трение частей жидкости друг по другу, и относительное их движение не изменится, ибо перемещения частей жидкости друг относительно друга зависят от трения. Всякая часть будет пребывать в таком движении, при котором она трением, действующим на одну ее сторону, замедляется не более того, насколько она ускоряется трением, действующим на другую ее сторону.

*Следствие 9.* Поэтому, если сосуд находится в покое и движение шара будет задано, то найдется и движение жидкости. Ибо вообрази, что через ось шара проведена плоскость, которая вращается в обратную сторону, и положи, что сумма времени ее оборота и времени оборота шара относится к времени оборота шара, как квадрат (*куб*) радиуса сосуда относится к квадрату (*кубу*) радиуса шара; тогда времена обращений частиц жидкости по отношению к этой плоскости будут пропорциональны квадратам (*кубам*) их расстояний до центра шара.

*Следствие 10.* Если сосуд вращается около той же самой оси, как и шар, или около какой-либо иной с какою-либо заданною скоростью, то движение жидкости найдется. Ибо, если от всей системы отнять угловое движение сосуда, то все прочие относительные движения останутся прежними по следствию 8 и найдутся по следствию 9.

*Следствие 11.* Если сосуд и жидкость находятся в покое, шар же вращается равномерно, то движение распространяется постепенно через всю жидкость в сосуде, и сосуд будет вращаться, если только его насильно не удерживать; и жидкость и сосуд перестанут ускоряться лишь после того, как времена их обращения станут равны времени обращения шара.

Если же сосуд будет какою-либо внешнею силою задерживаться или же будет все время вращаем равномерно, то жидкость постепенно придет в состояние движения, указанное в следствиях 8, 9 и 10. Ни в каком же другом состоянии движения она постоянно пребывать не может. Если же затем силы, которыми поддерживалось вращение шара и сосуда, свое действие прекратят и все в дальнейшем будет совершаться по законам механики, то шар и сосуд будут действовать друг на друга при посредстве жидкости и прекратят распространять друг к другу свое движение через жидкость лишь после того, как времена их оборотов сравняются и вся система станет вращаться целиком, наподобие одного твердого тела.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Во всех этих рассуждениях я предполагаю, что жидкость состоит из вещества, однородного как по плотности, так и по текучести. Такова такая жидкость, в которой тот же самый шар, обладающий тем же самым количеством движений в одинаковое время, будучи помещен где бы то ни было, может распространять подобные и равные движения к концу одинаковых промежутков времени в равных от себя расстояниях.

Материя, вследствие своего кругового движения, вынуждается удаляться от оси вихря, и поэтому давит на всю внележащую материю. От этого давления трение частей становится сильнее и разделение их друг от друга труднее, и следовательно, текучесть материи будет уменьшаться. С другой стороны, если частица жидкости где-либо плотнее или крупнее, то текучесть будет там меньше, вследствие меньшего числа поверхностей, которыми частицы разделены друг от друга. В такого рода случаях я предполагаю, что недостаток текучести восполняется скользкостью или мягкостью частиц или каким-либо иным условием. Если же этого не будет, то там, где текучесть вещества меньше, сцепление его больше, и вещество не столь подвижно, вследствие чего оно воспринимает движение позже и распространяет его медленнее, нежели указано выше. Если форма сосуда не сферическая, то частицы будут двигаться по линиям не круговым, а соответствующим форме сосуда, и времена обращений будут приблизительно пропорциональны квадратам (*кубам*) средних расстояний от центра. В тех местах между центром и ободом, где пространство шире, движение будет медленнее, где уже — быстрее; однако более быстро движущиеся частицы не будут стремиться к окружности, ибо они описывают дуги меньшей кривизны, и их стремление к удалению от центра настолько же уменьшается вследствие уменьшения этой кривизны, насколько оно возрастает от увеличения скорости.

При переходе из узких мест в более широкие, частицы несколько удаляются от центра, вследствие чего они замедляют свое движение; затем, когда они вновь переходят в узкие места, их движение ускоряется; таким образом всякая отдельная частица во все время поочередно то ускоряется, то замедляется. Так происходит движение в твердом сосуде, в неограниченной же жидкости строение вихрей указано в следствии 6 этого предложения.

Я старался исследовать свойства вихрей в этом предложении, чтобы испробовать, могут ли небесные явления быть объяснены вихрями. Ибо существует то явление, что времена оборотов планет, обращающихся вокруг Юпитера, находятся в полукубическом отношении к их расстояниям до его центра; то же самое соотношение имеет место и для планет, обращающихся вокруг Солнца. Эти отношения соблюдаются для тех и других планет с совершеннейшею точностью, какую только могли до сих пор доставить астрономические наблюдения. Следовательно, если только эти планеты несутся вихрями, вращающимися около Юпитера и около Солнца, то и эти вихри должны вращаться по таким же законам. Но времена обращений частей вихря оказываются пропорциональными квадратам (*кубам*) расстояний, и это отношение не иначе может уменьшиться и привестись к полукубическому, как если вещество вихря тем более текуче, чем оно дальше от центра, или же если сопротивление, происходящее от недостатка скользкости частей жидкости, при увеличении скорости разделения частей друг от друга возрастает в большем отношении, нежели эта скорость. Однако ни то ни другое разуму не представляется сообразным. Более плотные и менее текучие частицы, если только они не тяготеют к центру, стремятся к окружности. Хотя я для проведения доказательств и предположил в начале этого отдела, что сопротивление пропорционально скорости, однако весьма вероятно, что оно находится в меньшем отношении, нежели скорость; при таком допущении времена обращений частей вихря будут в большем отношении, нежели квадраты (*кубы*) их расстояний до центра. Если же вихри, по мнению некоторых, движутся близ центра скорее, затем до некоторого предела медленнее, затем опять быстрее до окружности, то не может быть получено ни полукубическое, ни какое иное определенное отношение. Пусть философы сами посмотрят, при каком условии может быть объяснено вихрями явление, заключающееся в существовании указанного полукубического отношении.

**Предложение LIII. Теорема LXI**

*Тела, которые при переносе вихрем описывают постоянно одну и ту же орбиту, должны обладать одинаковою с вихрем плотностью и двигаться по тому же закону скорости и ее направления, как и части самого вихря.*

Ибо, если предположить, что какая-либо малая часть вихря, частицы которой сохраняют постоянное относительное расположение, замерзла, то ни в отношении своей скорости, ни в отношении инерции, ни своей формы она не изменилась, поэтому она будет продолжать двигаться по тому же закону, как и раньше. Обратно, если замерзшая и отвердевшая часть вихря будет одинаковой плотности с остальным вихрем и вновь обратится в жидкость, то она будет двигаться по тому же закону, как и раньше, за исключением только того, что ее частицы, ставши жидкими, будут перемещаться друг относительно друга. Следовательно, если пренебречь относительным движением частиц, так как оно не влияет на поступательное движение целого, то движение этого целого будет такое же, как и раньше. Движение же это будет такое же, как и прочих частей вихря, одинаково удаленных от центра, ибо по растворении в жидкость это твердое тело составит часть вихря, подобную прочим.

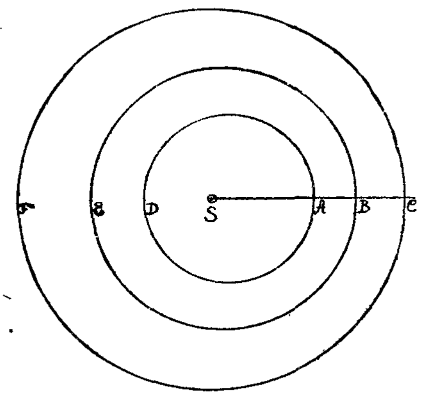
Следовательно, твердое тело, когда плотность его равна плотности вещества вихря, движется одинаковым образом с частями вихря, находясь в покое по отношению к веществу вихря, непосредственно окружающему это тело. Если же тело большей плотности, то оно сильнее будет вынуждаться удалиться от центра, нежели прежде; поэтому, превозмогая ту силу вихря, которою оно раньше удерживалось как бы в равновесии на своей орбите, оно удалится от центра и опишет при своем обращении спираль, а вновь по своей прежней орбите не пойдет. Если же плотность тела меньше, то таким же рассуждением показывается, что тело приблизится к центру. Таким образом тело не будет двигаться по той же самой замкнутой орбите, если только плотность его не одинакова с плотностью жидкости; для этого же случая показано, что тело обращается по тому же закону, как и частицы жидкости, одинаково удаленные от центра вихря.

*Следствие 1.* Следовательно, тело, обращающееся вместе с вихрем по неизменной орбите, находится в покое по отношению к жидкости, в которой оно плавает.

*Следствие 2.* Если вихрь повсюду одинаковой плотности, то то же самое тело может обращаться в любом расстоянии от центра.

*ПОУЧЕНИЕ*

Отсюда следует, что планеты не могут быть переносимы материальными вихрями. Планеты, согласно второй гипотезе *Коперника*, обращаются около Солнца по эллипсам, фокус коих находится в центре Солнца, и описывают радиусами, к нему проведенными, площади, пропорциональные временам, части же вихря не могут обращаться таким образом. Пусть $AD$, $BE$, $CF$ (фиг. 183) представляют три орбиты, описанные вокруг Солнца $S$, и пусть внешняя из них $CF$ есть круг, концентричный с Солнцем, для двух же внутренних пусть будут $A$ и $B$ — афелии, $D$ и $E$ — перигелии. Следовательно, тело, обращающееся по орбите $CF$, описывая проведенным к центру радиусом площади, пропорциональные времени, движется равномерно. Тело же, обращающееся по орбите $BE$, движется медленнее близ афелия $B$ и быстрее близ перигелия $E$, что согласво с законами астрономии; по законам же механики вещество вихря должно двигаться быстрее в более узком пространстве между $A$ и $C$, нежели в более широком между $D$ и $F$, т. е. быстрее в афелии, нежели в перигелии. Одно другому противоречит.



Фиг. 183.

Так, в начале знака Девы, где теперь находится афелий Марса, расстояние между орбитою Марса и орбитою Венеры относится к расстоянию между этими же орбитами в начале знака Рыб приблизительно, как три к двум, поэтому вещество вихря должно бы двигаться в начале знака Рыб быстрее, нежели в начале знака Девы, в $1^1/_2$ раза, ибо чем уже пространство, через которое должно проходить в продолжение того же времени одного оборота то же самое количество вещества, тем больше должна быть его скорость. Следовательно, если бы Земля, находящаяся по отношению к этому веществу в относительном покое, переносилась бы им и обращалась бы вместе с ним вокруг Солнца, то ее скорость в начале знака Рыб была бы в $1^1/_2$ раза больше ее скорости в начале знака Девы. Собственное движение Солнца в начале знака Девы было бы несколько более 70 минут в сутки, а в начале знака Рыб несколько менее 48, тогда как на самом деле (по наблюдениям) указанное движение Солнца больше в начале знака Рыб, нежели в начале знакя Девы, поэтому Земля движется быстрее в начале знака Девы, нежели в начале знака Рыб. Таким образом гипотеза вихрей совершенно противоречит астрономическим явлениям и приводит не столько к объяснению движений небесных тел, сколько к их запутыванию. Способ, которым эти движения совершаются на самом деле в свободном пространстве, можно понять по первой книге, подробнее же он рассматривается в изложении системы мира.

КНИГА ТРЕТЬЯ

# О СИСТЕМЕ МИРА

В предыдущих книгах я изложил начала философии, не столько чисто философские, поскольку математические, однако такие, что на них могут быть обоснованы рассуждения о вопросах физических. Таковы законы и условия движений и сил, имеющие прямое отношение к физике. Чтобы они не казались бесплодными, я пояснил их некоторыми физическими поучениями, рассматривая те общие вопросы, на которых физика, главным образом, основывается, как то: о плотности и сопротивлении тел, о пространствах, свободных от каких-либо тел, о движениях света и звука. Остается изложить, исходя из тех же начал, учение о строении системы мира. Я составил сперва об этом предмете книгу III, придержавшись популярного изложения, так чтобы она читалась многими. Но затем, чтобы те, кто недостаточно поняв начальные положения, а потому совершенно не уяснив силы их следствий и не отбросив привычных им в продолжение многих лет предрассудков, не вовлекли бы дело в пререкания, я переложил сущность этой книги в ряд предложений, по математическому обычаю, так чтобы они читались лишь теми, кто сперва овладел началами. В виду же того, что в началах предложений весьма много, и даже читателю, знающему математику, потребовалось бы слишком много времени, я вовсе не настаиваю, чтобы он овладел ими всеми. Достаточно, если кто тщательно прочтет определения, законы движения и первые три отдела книги I и затем перейдет к этой книге III о системе мира; из прочих же предложений предыдущих книг, если того пожелает, будет справляться в тех, на которые есть ссылки.

## ПРАВИЛА УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ В ФИЗИКЕ[179]

### Правило I

*Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.*

По этому поводу философы утверждают, что природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей.

### Правило II

*Поэтому, поскольку возможно, должно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.*

Так, например, дыханию людей и животных, падению камней в Европе и в Африке, свету кухонного очага и Солнца, отражению света на Земле и на планетах.

---

179 Заглавие в подлиннике есть: «Regulae philosophandi», т. е. «правила философствования». Уже не раз приходилось обращать внимание на тогдашнюю терминологию, удержавшуюся в английском языке и по теперешнее время. По этой терминологии натуральной философией называлась наука о природе вообще, в частности физика, а под словом physics разумеется медицина.

В те времена была гораздо более тесная связь между «философией» и «физикой» в теперешнем смысле этих слов. Так, Маклорен свой «Отчет о философских открытиях Ньютона» начинает словами: «Описывать *явления* природы, объяснять их причины, намечать соотношения и связи между этими причинами и исследовать все устройство вселенной есть задача натуральной философии»... «Но натуральная философия подчинена и высшего рода целям и должна, главным образом, цениться потому, что она полагает надежное основание естественной религии и нравственной философии, приводя удовлетворительным образом к познанию творца и вседержителя вселенной».

Философские системы, в особенности декартова, тогда еще прочно царили над учением о природе и мироздании. Ньютоново воззрение, что при изучении природы надо от наблюдаемых явлений восходить к установлению причин, коими они объясняются, шло в разрез с декартовым учением, согласно которому надо проницательностью ума вперед установить первопричины и из них выводить следствия.

С другой стороны, философия близко примыкала к религии и богословию; связь эта бывала не только свободною, но и насильственною, чему примером может служить следующее *«заявление о. Лесера и Жакье»*, предпосланное третьему тому их издания ньютоновых «Начал» 1760 г.: «Ньютон в этой книге III принимает гипотезу о движении Земли. Предложения автора не могут быть объяснены иначе, как на основании сделанной гипотезы. Таким образом мы вынуждены выступать от чужого имени. Сами же мы открыто заявляем, что мы следуем постановлениям, изданным верховными первосвященниками против движения Земли». Это заявление не помешало, однако, ученым отцам иезуитам к 140 страницам, составляющим книгу III «Начал» Ньютона, добавить в своем издании 540 страниц толкований, из которых видно, что движение Земли едва ли рассматривалось ими как гипотеза, отринутая постановлениями римских пап и уже по одному этому неверная.

### Правило III

*Такие свойства тел, которые не могут быть ни усиляемы, ни ослабляемы и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.*

Свойства тел постигаются не иначе, как испытаниями; следовательно, за общие свойства надо принимать те, которые постоянно при опытах обнаруживаются и которые, как не подлежащие уменьшению, устранены быть не могут. Понятно, что в противность ряду опытов не следует измышлять на авось каких-либо бредней, не следует также уклоняться от сходственности в природе, ибо природа всегда и проста и всегда сама с собой согласна.

Протяженность тел распознается не иначе, как нашими чувствами, тела же не все чувствам доступны, но так как это свойство присуще всем телам, доступным чувствам, то оно и приписывается всем телам вообще. Опыт показывает, что многие тела тверды. Но твердость целого происходит от твердости частей его, поэтому мы по справедливости заключаем, что не только у тех тел, которые нашим чувствам представляются твердыми, но и у всех других неделимые частицы тверды. О том, что все тела непроницаемы, мы заключаем не по отвлеченному рассуждению, а по свидетельству чувств. Все тела, с которыми мы имеем дело, оказываются непроницаемыми, отсюда мы заключаем, что непроницаемость есть общее свойство всех тел вообще. О том, что все тела подвижны и, вследствие некоторых сил (которые мы называем силами инерции), продолжают сохранять свое движение или покой, мы заключаем по этим свойствам тех тел, которые мы видим. Протяженность, твердость, непроницаемость, подвижность и инертность целого происходят от протяженности, твердости, непроницаемости, подвижности и инерции частей, отсюда мы заключаем, что все малейшие частицы всех тел протяженны, тверды, непроницаемы, подвижны и обладают инерцией. Таково основание всей физики. Далее мы знаем по совершающимся явлениям, что делимые, но смежные части тел могут быть разлучены друг от друга, из математики же следует, что в нераздельных частицах могут быть мысленно различаемы еще меньшие части. Однако неизвестно, могут ли эти различные частицы, до сих пор не разделенные, быть разделены и разлучены друг от друга силами природы. Но если бы, хотя бы единственным опытом, было установлено, что некоторая неделимая частица при разломе твердого и крепкого тела подвергается делению, то в силу этого правила мы бы заключили, что не только делимые части разлучаемы, но что и неделимые могут быть делимы до бесконечности и действительно разлучены друг от друга.

Наконец, как опытами, так и астрономическими наблюдениями устанавливается, что все тела по соседству с Землею тяготеют к Земле, и притом пропорционально количеству материи каждого из них; так, Луна тяготеет к Земле пропорционально своей массе, и взаимно наши моря тяготеют к Луне, все планеты тяготеют друг к другу; подобно этому и тяготение комет к Солнцу. На основании этого правила надо утверждать, что все тела тяготеют друг к другу. Всеобщее тяготение подтверждается явлениями даже сильнее, нежели непроницаемость тел, для которой по отношению к телам небесным мы не имеем никакого опыта и никакого наблюдения. Однако я отнюдь не утверждаю, что тяготение существенно для тел. Под врожденною силою я разумею единственно только силу инерции. Она неизменна. Тяжесть при удалении от Земли уменьшается.

### Правило IV

*В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.*

Так должно поступать, чтобы доводы наведения не уничтожались предположениями.

## ЯВЛЕНИЯ

### Явление I

*Спутники Юпитера описывают радиусами, проведенными к его центру, площади, пропорциональные временам; времена их обращений по отношению к неподвижным звездам находятся в полукубическом отношении их расстояний до того же центра.*

Установлено астрономическими наблюдениями. Орбиты этих спутников не отличаются чувствительно от кругов, одноцентренных с Юпитером, и движения их по этим кругам представляются равномерными. В том же, что времена обращений находятся в полукубическом отношении полудиаметров орбит, астрономы между собою согласны, что явствует также из следующей таблицы. [180]

---

180 Чтобы судить, в какой мере точно были известны главнейшие элементы солнечной системы во времена Ньютона, приводим для планет элементы, принятые Леверрье в его «Recherches Astronomiques», и для спутников — элементы, показанные в Annuaire du Bureau des Longitudes за 1912 г.

| Планеты | Времена звездных оборотов | Большие полуоси орбит | Массы | |
|---|---|---|---|---|
| | | | по Леверрье | по Bureau des Long. |
| Меркурий | 87с.9692580 | 0.3870987 | 1 : 3000000 | 1 : 6000000 |
| Венера | 224.7007869 | 0.7233322 | 1 : 401847 | 1 : 408000 |
| Земля | 365.2563744 | 1.0000000 | 1 : 354936 | 1 : 333432 |
| Марс | 686.9796458 | 1.523621 | 1 : 2680337 | 1 : 3093500 |
| Юпитер | 4332.5848212 | 5.202798 | 1 : 1050 | 1 : 1047,355 |
| Сатурн | 10759.2198174 | 9.538852 | 1 : 3512 | 1 : 3501,6 |

*Спутники Юпитера*

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Врем. звездн. обор. | 1с 18ч 27м 33с.5 | 3с 13ч 13м 42с.0 | 7с 3ч 42м 33с.4 | 16с 16ч 32м 11с.2 |
| Средн. расстояния | 5.906 | 9.397 | 14.989 | 26.364 |

*Спутники Сатурна*

| № | Кем и когда открыт | Времена звездных оборотов | Средние расстояния | Приведенные средние расстояния |
|---|---|---|---|---|
| I | Гершель в 1789 г. | 0с 22ч 37м 5с.3 | 3.07 | 1.25 |
| II | » » 1789 » | 1 8 53 6.8 | 3 94 | 1 56 |
| III | Кассини в 1684 » | 1 21 18 26.2 | 4.87 | 1.92 |
| IV | » » 1684 » | 2 17 41 9.5 | 6.25 | 2.47 |
| V | » » 1672 » | 4 12 25 12.2 | 8.73 | 3.45 |
| VI | Гюйгенс в 1655 » | 15 22 41 27.0 | 20.22 | 8.00 |
| VII | Бонд в 1848 г. | 21 6 38 23.9 | 24.49 | 9.70 |
| VIII | Кассини в 1671 г. | 79 7 56 22.7 | 58.91 | 22.90 |

*Времена обращений спутников Юпитера*

$1^{д}18^{ч}27^{м}34^{с}$;    $3^{д}13^{ч}13^{м}42^{с}$;    $7^{д}3^{ч}42^{м}36^{с}$;    $16^{д}16^{ч}32^{м}9^{с}$.

*Расстояния спутников от центра Юпитера*

| По наблюдениям | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| Борелли . . . . . . . . . . . | $5\frac{2}{3}$ | $8\frac{2}{8}$ | 14 | $24\frac{2}{8}$ | |
| Таунлей микрометром . . . . | 5.52 | 8.78 | 13.47 | 24.72 | Полудиам. |
| Кассини телескбпом . . . . . . | 5 | 8 | 13 | 23 | Юпитера |
| » по затм. спутников . . | $5\frac{2}{3}$ | 9 | $14\frac{23}{60}$ | $25\frac{3}{10}$ | |
| По временам обращений . . . . | 5.667 | 9.017 | 14.384 | 25.299 | |

Г. *Поунд* определил элонгации спутников Юпитера и диаметр его превосходными микрометрами следующим образом. Наибольшая гелиоцентрическая элонгация четвертого спутника от центра Юпитера была взята микрометром телескопа 15-футовой длины, и при среднем расстоянии Юпитера до Земли оказалась равной $8'16''$. Элонгация третьего спутника была взята микрометром телескопа в 123 фута длины, и при том же расстоянии Юпитера до Земли оказалась равной $4'42''$. Наибольшие элонгации двух прочих спутников при том же расстоянии, рассчитанные по временам обращения, оказываются $2'56''47'''$ и $1'51''6'''$.

Диаметр Юпитера часто брался микрометром 123-футового телескопа, и, по приведении к среднему расстоянию Юпитера до Земли, всегда оказывался меньше $40''$, никогда не меньше $38''$, чаще всего в $39''$. При наблюдении более короткими телескопами этот диаметр оказывается в $40''$ или $41''$, ибо свет Юпитера, вследствие неодинаковой преломляемости, несколько расширяется, расширение же это составляет меньшую долю диаметра Юпитера в более длинных и совершенных телескопах, нежели в более коротких и менее совершенных. Тем же длинным телескопом наблюдались времена прохождений двух спутников, первого и третьего, через диск Юпитера от начала вхождения до начала выхождения и от полного вхождения до полного выхождения. Диаметр Юпитера при среднем его расстоянии до Земли оказывается равным, по прохождению первого спутника, $37\frac{1''}{8}$, по прохождению третьего $37\frac{3''}{8}$. Наблюдалось также время прохождения тени первого спутника по диску Юпитера; получаемый отсюда диаметр Юпитера при среднем его расстоянии от Земли оказался около 37″. Мы принимаем этот диаметр в $37\frac{1}{4}''$, тогда наибольшие элонгации первого, второго, третьего и четвертого спутников составят соответственно: 5.965, 9.494, 15.141 и 26.63 полудиаметра Юпитера.

**Явление II**

*Спутники Сатурна описывают радиусами, проведенными к его центру, площади, пропорциональные временам, и времена их обращений по отношению к неподвижным звездам находятся в полукубическом отношении их расстояний до того же центра.*

Ибо по определениям *Кассини* этих расстояний и времен обращений они таковы:

| Времена обращений спутников Сатурна | Расстояния спутников до центра Сатурна в полудиаметрах кольца | |
|---|---|---|
| | по наблюдениям | по временам обращения |
| $1^{с}21^{ч}18^{м}27^{с}$ | $1\frac{19}{20}$ | 1.93 |
| 2 17 41 22 | $2\frac{1}{2}$ | 2.47 |
| 4 12 25 12 | $3\frac{1}{2}$ | 3.45 |
| 15 22 41 14 | 8 | 8 |
| 79 7 48 00 | 24 | 23.35 |

Наибольшая элонгация четвертого спутника от центра Сатурна, обыкновенно определяемая по наблюдениям, оказывается приблизительно равной восьми полудиаметрам кольца. При определении же этой наибольшей элонгации превосходнейшим микрометром гюйгенсовского телескопа 123-футовой длины, она оказалась в 8.7 полудиаметра. Рассчитанные по временам обращений и этой элонгации величины наибольших элонгаций прочих спутников составят в полудиаметрах кольца: 2.1, 2.69, 3.75, 8.7 и 25.35. Диаметр Сатурна, при наблюдениях тем же телескопом, составлял $\frac{3}{7}$ диаметра кольца, который 28 и 29 мая 1719 г. оказался равным 43″. Отсюда следует, что диаметр кольца при среднем расстоянии Сатурна от Земли равен 42″ и диаметр Сатурна 18″. Так это представляется при наблюдении в наиболее длинные и лучшие телескопы, ибо кажущиеся величины небесных тел при длинных телескопах находятся в большем отношении к расширению света близ краев этих тел, нежели при телескопах коротких. Если отбросить все световые погрешности, то диаметр Сатурна не более 16″.

### Явление III

*Пять главных планет: Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн — охватывают своими орбитами Солнце.*

Что Меркурий и Венера обращаются вокруг Солнца, доказывается их фазами, подобными лунным. Когда они сияют полным диском, они расположены за Солнцем, когда половинным — в области Солнца, когда серповидным — ближе Солнца, иногда они проходят и по его диску подобно пятнам. Что Марс обходит вокруг Солнца, явствует из полноты его диска близ соединений с Солнцем и по горбатому его виду в квадратурах. То же самое доказывается относительно Юпитера и Сатурна, всегда находящихся в полной фазе, а что свет их сияния заимствуется от Солнца следует из того, что тень их спутников иногда отбрасывается на диски их.

### Явление IV

*Звездные времена оборотов пяти главных планет, а также и Солнца вокруг Земли или Земли вокруг Солнца, находятся в полукубическом отношении их средних расстояний от Солнца.*

Это найденное *Кеплером* отношение признается всеми. При этом времена оборотов и размеры орбит те же самые, обращается ли Солнце вокруг Земли или Земля вокруг Солнца. Все астрономы согласны между собою относительно времен оборотов, величины же орбит были определены тщательнейшим образом из наблюдений *Кеплером* и *Буллио*; * средние расстояния, соответствующие временам оборотов, не отличаются чувствительно от найденных ими, по большей же части заключаются между их определениями, как можно видеть из таблицы на стр. 509.

О расстояниях Меркурия и Венеры до Солнца спора быть не может, ибо они определяются по наибольшим элонгациям этих планет от Солнца. Всякий же спор о расстояниях верхних планет до Солнца устраняется затме-

* В тексте Bullialdus — олатыненная фамилия французского астронома Bouillaud.

| Планеты | Времена оборотов | Средние расстояния | | |
|---|---|---|---|---|
| | | по Кеплеру | по Буллио | по временам оборотов |
| Сатурн . . . . | 10759с.275 | 951000 | 954198 | 954006 |
| Юпитер . . . . | 4332.514 | 519650 | 522520 | 520096 |
| Марс . . . . . . | 686.9785 | 152350 | 152350 | 152369 |
| Земля . . . . . | 365.2565 | 100000 | 100000 | 100000 |
| Венера . . . . . | 224.6176 | 72400 | 72398 | 72333 |
| Меркурий . . . . | 87.9692 | 38806 | 38585 | 38710 |

ниями спутников Юпитера, ибо этими затмениями определяется положение тени, отбрасываемой Юпитером, откуда получается затем гелиоцентрическая долгота Юпитера, по сопоставлении же долгот гелиоцентрической и геоцентрической определяется расстояние Юпитера.

### Явление V

*Главные планеты радиусами, проведенными к Земле, описывают площади, совершенно не пропорциональные времени, радиусы же, проведенные к Солнцу, пробегают площади, пропорциональные времени.*

Ибо по отношению к Земле их движение то прямое, то они находятся в стояниях, то движутся попятно; по отношению же к Солнцу их движение всегда прямое и притом почти равномерное, лишь немного быстрее в перигелиях и медленнее в афелиях, так что описание площадей равномерное. Это предложение известно астрономам и особенно доказательно для Юпитера по затмению его спутников, при помощи каковых затмений, как уже сказано, могут быть определяемы гелиоцентрические долготы и расстояния этой планеты.

### Явление VI

*Луна описывает радиусом, проводимым к центру Земли, площади, пропорциональные времени.*

Это следует из сопоставления видимого движения Луны с ее видимым диаметром. Впрочем, движение Луны несколько возмущается силою Солнца, но в этих явлениях я пренебрегаю нечувствительными мелочами погрешностей.

## ПРЕДЛОЖЕНИЯ

### Предложение I. Теорема I

*Силы, которыми спутники Юпитера постоянно отклоняются от прямолинейного движения и удерживаются на своих орбитах, направлены к центру Юпитера и обратно пропорциональны квадратам расстояний мест до этого центра.*

Первая часть предложения следует из явления I и предложений II или III книги I; последняя часть — из явления I и следствия 6 предложения IV той же книги.

То же самое разумей и о спутниках Сатурна, на основании явления II.

### Предложение II. Теорема II

*Силы, которыми главные планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и удерживаются на своих орбитах, направлены к Солнцу и обратно пропорциональны квадратам расстояний до центра его.*

Первая часть предложения следует на основании явления V из предложения II книги I, последняя часть — на основании явления из предложения IV той же книги.

Точнейшим же образом эта часть предложения доказывается неподвижностью афелиев, ибо самое малейшее отклонение от обратной пропорциональности квадратам расстояний (по след. 1 предл. XLV кн. I) должно производить заметное перемещение апсид для каждого отдельного оборота и огромное для многих.

### Предложение III. Теорема III

*Сила, которою Луна удерживается на своей орбите, направлена к Земле и обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра Земли.*

Первая часть этого утверждения следует из явления VI и предложений II или III книги I, вторая часть — из весьма медленного движения лунного апогея, ибо это движение, которое за каждый оборот составляет около $3°3'$ в попутную сторону, может быть пренебрежено. Из следствия же 1 предложения XLV книги I явствует, что если отношение расстояния Луны до центра Земли к полудиаметру последней равно $D:1$. то сила, от которой происходило бы такое движение, была бы обратно пропорциональна $D^{2\frac{4}{248}}$, т. е. такой степени расстояиня, показатель которой равен $2\frac{4}{243}$, следовательно немногим более 2, иначе в отношении, которое в $59\frac{3}{4}$ раза ближе к квадратному, нежели к кубическому. На самом же деле это движение происходит от действия Солнца (как будет показано ниже), и поэтому здесь им можно пренебречь. Действие Солнца, поскольку оно оттягивает Луну от Земли, приблизительно пропорционально расстоянию Луны до Земли и, следовательно (по сказанному в след. 2 предл. XLV кн. I), относится к центростремительной силе Луны кругло, как 2 к 357.45 или как 1 к 178.725. Если пренебречь такою незначительною силою Солнца, то остающаяся сила, которою Луна удерживается на своей орбите, будет обратно пропорциональна $D^2$. Это устанавливается еще полнее, сопоставляя эту силу с силою тяжести, как это сделано в следующем предложении.

*Следствие.* Если среднюю центростремительную силу, которою Луна удерживается на своей орбите, сперва увеличить в отношении 177.725 к 178.725, затем в отношении квадрата среднего расстояния центра Луны до центра Земли к квадрату полудиаметра Земли, то получится лунная центростремительная сила у поверхности Земли, предполагая, что при приближении к Земле сила эта увеличивается в обратном отношении квадратов расстояний.

### Предложение IV. Теорема IV

*Луна тяготеет к Земле и силою тяготения постоянно отклоняется от прямолинейного движения и удерживается на своей орбите.*

Среднее расстояние Луны до Земли в сизигиях составляет по Птоломею, и многим астрономам 59 полудиаметров Земли, по Венделину и Гюйгенсу 60, по Копернику $60\frac{1}{3}$, по Стриту $60\frac{2}{5}$, по Тихо $56\frac{1}{2}$. Но Тихо и все те, кто следует его таблицам рефракции, принимая для Солнца и Луны (в полную противность природе света) рефракцию больше, нежели для неподвижных звезд, на 4′ или 5′, настолько же увеличивали параллакс Луны, т. е. почти на двенадцатую или пятнадцатую ее часть. Если исправить эту ошибку, то расстояние получится около $60\frac{1}{2}$ земных полудиаметров, т. е. как оно дается и другими астрономами. Примем среднее расстояние в сизигиях равным 60 полудиаметрам; время звездного оборота Луны равно 27 суткам, 7 часам 43 минутам, как это установлено астрономами, наконец окружность Земли равна 123 249 600 парижских футов по определениям, основанным на французских измерениях. Если бы Луна была лишена всякого движения и под действием той полной силы, которою (по следствию предл. III) она удерживается на своей орбите, стала бы падать на Землю, то при таком своем падении она прошла бы в первую минуту путь, равный $15\frac{1}{12}$ парижским футам. Это можно вывести вычислением или на основании предложения XXXVI книги I или, что приводит к тому же, по следствию 9 предложения IV той же книги, ибо синус верзус дуги, описываемый Луною при среднем ее движении в 1 минуту и при расстоянии 60 полудиаметров, равен приблизительно $15\frac{1}{12}$ парижским футам, или точнее 15 футам 1 дюйму $1\frac{4}{9}$ линии. Так как при приближении к Земле сила эта возрастает в обратном отношении квадратов расстояний, то у поверхности Земли она будет $60 \cdot 60$ раз более, нежели на орбите Луны; тело, падающее под действием такой силы в наших местах, стало бы описывать в первую минуту $60 \cdot 60 \cdot 15\frac{1}{12}$ парижских футов, в первую же секунду $15\frac{1}{12}$ или точнее 15 футов 1 дюйм $1\frac{4}{9}$ линии. Действительно, тяжелые тела и падают на Землю под влиянием такой силы, ибо длина маятника, делающего в широте Парижа свои размахи в 1 секунду, равна 3 футам $8\frac{1}{2}$ линиям парижским, как это наблюдал Гюйгенс. Отношение же высоты, проходимой телом при падении в первую секунду, к длине такого маятника равно квадрату отношения окружности к диаметру (как показано также Гюйгенсом), следовательно эта высота равна 15 футам 1 дюйму $1\frac{7}{9}$ линии парижской Итак, сила, которою Луна удерживается на своей орбите, если ее опустить до поверхности Земли, становится равной силе тяжести у нас, поэтому (по правилам I и II) она и есть та самая сила, которую мы называем тяжестью или тяготением. Ибо, если бы тяжесть была отличною от нее силою, то тела, стремясь к Земле под совокупным действием обеих сил, падали бы вдвое скорее и описывали бы в первую секунду своего падения $30\frac{1}{6}$ парижских футов, что совершенно противоречит опыту.

Этот расчет основан на предположении, что Земля находится в покое; если же принять, что Земля и Луна движутся вокруг Солнца и вместе с тем обращаются около общего центра тяжести, то при сохранении закона тяготения расстояние центров Луны и Земли будет $60\frac{1}{2}$ полудиаметров Земли, как то можно определить по расчету, основанному на предложении LX книги I.[181]

---

[181] Обозначим массу Земли через $S$, массу Луны — через $P$; тогда, на основании указанного в тексте предложения, упомянутое расстояние будет

$$60\sqrt[3]{\frac{S+P}{P}}.$$

### *ПОУЧЕНИЕ*

Доказательство этого предложения может быть объяснено подробнее следующим образом. Если бы около Земли обращалось несколько лун, подобно тому как около Юпитера и Сатурна, то времена их обращений (на основании наведения) следовали бы планетным законам, открытым *Кеплером*, и поэтому их центростремительные силы были бы по предложению I обратно пропорциональны квадратам расстояний. Если бы наинизшая из этих лун была малой и почти что касалась бы вершин высочайших гор, то центростремительная сила, которою она удерживалась бы на своей орбите (согласно предыдущему расчету), равнялась бы приблизительно силе тяжести на вершине этих гор; если бы этот спутничек лишить его поступательного движения по орбите, то вследствие отсутствия центробежной силы, от которой он продолжает оставаться на своей орбите, он под действием предыдущей стал бы падать на Землю и притом с такою же скоростью, с какою на вершинах этих гор падают тяжелые тела, ибо в обоих случаях действующие силы равны. Если бы та сила, под действием которой падал бы этот маленький низший спутничек, была отличною от силы тяжести, спутничек же этот, подобно всем телам, тяготел бы к Земле одинаково с телами, находящимися на вершинах гор, то под совокупным действием обеих сил он падал бы вдвое быстрее. Поэтому, так как обе силы, т. е. действующая на тяжелые тела и действующая на спутничек, направлены к центру Земли и между собою подобны и равны, они те же самые и имеют ту же самую причину (по правилам I и II). Следовательно, та сила, которою Луна удерживается на своей орбите, есть та же самая, которую мы называем силою тяжести, ибо в противном случае или сказанный спутничек на вершинах гор не имел бы тяжести, или же падал бы вдвое скорее, нежели падают тяжелые тела.

### Предложение V. Теорема V

*Планеты, обращающиеся около Юпитера, тяготеют к Юпитеру, обращающиеся около Сатурна — к Сатурну, обращающиеся около Солнца — к Солнцу, и силою этого тяготения постоянно отклоняются от прямолинейного пути и удерживаются на криволинейных орбитах.*

---

В следствии 4 предложения XXXVII этой книги Ньютон находит, что отношение $S:P=$ $=39.788:1$. Следовательно, будет

$$60\sqrt[3]{\frac{S+P}{S}}=60\sqrt[3]{\frac{40.788}{30.788}}=60.5.$$

Ибо обращения спутников вокруг Юпитера и Сатурна, обращения Меркурия и Венеры и остальных планет около Солнца суть явления того же рода, как и обращение Луны вокруг Земли, поэтому (прав. II) их происхождение надо приписывать одинакового рода причинам, в особенности после того как доказано, что силы, под действием которых эти обращения совершаются, направлены к центру Юпитера, Сатурна или Солнца и при удалении от Юпитера, Сатурна и Солнца убывают в том же отношении и по тому же закону, в каком убывает сила тяжести при удалении от Земли.

*Следствие 1.* Следовательно, тяготение существует на всех планетах, ибо никто не сомневается, что Венера, Меркурий и прочие планеты суть тела такого же рода, как Юпитер и Сатурн. А так как всякое притяжение, по закону III движения, всегда взаимное, то Юпитер тяготеет ко всем своим спутникам, Сатурн — к своим, Земля — к Луне, Солнце — ко всем главным планетам.

*Следствие 2.* Тяготение, направляющееся к любой из планет, обратно пропорционально квадратам расстояний мест до центра ее.

*Следствие 3.* Все планеты тяготеют друг к кругу по следствиям 1 и 2. Таким образом Юпитер и Сатурн, близ соединений притягиваясь друг к другу, чувствительно возмущают свои движения, Солнце возмущает движение Луны, Солнце и Луна возмущают наши земные моря, как то будет пояснено ниже.

## *ПОУЧЕНИЕ*

До сих пор мы называли ту силу, которою небесные тела удерживаются на своих орбитах, центростремительною, но так как теперь показано, что это есть тяготение, то ниже мы будем ее так называть, ибо причиия той центростремительной силы, которою Луна удерживается на своей орбите, по правилам I, II и IV должна быть распространяема и на все прочие планеты.

### Предложение VI. Теорема VI

*Все тела тяготеют к каждой отдельной планете, и веса тел на всякой планете, при одинаковых расстояниях от ее центра, пропорциональны массам этих планет.*

Падение всех тяжелых тел на Землю с одинаковой высоты (выключив неравное замедление, происходящее от ничтожного сопротивления воздуха) совершается в одинаковое время, как это уже наблюдено другими, точнейшим же образом это может быть установлено по равенству времен качаний маятников. Я произвел такое испытание для золота, серебра, свинца, стекла, песка, обыкновенной соли, дерева, воды, пшеницы. Я заготовил две круглых деревянных кадочки, равные между собою; одну из них я заполнил деревом, в другой же я поместил такой же точно груз из золота (насколько смог точно) в центре качаний. Кадочки, подвешенные на равных нитях 11 футов длиною, образовали два маятника, совершенно одинаковых по весу, форме и сопротивлению воздуха; будучи помещены рядом, они при равных качаниях шли взад и вперед вместе в продолжение весьма долгого времени. Следовательно, количество вещества (масса) в золоте (по след. 1 и 6 предл. XXIV кн. II) относилось к количеству вещества в дереве, как действие движущей силы на все золото к ее действию на все дерево, т. е. как вес одного к весу другого. То же самое было и для прочих тел. Для тел одинакового веса разность количеств вещества (масс), даже меньшая одной тысячной доли полной массы, могла бы быть с ясностью обнаружена этими опытами.[182]

Конечно, не может быть сомнения, что природа тяжести на других планетах такова же, как и на Земле. В самом деле, вообразим, что земные тела подняты до орбиты Луны и пущены вместе с Луною, также лишенной всякого движения, падать на Землю; на основании уже доказанного несомненно, что в одинаковые времена они пройдут одинаковые с Луною пространства, ибо их массы так относятся к массе Луны, как их веса к весу ее. Так как времена обращений спутников Юпитера находятся в полукубическом отношении их расстояний до центра Юпитера, то ускорительные силы их тяготений к Юпитеру обратно пропорциональны квадратам расстояний до центра его, поэтому в равных от Юпитера расстояниях эти ускорительные силы равны, вследствие чего тела при падении с одинаковых высот в равные времена будут проходить и равные пути, подобно тому как это совершается у нас на Земле. На основании такого рассуждения следует, что планеты, обращающиеся вокруг Солнца, будучи пущены в равных от Солнца расстояниях, описывали бы при своем падении на Солнце в равные

[182] Этот основной опыт Ньютона, которым он устанавливает пропорциональность между массою и весом, причем отступление в $\frac{1}{1000}$ от этой пропорциональности обнаружилось бы, был повторен с особенными предосторожностями и тщательностью Бесселем в 1828 г. Бессель исследовал маятники, для груза которых он брал: три сорта латуни, железо, цинк, свинец, серебро, золото, два сорта метеорного железа, мрамор, глину, кварц. Результат его тот, что длина секундного маятника в Кенигсберге, составляющая 440.8154 линий при отдельных определениях, отличалась не более 0.01 линии от указанной средней, причем эти отклонения имеют характер случайных погрешностей, а не систематических, и значит, пропорциональность массы весу подтверждается со всею точностью, которая могла быть достигнута (F. W. Bessel. Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht. Abh. d. Akad. zu Berlin, 1830).

времена равные пространства. Но силы, которыми неравные массы ускоряются одинаково, пропорциональны массам, т. е. тяготения пропорциональны массам планет. Что тяготение Юпитера и его спутников к Солнцу пропорционально их массам, следует (по след. 3 предл. LXV кн. I); кроме этого, и из высшей степени правильного движения этих спутников, ибо, если бы которые-нибудь из них притягивались бы к Солнцу сильнее, нежели прочие по пропорции масс их, то (по след. 2 предл. LXV кн. I) движение спутников, вследствие неодинаковости притяжений, было бы возмущено. Так, если бы при одинаковых от Солнца расстояниях который-нибудь из спутников тяготел бы к Солнцу сильнее, нежели бы следовало по массе его, чем Юпитер соответственно своей массе, в каком-либо заданном отношении, положим $d:e$, то расстояние между центром Солнца и центром орбиты спутника было бы постоянно больше, нежели расстояние между центром Солнца и центром Юпитера, в отношении, приблизительно равном $\sqrt{d}:\sqrt{e}$, как найдено мною при помощи некоторого расчета.[183] Если же тяготение спутника к Солнцу было бы меньше в указанном отношении $d:e$, то расстояние центра орбиты спутника до Солнца было бы меньше, нежели расстояние центра Юпитера до Солнца в отношении $\sqrt{d}:\sqrt{e}$. Поэтому, если в равных расстояниях от Солнца, тяготение которого-нибудь из спутников к Солнцу было бы больше или меньше ускоряющей силы тяготения Юпитера к Солнцу, хотя бы на одну тысячную долю полной величины ее, то расстояние центра орбиты спутника от Солнца было бы больше или меньше расстояния центра Юпитера от Солнца на $\frac{1}{2000}$ полного расстояния, т. е. на $^1/_5$ расстояния крайнего спутника от центра Юпитера, что составило бы весьма заметный эксцентриситет орбиты. Но орбиты спутников концентричны с Юпитером, поэтому ускорительные силы притяжения Юпитера и спутников к Солнцу равны между собою. На основании такого же

[183] Это соотношение получается, если уравнять среднюю величину силы притяжения Солнцем единицы массы спутиика средней же величине силы притяжения Солнцем Юпитера. За первую из этих сил принимается приближенно величина притяжения Солнцем спутиика в расстоянии, равном расстоянию центра описываемой им орбиты до Солнца. В самом деле, обозначая расстояние Юпитера до Солнца через $a$, расстояние центра орбиты спутника до Солнца — через $a+\varepsilon$ и через $\mu$ — силу притяжения Солнцем единицы массы Юпитера при расстоянии, равном единице, будем иметь, что притяжение для Юпитера будет $\frac{\mu}{a^2}$, притяжение для спутника $\frac{d}{e}\cdot\frac{\mu}{(a+\varepsilon)^2}$, значит по условию должно быть

$$\frac{1}{(d+\varepsilon)^2}\cdot\frac{d}{e}=\frac{1}{a^2}.$$

Откуда

$$(a+\varepsilon):a=\sqrt{a}:\sqrt{e}.$$

рассуждения следует, что притяжения Сатурна и его спутников к Солнцу, при равных от Солнца расстояниях, пропорциональны массам их; также и притяжения Луны и Земли к Солнцу или равны нулю, или же в точности пропорциональны массам их, а что они таковы, следует из предложения V, следствий 1 и 3.

Далее, тяготения отдельных частей каждой планеты к какой-либо другой пропорциональны массам этих частей, ибо если бы некоторые части тяготели более, другие менее, нежели соответствует их массам, то вся планета, сообразно роду преобладающих частиц, тяготела бы более или менее, нежели соответственно полной массе своей. При этом безразлично, наружные ли эти части, или внутренние. Если бы, например, вообразить, что наши земные тела подняты до орбиты Луны и сравниваются с ее массою, то если бы веса этих тел находились к весам наружных частей Луны в отношении масс, к весам же внутренних частей — в большем или меньшем отношении, то они были бы и в большем или меньшем отношении и к массе всей Луны, что противно доказанному выше.

*Следствие 1.* Следовательно, вес тел не зависит от формы их или строения их, ибо, если бы он мог изменяться вместе с формою, то он был бы больше или меньше при разной форме и равной массе, что противоречит опыту.

*Следствие 2.* Все тела вообще, находящиеся около Земли, тяготеют к Земле, и веса всех тел, равноудаленных от центра Земли, пропорциональны их массам. Это свойство принадлежит всем телам, над которыми можно производить испытания; поэтому по правилу III его должно приписать всем телам вообще. Если бы эфир или какое-либо иное тело или совершенно был бы лишен тяжести, или же тяготел бы менее, нежели соответственно массе его, тогда (согласно *Аристотелю*, *Декарту* и др.), не отличаясь от других тел ничем, разве только формою материи, он мог бы изменением формы быть постепенно переведен в тело таких же свойств, как и те, которые тяготеют в точности пропорционально своим массам, и наоборот; вполне тяжелые тела при постепенном изменении формы тогда могли бы постепенно утрачивать свой вес, и следовательно, веса тел зависели бы от формы их, в противность доказанному в предыдущем следствии.

*Следствие 3.* Не все пространства заполнены в равной мере. Ибо, если бы все пространства были равно заполнены, то удельный вес жидкости, заполняющей область воздуха, вследствие весьма большой плотности материи, не уступал бы удельному весу ртути или золота или же какого иного самого плотного тела, и поэтому ни золото, ни какое-либо иное тело не могло бы падать в воздухе, так как тела совершенно не опускаются вниз в жидкости, если только они не большего удельного веса. Если же количество вещества, заключающееся в данном пространстве, может быть уменьшаемо помощью какого-либо разрежения, то почему бы оно не могло быть уменьшаемо и до бесконечности?

*Следствие 4.* Если все прочные частицы всех тел одной и той же плотности и, как не обладающие порами, не могут разрежаться, то пустота существует. Я называю одинаковой плотности такие тела, для коих силы инерции пропорциональны объему.

*Следствие 5.* Сила тяжести иного рода, нежели сила магнитная, ибо магнитное притяжение не пропорционально притягиваемой массе: одни тела притягиваются сильнее, другие — слабее, большая часть совсем не притягивается. Магнитная сила в том же самом одном теле может быть увеличиваема и уменьшаема, иногда она даже гораздо больше, относя к массе, нежели сила тяжести; при удалении от магнита она убывает не обратно пропорционально квадратам расстояний, а ближе к кубам, поскольку я мог судить по некоторым грубым опытам.

### Предложение VII. Теорема VII

*Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них.*

Выше доказано, что все планеты тяготеют друг к другу, а также что тяготение к каждой из них в отдельности обратно пропорционально квадратам расстояний места до центра этой планеты. Отсюда следует (по предл. LXIX кн. I и его следствиям), что тяготение ко всем планетам пропорционально количеству материи в них.

Сверх того, так как все части какой-либо планеты $A$ тяготеют к какой-либо другой планете $B$ и тяготение каждой части относится к тяготению целого, как масса этой части к массе целого, всякому же действию (по закону III движения) есть равное противодействие, то и обратно, планета $B$ притягивается ко всем частям планеты $A$, и притяжение ее к какой-либо части относится к притяжению к целому, как масса этой части к массе целого.

*Следствие 1.* Следовательно, тяготение ко всей планете происходит и слагается из тяготений к отдельным частям ее. Подобного рода пример имеется в притяжениях магнитных и электрических, — притяжение целого происходит от притяжений к отдельным частям. Дело становится по отношению к тяготению понятнее, если вообразить, что несколько меньших планет соединяются в один шар и образуют одну большую планету, ибо сила целого должна образоваться из сил составляющих его частей. Если кто возразит, что все тела, находящиеся у нас, по этому закону должны бы тяготеть друг к другу, тогда как такого рода тяготение совершенно не ощущается, то я на это отвечу, что тяготение к этим телам, будучи во столько же раз меньше тяготения к Земле, во сколько раз масса тела меньше массы всей Земли, окажется гораздо меньше такого, которое могло бы быть ощущаемо.

*Следствие 2.* Тяготение к отдельным равным частицам тел обратно пропорционально квадратам расстояний мест до частиц (следует из след. 3 предложения LXXIV, кн. I).

### Предложение VIII. Теорема VII

*Если вещество двух шаров, тяготеющих друг к другу, в равных удалениях от их центров однородно, то притяжение каждого шара другим обратно пропорционально квадрату расстояния между центрами их.*

После того как я нашел, что тяготение ко всей планете происходит и слагается из тяготений к частицам ее и для каждой из них обратно пропорционально квадрату расстояния до этой частицы, у меня возникло сомнение, будет ли эта обратная пропорциональность квадратам расстояний для всей силы притяжения, слагающейся из частных, иметь место в точности, или лишь приближенно. Ибо могло бы быть, что пропорция, которая имеет место для больших расстояний, достаточно точна, близ же поверхности планеты, вследствие неравенства расстояний между частицами и различного их расположения, может оказаться заметно неверной. Однако, впоследствии, по предложениям LXXV и LXXI книги I, я убедился в справедливости высказанного здесь предложения.

*Следствие 1.* На основании этого могут быть найдены и сравниваемы между собою веса тел на различных планетах. Ибо веса тел равных масс, обращающихся вокруг планет по кругам (след. 2 предл. IV кн. I) прямо пропорциональны диаметрам кругов и обратно — квадратам времен обращений, веса же на поверхностях планет или в каких-либо иных от центра удалениях (по этому предложению) больше или меньше в обратном отношении квадратов расстояний.

Так, сопоставляя времена обращения Венеры около Солнца в 224 суток $16\frac{3}{4}$ часа, крайнего спутника вокруг Юпитера в 16 суток $16\frac{8}{15}$ часа, Гюйгенсова спутника вокруг Сатурна в 15 суток $22\frac{2}{3}$ часа и Луны вокруг

Земли в 27 суток 7 часов 43 минуты, среднее расстояние Венеры от Солнца и наибольшие гелиоцентрические элонгации: крайнего спутника Юпитера от центра его, равную 8′16″, Гюйгенсова спутника Сатурна до центра Сатурна в 3′4″, Луны до центра Земли в 10′33″, помощью расчета[184] я нашел, что веса равных тел, находящихся в равных удалениях от центра Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли, относятся между собою соответственно, как числа: 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ и $\frac{1}{169282}$. При увеличении или уменьшении расстояний, веса эти уменьшатся или увеличатся в отношении квадратов расстояний; так, веса равных масс на Солнце, Юпитере, Сатурне и Земле в расстояниях 10000, 997, 791 и 109 от центров этих тел, т. е. на поверхности их, будут относиться соответственно как 10000, 943, 529 и 435. Каков же вес на поверхности Луны, будет сказано в последующем.

---

[184] Расчет масс планет, имеющих спутников, произведен Ньютоном в предположении, что все орбиты круговые и все тела сферической формы.

Обозначив через: $M$ — массу Солнца, $m_1$ — массу планеты, $a_1$ — ее расстояние до Солнца, $T_1$ — время ее оборота, $r$ — радиус орбиты ее спутника, $\lambda_1$ — наибольшую его гелиоцентрическую элонгацию, $\tau$ — время его оборота, $a$ — радиус орбиты Венеры, $T$ — время ее оборота и через $k$ — коэффициент притяжения, будем иметь следующие соотношения:

Сила притяжения спутника планетою:

$$f = \frac{km}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{\tau^2}$$

Сила притяжения Венеры Солнцем:

$$F = \frac{kM}{a^2} = \frac{4\pi^2 \cdot a}{T^2}$$

причем обе силы относятся к единице массы этих тел.

Отсюда следует

$$\frac{m}{M} = \frac{T^2}{\tau^2} \cdot \frac{r^3}{a^3}$$

но

$$r = a_1 \sin \lambda_1$$

значит будет

$$\frac{m}{M} = \frac{T^2}{\tau^2} \cdot \frac{a_1^3}{a^3} \sin^3 \lambda_1$$

По закону Кеплера, $a_1^3 : a^3 = T_1^2 : T^2$, следовательно

$$\frac{m}{M} = \frac{T_1^2}{\tau^2} \sin^3 \lambda_1 \qquad (1)$$

для Юпитера: $T_1 = 4332.584$; $\tau = 16.689$; $\lambda_1 = 8'16''$

» Сатурна: $T_1 = 10759.2$; $\tau = 15.944$; $\lambda_1 = 3'4''$

» Земли: $T_1 = 365.2564$; $\tau = 27.322$; $\lambda_1 = 10'33''$

По этим данным по формуле (1) для Юпитера и Сатурна получаются числа Ньютона, для Земли же получается $\frac{1}{193600}$, а не $\frac{1}{169282}$, как показано у Ньютона. Причину этой разности уяснить не удается.

*Следствие* 2. Отсюда также определяется количество материи (масса) каждой отдельной планеты, ибо массы планеты пропорциональны силам их притяжений в равных растояниях от центра, т. е. составляют для Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли соотвественно: $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}, \frac{1}{169282}$. Если параллакс Солнца окажется меньше или больше, нежели $10''30'''$, то массу Земли надо соответственно увеличить или уменьшить в отношении кубов параллаксов.

*Следствие 3.* Определяются так же и плотности планет. Ибо веса равных и однородных тел на поверхностях однородных шаров пропорциональны диаметрам шаров по предложению LXXII книги I. Следовательно, неодинаковые плотности этих шаров относятся, как эти веса, разделенные на диаметры шаров. Диаметры же Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли относятся между собою, как 10000, 997, 791 и 109, веса же на них — как 10000. 943. 529 и 435. поэтому плотности относятся, как 100, $94\frac{1}{2}$, 67 и 400. Плотность Земли, получаемая по этому расчету, не зависит от параллакса Солнца, а определяется лишь по параллаксу Луны, и, значит, определяется правильно. Итак, Солнце немного плотнее Юпитера, Юпитер плотнее Сатурна, Земля же вчетверо плотнее Солнца, ибо вследствие огромного своего жара Солнце разрежено. Луна же плотнее Земли, как то явствует из последующего.[185]

*Следствие 4.* Следовательно, более плотны, при прочих одинаковых условиях, те планеты, которые меньше, и таким образом сила тяжести на поверхностях планет приближается к равенству. Плотнее также, при прочих одинаковых условиях, планеты, ближайшие к Солнцу: так, Юпитер плотнее Сатурна и Земля — Юпитера. Во всяком случае, планеты должны были быть размещены в различных от Солнца расстояниях, чтобы каждая из них пользовалась теплотою Солнца в большей или меньшей мере, сообразно своей плотности. Наша вода, если бы Землю расположить в области Сатурна, затвердела бы, если бы в области Меркурия — немедленно обратилась бы в пар. Ибо свет Солнца, которому его тепло пропорционально, в 6 раз плотнее в области Меркурия, нежели у нас, я же испытал при помощи

---

185 Это утверждение основано на расчете, приведенном в следствии 3 предложения XXXVII, из которого получается, что отношение массы Луны к массе Земли равно 1 : 39.788. По новейшим данным и способам получено, что это отношение составляет лишь 1 : 81.45; поэтому плотность Луны равна 0.604 плотности Земли, а не 1.22, как найдено Ньютоном на основавии имевшихся в его время данных.

термометра, что при теплоте, в 6 раз большей летней теплоты Солнца, вода закипает.[186] Нет сомнения, что вещество Меркурия приспособлено к теплоте и поэтому плотнее нашего, ибо всякое вещество более плотное требует большего тепла, для того чтобы над ним протекали физические процессы.

---

[186] В тексте сказано: «et thermometro expertus sum quod sextuplo solis aestivi calore aqua ebullit».

Во время Ньютона учение о теплоте далеко еще не было установлено, и самое слово «температура» у него не встречается и не делается различия между calor — теплота и gradus caloris — степень нагревания или теплоты. Смысл, который Ньютон придавал приведенным словам, становится ясным, если эти слова сопоставить с заметкою Ньютона, помещенной в Philosophical Transactions за 1701 г. под заглавием: «Scala graduum caloris et frigoris». Об этой «шкале степеней теплоты и холода», или по теперешней терминологии «шкале температур», можно судить по следующей выдержке, в которой сохранена ньютонова терминология.

| Равные степени теплоты | | Постоянные степени теплоты |
|---|---|---|
| 0 | 0 | Теплота воздуха зимою, при которой вода начинает замерзать. Эта степень теплоты определяется точно, поместив термометр в сжатый снег, когда он тает. |
| 0, 1, 2 | — | Теплоты воздуха зимою. |
| 2, 3, 4 | — | » » весною и осенью. |
| 4, 5, 6 | — | » » летом. |
| 6 | — | Полуденная теплота воздуха в июле. |
| 12 | 6 | Наибольшая теплота, которую принимает термометр при соприкосновении с телом человека. Такова же приблизительно и теплота птицы, высиживающей яйца. |
| 17 | $1^1/_2$ | Наибольшая теплота ванны, которую может долго переносить рука, оставаясь неподвижной. |
| 24 | 2 | Теплота ванны, в которой плавающий воск, нагреваясь, растопляется и остается жидким не закипая. |
| 34 | $2^1/_2$ | Теплота, при которой вода сильно кипит и при которой сплав из 2 частей свинца, 3 частей олова и 5 частей висмута, остывая, затвердевает. Вода начинает пузыриться при теплоте в 33 части, при теплоте свыше $34^1/_2$ едва вмещает в себе пузыри. Охлаждающееся железо при теплоте в 35 или 36 частей перестает вызывать вскипание теплой воды, падающей на него по каплям, и при 37 частях — когда вода холодная. |
| 48 | 3 | Наименьшая теплота, при которой сплав из одинакового числа частей олова и висмута плавится. Этот сплав при теплоте в 47 частей, охлаждаясь, сседается. |
| 68 | $3^1/_2$ | Наименьшая теплота, при которой плавится сплав из 1 части висмута и 8 частей олова. Олово само по себе плавится при теплоте в 72 и, остывая, затвердевает при 70. |

### Предложение IX. Теорема IX

*Тяготение, идя от поверхностей планет вниз, убывает приблизительно пропорционально расстояниям до центра.*

Если бы вещество планеты было однородным по плотности, эта пропорция имела бы место в точности по предложению LXXIII книги I. Следовательно, ошибка такова, поскольку она вызывается неравномерностью плотности.

---

| Равные степени теплоты | | Постоянные степени теплоты |
|---|---|---|
| 96 | 4 | Наименьшая теплота, при которой плавится свинец. При нагревании свинец плавится при теплоте в 96 или 97 частей, при остывании — затвердевает при теплоте в 95 частей. |
| 136 | $4^1/_2$ | Теплота, при которой накаленные тела светятся в ночной темноте, н сумерки же нет. При этой же теплоте сплав из 2 частей сурьмы и 1 части висмута, а также сплав из 5 частей сурьмы и 1 части олона, остывая, затнердевает. Сурьма сама по себе застывает при теплоте в 146 частей. |
| 195 | 5 | Теплота раскаленного каменного угля, горящего в малом кухонном очаге без раздувания мехами. Такова же теплота железа, накаливаемого насколько можно в таком очаге. Жар малого кухонного очага при дровах несколько больше и составляет 200 или 210. Жар же в большом очаге гораздо больше этого, в особенности если огонь раздувается мехами. |

В объяснении к таблице, из которой здесь приведены лишь главнейшие данные, Ньютон говорит: «В первом столбце показаны степени теплоты (нагревания), следующие в арифметической прогрессии, ведя счет от той теплоты, при которой вода начинает от мороза затвердевать, т. е. от низшей степени теплоты, иначе—от общей границы между теплом и холодом, и принимая, что теплота человеческого тела равна 12 частям. Во втором столбце показаны степени теплоты, следующие в геометрической прогрессии, так что вторая степень вдвое больше первой, третья — вдвое больше второй, четвертая — вдвое больше третьей и т. д., причем первая принимается равной теплоте человеческого тела».

Отсюда ясно, что под словом «calor» — теплота Ньютон разумел температуру, отсчитанную по термометру, коего нуль соответствовал таянию льда и 12 градусов — температуре человеческого тела.

Затем он продолжает: «Из этой таблицы видно, что теплота кипящей воды почти в 3 раза больше теплоты человеческого тела, теплота плавящегося олова в 6 раз больше, плавящегося свинца — в 8 раз, плавящейся сурьмы—в 12 раз, обыкновенный жар кухонного очага в 16 или 17 раз больше теплоты человеческого тела.

«Эта таблица была составлена при помощи термометра и раскаленного железа. Термометром я нашел все теплоты до теплоты плавящегося олова, раскаленным железом — меры всех остальных. Ибо теплота, которую нагретое железо сообщает в заданное время смежным с ним холодным телам, т. е. теплота, которую железо утрачивает в продолжение заданного времени, пропорциональна всей теплоте железа; поэтому, если времена охлаждения принимать равными, то теплоты будут в геометрической прогрессии и могут легко быть найдены по таблице логарифмов».

## Предложение X. Теорема X

*Движение планет может сохраняться в небесных пространствах весьма долгое время.*

В поучении к предложению XL книги II доказано, что шар замерзшей воды, свободно движущийся в нашем воздухе, при проходе пути, равного своему полудиаметру, утрачивает от сопротивления воздуха $\frac{1}{4586}$

---

Здесь, как видно, слово «теплота» употреблено в двух смыслах — как «количество тепла» и как «температура», и если бы пользоваться теперешней терминологией, то это место можно было бы выразить так: «ибо количество тепла, которое нагретое железо сообщает в заданное время смежным с ним холодным телам, т. е. которое железо утрачивает в продолжение заданного времени, пропорционально температуре железа, поэтому если времена охлаждения принимать равными, то температуры будут в геометрической прогрессии». Здесь надо еще заметить, что холодным телом Ньютон называет такое, температура которого около нуля.

Дальше в его заметке говорится: «Итак, сперва я нашел, что в термометре, сделанном из льняного масла, когда он был погружен в тающий снег, масло занимало объем, равный 10 000 частей; то же количество масла при первой степени тепла, т. е. теплоте человеческого тела, будучи разрежено, занимало объем в 10 256 частей; при теплоте воды, едва-едва начинающей кипеть объем — в 10 705; при теплоте воды сильно кипящей объем — в 10 725; при теплоте остывающего расплавленного олова, когда оно начинало затвердевать и приняло строение амальгамы, объем масла был в 11 516, когда же олово совсем затвердело — 11 496. Итак, при теплоте человеческого тела масло расширено в отношении 40 к 39, при теплоте кипящей воды — в отношении 15 к 14, при теплоте охлаждающегося олова, когда оно начинает сседаться и затвердевать, — в отношении 15 к 13, и в отношении 23 к 20, когда оно совсем затвердеет. Расширение воздуха при одинаковой степени теплоты было в 10 раз больше, нежели масла; расширение же масла, в свою очередь, приблизительно в 15 раз больше расширения винного спирта. После того как это было найдено, оказалось, что если положить, что теплоты самого масла пропорциональны его расширению и принять теплоту человеческого тела за 12 частей, то теплота воды, когда она начинает кипеть, составляет 33 части, когда она сильно кипит — 34, для олова, когда оно или плавится или же при остывании начинает застывать и принимать вид амальгамы, теплота составляет 72 части, а когда оно при охлаждении совсем становится твердым — 70. После того как это было установлено, чтобы определить все остальное, я раскалил до-красна достаточно толстый чугун и, вынув его клещами еще раскаленным из огня, поместил его тотчас же в холодное место, где постоянно продувал ветер. В этот чугун я клал кусочки различных металлов и других плавящихся тел и замечал времена, пока при охлаждении чугуна эти кусочки, утратив совершенно жидкий вид, отвердевали, а также время, по истечении которого теплота чугуна становилась одинаковой с теплотой человеческого тела.

«Положив затем, что избытки теплоты (температуры при теперешней терминологии) чугуна и затвердевающих кусочков над теплотою (температурой) воздуха, даваемой термометром, составляют геометрическую прогрессию, когда времена составляют прогрессию арифметическую, я определил все теплоты (температуры).

«Чугун же я поместил не в спокойном воздухе, а на равномерно дующем ветре, чтобы воздух, нагреваемый чугуном, постоянно уносился ветром и равномерно заменялся бы холодным воздухом.

«Таким образом в равные времена нагреваются равные количества воздуха и вбирают в себя тепло (количество тепла), пропорциональное теплоте (температуре) железа. Теплоты (температуры), найденные таким образом, оказались между собою в том же отношении, как и найденные термометром, поэтому допущение, что расширение масла пропорционально его теплоте (температуре) правильно.

своего количества движения. Эта пропорция имеет место приблизительно для сколь угодно больших шаров, движущихся сколь угодно быстро. Что наш земной шар плотнее того, как если бы он весь состоял из воды, я заключаю из следующего. Если бы весь этот шар был водяной, то все, что менее плотно, нежели вода, вследствие меньшего удельного веса, поднялось бы и плавало бы на поверхности.

По этой причине, когда земляной шар повсюду покрыт водою, если бы его плотность была меньше плотности воды, он где-нибудь выплыл бы из воды и вся вода, с него стекшая, сосредоточилась бы в противоположной стороне. В таких условиях находится наша Земля, окруженная по большей части морями. Поэтому, если бы она не была плотнее воды, то она выплыла бы из воды и, соответственно степени своей легкости, возвышалась бы над водою, все же моря стекли бы в противоположную сторону. На основании этого рассуждения солнечные пятна легче, нежели светящееся вещество Солнца, на котором они плавают. Каково бы ни было образование планет, все вещество более тяжелое, нежели вода, пока масса была еще жидкою, стремилось к центру.

Так как обыкновенные верхние части Земли, примерно, вдвое плотнее воды, немного же ниже, в рудниках, оказываются, примерно, втрое, вчетверо и даже в 5 раз более тяжелыми, правдоподобно, что все количество вещества Земли приблизительно в 5 или в 6 раз[187] больше того, как если бы оно все состояло из воды, в особенности обратив внимание, что Земля, примерно, в 4 раза плотнее Юпитера, как показано выше. Вследствие этого, если Юпитер немного плотнее воды, то в продолжение 30 суток, в которые он проходит путь, равный 459 своим полудиаметрам, он утратил бы $\frac{1}{10}$ своего количества движения в среде, плотность которой равнялась бы плотности нашего воздуха. Но в действительности сопротивление среды уменьшается пропорционально ее весу или плотности; так, вода, которая в $13\frac{2}{3}$ раза легче ртути, оказывает и во столько же раз меньшее сопротивление, воздух, который в 860 раз легче воды, сопротивляется во столько же раз менее. Если же подняться в небесные пространства, где вес среды, в которой движутся планеты, уменьшен в огромное число раз, сопротивление почти не существует. В поучении к предложению

[187] Сводка результатов определения средней плотности Земли разными способами привела Пойнтинга (Poynting. Mean Density of the Earth, London, 1894) к заключению, что средняя плотность Земли равна 5.52 относительно воды. Таким образом догадка Ньютона оправдалась вполне и считается одним из наиболее поразительных проявлений его гениальной проницательности.

XXII книги II показано, что при поднятии на 200 миль над Землею воздух реже, нежели у поверхности Земли, в отношении 30 к 0.000 000 000 000 399 8, иначе, кругло, в отношени 75 000 000 000 000 к 1; поэтому Юпитер, при обращении в среде такой плотности, как этот разреженный воздух, в продолжение 1 000 000 лет не утратил бы одной миллионной доли своего количества движения. Во всяком случае, в пространствах, близких к Земле, ничего не находится, что могло бы оказывать сопротивление, кроме воздуха, выделений и паров. Если их тщательно выкачать из цилиндрического полого стекла, то тяжелые тела падают внутри его совершенно свободно, не испытывая чувствительного сопротивления; даже золото и тончайшее перышко, пущенные совместно, падают с одинаковою скоростью и, описав при своем падении высоту в 4, 6 и 8 футов, совместно ударяются в дно, как показывает опыт. Поэтому, если подняться в небесные пространства, свободные от воздуха и испарений, то планеты и кометы, не испытывая чувствительного сопротивления, будут двигаться в этих пространствах весьма продолжительное время.

### Предположение 1

*Центр системы мира находится в покое.*

Это признается всеми, ибо одни принимают находящимися в этом центре и покоящимися Землю, другие — Солнце. Посмотрим же, что из этого следует.

### Предложение XI. Теорема XI

*Общий центр тяжести Земли, Солнца и всех планет находится в покое.*

Ибо этот центр (по след. IV законов движения) или находится в покое, или же движется равномерно и прямолинейно. Но при движении этого центра двигался бы и центр мира, что противно предположению.

### Предложение XII. Теорема XII

*Солнце находится в постоянном движении, но никогда не удаляется значительно от общего с планетами центра тяжести.*

Так как, по следствию 2 предложения VIII, масса Солнца относится к массе Юпитера, как 1067 к 1, расстояние же Юпитера до Солнца находится в немного большем отношении к полудиаметру Солнца, то общий центр тяжести Солнца и Юпитера лежит в точке, находящейся немного вне поверхности Солнца. На основании такого же рассуждения, так как масса Солнца относится к массе Сатурна, как 3021 к 1, расстояние же Сатурна до Солнца находится в несколько меньшем отношении к его полудиаметру, то общий центр тяжести Сатурна и Солнца приходится в точке, лежащей немного внутри поверхности Солнца. Продолжая производить расчет на таких же основаниях, увидим, что если Земля и все планеты находились бы по одну сторону от Солнца, то общий центр тяжести удалился бы от центра Солнца не более, как на величину диаметра Солнца. Во всех же прочих случаях расстояние этих центров меньше; поэтому, так как сказанный центр тяжести постоянно находится в покое, то Солнце, в зависимости от положения планет, движется по всем направлениям, но никогда не удаляется значительно от этого центра.

*Следствие.* Таки образом общий центр тяжести Земли, Солнца и планет должен быть принят за центр мира. Так как Земля, Солнце и планеты тяготеют друг к другу и вследствие этого, соответственно силе тяготения, постоянно находятся в движении, очевидно, что их подвижные центры не могут быть приняты за находящийся в покое центр мира. Если бы в этом центре помещалось то тело, к которому все тела наиболее тяготеют (согласно обыкновенному о том мнению), то такое преимущество должно бы предоставить Солнцу. Но так как Солнце само движется, то надо бы избрать такую покоящуюся точку, от которой центр Солнца менее всего отходит и от которой он еще менее отходил бы, если бы Солнце было еще плотнее и еще больше, так что оно и двигалось бы еще менее.

### Предложение XIII. Теорема XIII

*Планеты движутся по эллипсам, имеющим свой фокус в центре Солнца, и радиусами, проводимыми к этому центру, описывают площади, пропорциональные временам.*

Об этих движениях сказано выше при рассмотрении явлений. Но после того как начальные причины движений известны, мы можем вывести движения небесных тел непосредственно.

Так как притяжения планет к Солнцу обратно пропорциональны квадратам расстояний до центра Солнца, то если бы Солнце находилось в покое и планеты друг на друга не действовали бы, то их орбиты были бы эллипсами, имеющими свой общий фокус в центре Солнца, и описывали бы площади, пропорциональные временам (по предл. I и XI и след. 1 предл. XIII, кн. I). Действия планет друг на друга весьма малы (так что ими можно пренебречь), и по предложению LXVI книги I эти взаимодействия менее возмущают эллиптические движения планет вокруг подвижного Солнца, нежели когда эти движения совершались бы около Солнца неподвижного.

Однако действие Юпитера на Сатурн не должно быть пренебрегаемо, ибо тяготение к Юпитеру относится (при равных расстояниях) к тяготению к Солнцу, как 1 к 1067, следовательно при соединениях Юпитера и Сатурна, когда расстояние его до Юпитера относится к расстоянию до Солнца, как 4 к 9, притяжение Сатурна к Юпитеру будет относиться к притяжению его к Солнцу, как $81 : 1067 \cdot 16$, или, кругло, как 1 к 211. От этого происходит возмущение орбиты Сатурна при каждом его соединении с Юпитером, настолько значительное, что оно приводит в недоумение астрономов. Смотря по положению планеты при этих соединениях, ее эксцентриситет то увеличивается, то уменьшается, афелий то перемещается вперед, то сильно отступает назад, среднее движение поочередно то ускоряется, то замедляется. Однако погрешность в движении этой планеты вокруг Солнца, происходящая от такой силы (кроме погрешности среднего движения), может быть почти целиком избегнута, поместив нижний фокус орбиты в центре тяжести Юпитера и Солнца (по предл. LXVII кн. I), и тогда наибольшая ее величина немногим превосходит 2 минуты. Погрешность среднего движения будет также немногим превосходить 2 минуты в год. В соединениях Юпитера и Сатурна ускорительные силы тяготения Солнца к Сатурну, Юпитера к Сатурну и Юпитера к Солнцу относятся почти, как 16, 81 и $\frac{16 \cdot 81 \cdot 3021}{25}$, т. е. 156 609; поэтому разность притяжений Солнца к Сатурну и Юпитера к Сатурну относится к тяготению Юпитера к Солнцу, как 65 к 156 609, т. е. как 1 к 2409. Этой разности пропорционально наибольшее возмущающее влияние Сатурна на движение Юпитера, поэтому и возмущения орбиты Юпитера гораздо меньше, нежели орбиты Сатурна.[188] Возмущения орбит прочих планет еще гораздо меньше этого, кроме орбиты Земли, чувствительно возмущаемой Луною. Общий центр тяжести Земли и Луны движется по эллипсу вокруг Солнца, находящегося в фокусе его, и описывает проводимым к нему радиусом площади, пропорциональные времени, Земля же обращается вокруг этого центра тяжести месячным движением.

---

[188] По этому поводу Лаплас (Laplace. Mécanique Céleste, t. V, livre XV, ch. I) говорит: «аналитическая теория движения обеих планет, в точности представляющая все наблюдения, показывает, что возмущение Сатурна при его соединениях с Юпитером почти нечувствительно. Соответствующее возмущение Юпитера почти в 6 раз больше, хотя на Юпитер действие Сатурна относится к действию Солнца, как 1 к 500. Это замечание, сделанное еще Эйлером, показывает, что надо принимать с большою осторожностью кажущиеся наиболее правдоподобными общие соображения, пока они не подтверждены самыми решительными доказательствами».

### Предложение XIV. Теорема XIV

*Афелии и узлы орбит неподвижны.*

Афелии неподвижны по предложению XI книги I, плоскости же орбит — по предложению I, вследствие же неподвижности плоскостей неподвижны и узлы. Однако от взаимодействия обращающихся планет и комет происходят некоторые неравенства, но по их малости ими можно здесь пренебречь.

*Следствие 1.* Неподвижные звезды также находятся в покое, ибо они сохраняют постоянные положения относительно афелиев и узлов.

*Следствие 2.* Так как для этих звезд нет чувствительного параллакса, происходящего от годового движения Земли, то вследствие громадности расстояния этих тел силы их не оказывают никаких чувствительных проявлений в области нашей системы, не говоря уже о том, что неподвижные звезды, рассеянные одинаково во всех частях неба, вследствие противоположности их действий уничтожают взаимно свои силы по предложению LXX книги I.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Так как планеты, ближайшие к Солнцу (именно Меркурий, Венера, Земля и Марс) по малости их масс оказывают лишь малое взаимодействие друг на друга, то их афелии и узлы находятся в покое, за исключением лишь того, насколько они возмущаются Юпитером, Сатурном и высшими телами. Отсюда, на основании теории тяготения, можно заключить, что их афелии должны немного продвигаться в попятном направлении по отношению к неподвижным звездам и притом в полукубическом отношении расстояний этих планет до Солнца. Так, если афелий Марса продвигается относительно звезд попятно на $33'20''$ в столетие, то афелии Земли, Венеры, Меркурия должны продвигаться попятно же на $17'40''$, $10'53''$ и $4'16''$. Этими движениями по их малости в этом предложении пренебрегается.

### Предложение XV. Задача I

*Найти большие оси орбит.*

Их надо брать так, чтобы кубы их были пропорциональны квадратам времен обращений (по предл. XV кн. I), затем соответственно увеличить в отношении суммы масс Солнца и каждой из планет к первому из двух средних пропорциональных между этою суммою и массою Солнца по предложению LX книги I.

### Предложение XVI. Задача II

*Найти эксцентриситеты и афелии орбит.*

Задача решается по предложению XVIII книги I.

### Предложение XVII. Теорема XV

*Суточные движения планет равномерны. Либрация Луны происходит от суточного ее движения.*

Следует из первого закона движения и следствия 22 предложения LXVI книги I. Юпитер обращается по отношению к неподвижным звездам в $9^ч\ 56^м$, Марс — в $24^ч\ 39^м$, Венера — около $23^ч$, Земля — в $23^ч\ 56^м$, Солнце — в $25\frac{1}{2}$ суток и Луна — в 27 суток $7^ч\ 43^м$. Что все это происходит так, показывают явления. Пятна на Солнце возвращаются к тому же положению на его диске относительно Земли приблизительно через $27\frac{1}{2}$ суток, следовательно по отношению к неподвижным звездам Солнце обращается в $25\frac{1}{2}$ суток. Так как для Луны, при равномерном ее обращении около оси ее, сутки равны нашему месяцу, то к нижнему фокусу ее орбиты будет всегда обращена почти постоянно одна и та же ее сторона, и поэтому, сообразно положению этого фокуса, будет несколько уклоняться в ту или другую сторону по отношению к Земле — это и есть либрация по долготе. Либрация же по широте происходит от широты Луны и наклонности ее оси к плоскости эклиптики. Такую теорую либрации Луны изложил подробнее в своей астрономии *Н. Меркатор* в начале 1676 г. на основании моих писем. Подобным образом, как кажется, вращается вокруг своей оси и крайний спутник Сатурна, всегда будучи обращен тою же своею стороною к Сатурну, ибо всякий раз как при своем обращении вокруг Сатурна он приходит в восточную часть своей орбиты, он становится едва видимым, обыкновенно же совершенно пропадает, что может происходить от пятен на той его поверхности, которая тогда обращена к Земле, как это заметил *Кассини*. Подобным же движением обладает, как кажется, и крайний спутник Юпитера, ибо на той части его поверхности, которая противоположна Юпитеру, у него есть пятно, которое и появляется всегда на поверхности Юпитера всякий раз, когда этот спутник проходит между нашим глазом и Юпитером.

### Предложение XVIII. Теорема XVI

*Оси планет меньше диаметров, проведенных нормально к этим осям.*

Если бы у планеты было устранено суточное вращение, то вследствие одинакового отовсюду тяготения частей ее она должна бы принять форму шара. Вследствие же вращения, части близ экватора стремятся удалиться от оси; следонательно, если бы вещество было жидким, то оно своим подъемом увеличило бы диаметр по экватору и своим опусканием уменьшило бы ось у поясов. Так, диаметр Юпитера (согласно наблюдениям астрономов) оказывается меньшим между полюсами, нежели между востоком и западом. На основании этого рассуждения, если бы наша Земля близ экватора не была бы немного выше, нежели у полюсов, то моря, понижаясь у полюсов и поднимаясь у экватора, все бы затопили.

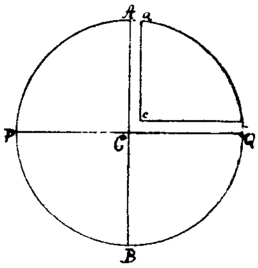
### Предложение XIX. Задача III

*Определить отношение длины оси планеты к длине диаметров, этой оси перпендикулярных.*

Наш соотечественник *Нордвуд,* измерив расстояние 905 751 англ. футов между *Лондоном* и *Иорком* и определив разность широт в $2°28'$, вывел, что длина одного градуса равна 367 196 англ. футам, т. е. 57 300 парижским шестифутовым туазам.

*Пикар*, измерив дугу меридиана в $1°22'55''$ между *Амиеном* и *Мальгаузеном*, нашел, что длина одного градуса составляет 57 060 туазов. *Кассини* старший измерил расстояние от г. *Коллиур* в Руссильоне до Парижской обсерватории, сын же его присоединил еще дугу от обсерватории до башни города *Дюнкирка.* Полное расстояние равнялось $486\,156\frac{1}{2}$ туазов, разность же широт *Коллиура* и *Дюнкирка* составляла $8°31'11\frac{5''}{6}$, отсюда длина одного градуса 57 061 туазов. Из этих измерений следует, что окружность Земли равна 123 249 600 и ее полудиаметр 19 615 800 парижским футам, если принять Землю за шар. В широте *Парижа* тяжелое тело описывает при своем падении в первую секунду 15 парижских футов 1 дюйм $1\frac{7}{9}$ линии, т. е. $2173\frac{7}{9}$ линии, как сказано выше. Вес тела уменьшен на вес вытесненного воздуха. Примем, что потеря в весе составляет $\frac{1}{11000}$ полного веса, тогда падающее тело в пустоте проходит путь в 2174 линии в первую секунду.

Тело, обращающееся равномерно по кругу в расстоянии 19 615 800 футов от центра и делая в звездные сутки, т. е. в $23^{ч}\,56^{м}\,4^{с}$, один оборот, проходит в 1 секунду дугу, длиною 1433.46 фута, синус верзус которой равен 0.0523656 фута, т. е. 7.54064 линий; поэтому отношение силы, под действием которой тяжелые тела падают в Париже, к центробежной силе тел на экваторе, происходящей от суточного вращения Земли, равно 2174 к 7.54064. Центробежная сила тел на экваторе относится к центробежной силе, с которою тела стремятся удалиться прямо вверх от Земли для широты Парижа $48°50'10''$, как квадрат радиуса к квадрату синуса дополнения этой широты, т. е. как 7.54064 к 3.267. Придав эту силу к той силе, под действием которой тела падают в указанной широте Парижа, получим, что тело, падая там под действием полной силы тяготения, прошло бы в первую секунду 2177.267 линий, т. е. 15 футов 1 дюйм 5.267 линий парижских. Эта полная сила тяготения под этой широтой относится к центробежной силе на экваторе, как 2177.267 к 7.54064, т. е. как 289 к 1.




Фиг. 184.

Пусть $APBQ$ (фиг. 184) представляет сечение фигуры Земли не вполне сферической, а образуемой вращением эллипса около его малой оси $PQ$, и пусть $ACQqca$ — заполненный водою канал, простирающийся от полюса $Qq$ до центра $Cc$ и затем до экватора $Aa$; тогда необходимо, чтобы вес воды в колене $ACca$ канала относился к весу воды в другом колене $QCcq$, как 289 к 288, ибо центробежная сила, происходящая от вращения Земли, поддерживает и уничтожает одну часть из 289, составляющих полный вес, 288 остальных частей поддерживаются весом воды в другом колене. Далее, выполнив расчет [189] (по след. 2 предл. XCI кн. I), я нашел, что если бы

---

[189] В примечании 125 приведена общая формула

$$F = 2k\pi \int_{l-a}^{l+a} \left(1 - \frac{x}{X}\right) dx$$

для вычисления притяжения эллипсоидом вращения точки, лежащей на оси вращения в расстоянии $l$ от центра. В этой формуле $k$ есть постоянная притяжения, $x$ — расстояние какой-либо параллели до притягиваемой точки, $a$—длина той полуоси, вращением около которой произведен эллипсоид, $b$ — длина другой полуоси и

$$X^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2\frac{b^2 l}{a^2} x - \frac{b^2}{a^2}(l^2 - a^2) = Ax^2 + 2Bx + C.$$

Земля состояла из однородного вещества, не обладала бы никаким движением и отношение ее оси $PQ$ к диаметру $AB$ было бы равно 100 к 101, то сила тяготения к Земле в точке $Q$ относилась бы к силе тяготения в той же точке к шару, описанному радиусом $CQ$ или $CP$, как 126 к 125. На том же основании тяготение в точке $A$ к сфероиду, описанному обращением эллипса

---

В рассматриваемом случае $l = a$ и $C = 0$, и следовательно, все привелось к вычислению интеграла

$$\int_0^{2a} \frac{x\,dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx}}.$$

Хотя этот интеграл выражается в конечном виде, но, в виду того, что разность $a - b$ весьма мала по сравнению с величиною этих длин, для численных расчетов проще разложить этот интеграл в ряд, к каковым разложениям постоянно прибегал Ньютон.

Итак пусть будет

$$\frac{A}{2B} = \frac{a^2 - b^2}{2ab^2} = \varepsilon \quad \text{и} \quad 2\varepsilon \cdot a = \eta = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

тогда

$$\int_0^{2a} \frac{x\,dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx}} = \frac{1}{\sqrt{2B}} \int_0^{2a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \varepsilon x}} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2B}} \cdot \int_0^{2a} \sqrt{x} \left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varepsilon^2 x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\varepsilon^3 x^3 + \ldots\right] dx =$$

$$= 2a \cdot \frac{a}{b}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\eta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \eta^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2}{9}\eta^3 + \ldots\right] = \frac{2a^2}{b} \cdot H \qquad (1)$$

Таким образом притяжение эллипсоида на конец оси вращения будет

$$F = 4k\pi a\left[1 - \frac{a}{b}H\right].$$

Чтобы получить притяжение шара, стоит только положить $b = a$, тогда $\eta = 0$, $H = \frac{2}{3}$ и будет

$$F_0 = \frac{4}{3}k\pi a.$$

Таким образом отношение

$$\frac{F}{F_0} = 3\left(1 - \frac{a}{b}H\right). \qquad (2)$$

Для первого случая:

$$a = 100; \quad b = 101; \quad \eta = -\frac{201}{10201} = -0.0197$$

$$H = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot 0.0197 + \frac{3}{28} \cdot (0.0197)^2 = \frac{2}{3} + 0.00394 + 0.00004 = \frac{2}{3} + 0.00398$$

$$\frac{F}{F_0} = 3\left[1 - \frac{100}{101} \cdot \left(\frac{2}{3} + 0.00398\right)\right] = \frac{303 - 201.194}{101} = \frac{101.806}{101} = 1.008 = \frac{126}{125}.$$

Во втором случае:

$$a = 101; \quad b = 100; \quad \eta = \frac{201}{10000} = 0.0201$$

$$H = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \cdot 0.0201 + \frac{3}{28} \cdot (0.0201)^2 = \frac{2}{3} - 0.0402 + 0.00004 = \frac{2}{3} - 0.00398$$

$$\frac{F}{F_0} = 3\left[1 - \frac{101}{100}\left(\frac{2}{3} - 0.00398\right)\right] = \frac{300 - 200.794}{100} = 1 - 0.00794 = \frac{125}{126},$$

как и показано в тексте.

около оси $AB$, относится к силе тяготения в той же точке к шару, описанному из центра $C$ радиусом $AC$, как 125 к 126. Но тяготение в точке $A$ к Земле есть среднее пропорциональное между тяготением к сказанному сфероиду и тяготением к шару, потому что шар при уменьшении диаметра $PQ$ в отношении 101 к 100 обращается в фигуру Земли, эта же фигура обратится в сказанный сфероид, если уменьшить в указанном выше отношении третий диаметр, перпендикулярный к диаметрам $AB$ и $PQ$. Сила же тяготения в точке $A$ в обоих случаях уменьшается приблизительно в одинаковом отношении.[190] Следовательно, тяготение в точке $A$ к шару, описан-

---

[190] Это место, высказанное весьма кратко, может быть пояснено так: Ньютон имел выражения притяжения на любую точку поверхности шара и на точку, лежащую на конце оси для эллипсоида вращения около этой оси, ему же нужно было получить притяжение на точку экватора. Для своего расчета он воспользовался тем обстоятельством, что его эллипсоид имеет весьма малое сжатие и ограничился первым приближением.

Условимся обозначать вообще длину оси $AB$ через $\alpha$, оси $PQ$ — через $\beta$ и оси, им перпендикулярной, — через $\gamma$; притяжение точки $A$ эллипсоидом, описанным на этих осях, будет некоторой функцией от $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, которую обозначим через $F(\alpha, \beta, \gamma)$.

Когда эллипсоид есть эллипсоид вращения, например около оси $AB$, то $\beta = \gamma$, и очевидно, что функция $F$ при этом такова, что и значения ее частных производных по $\beta$ и по $\gamma$ одинаковы, т. е.

$$F_\beta'(\alpha, \beta, \gamma) = F_\gamma'(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{при} \quad \beta = \gamma;$$

будем обозначать это значение через $B$; значение $F_\alpha'(\alpha, \beta, \gamma)$ будет иное, его обозначим через $A$.

Положим теперь, что эллипсоид весьма близок к шару и заключается между двумя шарами, описанными как указано; радиус одного из них обозначим через $a_0$, другого — через $a_1 = a_0 + \delta$, причем $\delta$ — весьма малая величина, квадратами и высшими степенями которой пренебрегаем.

Требуется найти значение $F(a_1, a_0, a_1)$, т. е. притяжение точки $A$ конца экваториальной оси эллипсоида вращения около оси $PQ$, у которого длина оси

$$PQ = a_0 = 1.00 \quad \text{и} \quad AB = a_1 = 1.01.$$

При сделанных обозначениях, притяжение точки поверхности шаров радиуса $a_0$ будет $F(a_0, a_0, a_0)$, эту величину примем равной 1.00; притяжеиие точки поверхости шаром радиуса $a_1$ будет $F(a_1, a_1, a_1) = 1.01$; притяжение точки $A$ эллипсоидом вращения около оси $AB$ будет $F(a_1, a_0, a_0)$, величина же этого притяжения равна $\frac{125}{126} \cdot 1.01$.

Таким образом имеем равенства:

$$\begin{aligned} F(a_1, a_0, a_0) &= F(a_0, a_0, a_0) + A \cdot \delta = \frac{125}{126} \cdot 1.01 \\ F(a_1, a_0, a_1) &= F(a_0, a_0, a_0) + A\delta + B\delta \\ F(a_1, a_1, a_1) &= F(a_0, a_0, a_0) + A\delta + 2B\delta = 1.01. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$F(a_1, a_0, a_1) = \frac{125.5}{126} \cdot 1.01,$$

а так как притяжение того же эллипсоида на точку $Q$ равно $\frac{125}{126}$, то отношение этой силы к предыдущей силе равно

$$\frac{126 \cdot 126 \cdot 100}{125 \cdot 125.5 \cdot 101} = \frac{501}{500}$$

как указано в тексте.

ному из центра $C$ радиусом $AC$, относится к тяготению в точке $A$ к Земле, как 126 к $125\frac{1}{2}$, и тяготение в точке $Q$ к шару, описанному из центра $C$ радиусом $CQ$, относится к тяготению в точке $A$ к шару, описанному центром $C$ и радиусом $AC$, как диаметры шаров (по предл. LXXII кн. I), т. е. как 100 к 101.

Перемножив эти три отношения, т. е. $126:125$; $126:125\frac{1}{2}$ и $100:101$, получим, что сила тяготения к Земле в точке $Q$ относится к силе тяготения к Земле в точке $A$, как $126 \cdot 126 \cdot 100$ к $125 \cdot 125\frac{1}{2} \cdot 101$, т. е. как 501 к 500.

Так как (по след. 3 предл. XCI кн. I) тяготение в обоих коленах $ACca$ и $QCcq$ пропорционально расстояниям мест до центра, то, если оба колена подразделить поперечными равноотстоящими поверхностями на одинаковое число пропорциональных частей, вес частей колена $ACca$ будет находиться к весу такого же числа частей другого колена в отношении их величин и сил тяготения, т. е. в отношении $\frac{101}{100} \cdot \frac{500}{501}$, иначе 505 к 501. Поэтому, если центробежная сила всякой части в колене $ACca$, происходящая от суточного вращения, будет относиться к весу этой части, как 4 к 505, так что от веса, равного 505, отнимается 4, то веса в обоих коленах станут равными, и жидкость будет в равновесии. В действительности центробежная сила каждой части относится к ее весу, как 1 к 289, так что центробежная сила, которая должна бы составлять $\frac{4}{505}$ веса, составляет всего $\frac{1}{289}$; поэтому, следуя «золотому правилу», говорю: если при действии центробежной силы в $\frac{4}{505}$ веса высота воды в колене $ACca$ превосходила высоту воды в колене $QCcq$ на одну сотую всей высоты, то под действием центростремительной силы в $\frac{1}{289}$ веса избыток высоты воды в колене $ACca$ составит $\frac{1}{229}$ от высоты воды в колене $QCcq$. Следовательно, диаметр Земли по экватору относится к ее диаметру, проходящему через полюсы, как 230 к 229, а так как на основании измерений *Пикара* средний диаметр Земли равен 19 615 800 парижским футам, т. е. 3923.16 мили (принимая милю в 5000 футов), то Земля по экватору выше, нежели по полюсам на 85 472 фута, т. е. 17.1 миль, и ее высота на экваторе составляет кругло 19 958 600 футов и на полюсах 19 573 000.

Если планета будет, при одинаковой плотности и времени оборота, больше или меньше Земли, то отношение центростремительной силы к силе тяготения сохранится, а значит, сохранится и отношение полярного и экваториального диаметров. Если же суточное вращение будет в каком-либо отношении ускорено или замедлено, то центробежная сила увеличится или уменьшится в отношении, равном квадрату предыдущего, вследствие чего и разность диаметров увеличится или уменьшится приблизительно в таком же отношении, как центробежная сила. Если плотность планеты увеличится или уменьшится в каком-либо отношении, то и тяготение к ней увеличится или уменьшится в таком же отношении, и разность диаметров соответственно этому уменьшится в том отношении, в каком плотность увеличивается, и увеличится, в каком плотность уменьшается. Так, Земля делает свой оборот относительно неподвижных звезд в $23^ч\ 56^м$, Юпитер же в $9^ч\ 56^м$, отношение квадратов этих времен равно 29 к 5, отношение же плотностей этих тел равно 400 к $94\frac{1}{2}$, следовательно разность диаметров Юпитера должна приблизительно составлять от меньшего его диаметра $\frac{29}{5}\cdot\frac{400}{94\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{229}$, т. е. $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$, так что диаметр Юпитера, проходящий через полюсы, должен относиться к диаметру по экватору, как $9\frac{1}{3}$ к $10\frac{1}{3}$; больший его диаметр равен $37''$, поэтому полярный его диаметр должен составлять $33''25'''$; придавая кругло $3''$ на световую погрешность, получим видимые диаметры планеты: $40''$ и $36''25'''$, отношение которых составляет приблизительно $11\frac{1}{6}$ к $10\frac{1}{6}$. Так это бы было при предположении, что плотность Юпитера равномерная, но если бы плотность по плоскости экватора была больше, нежели по полярной оси, то отношение диаметров могло бы составить и 12 к 11 или 13 к 12 или даже 14 к 13.

*Кассини* уже в 1691 г. наблюдал, что экваториальный диаметр Юпитера превосходит другой диаметр приблизительно на $\frac{1}{15}$ часть своей величины. *Поунд*, пользуясь телескопом 123-футовой длины и превосходным микрометром, произвел в 1719 г. следующие измерения диаметров Юпитера:

| Время наблюд. | | | Наибольший диаметр | Наименьший диаметр | Отношение диаметров |
|---|---|---|---|---|---|
| Январь . . | 28 | 6 час. | 13.40 частей | 12.28 частей | 12 : 11 |
| Март . . . | 6 | 7 » | 13.12 » | 12.20 » | $13^3/_4 : 12^8/_4$ |
| Март . . . | 9 | 7 » | 13.12 » | 12.08 » | $12^2/_3 : 11^2/_8$ |
| Апрель . . | 9 | 9 » | 12.32 » | 11.48 » | $14^1/_2 : 13^1/_2$ |

Следовательно, теория согласуется с явлениями; к тому же планеты более нагреваются светом Солнца у своих экваторов, и поэтому там несколько более пропекаются, нежели у полюсов.

Что сила тяжести, вследствие суточного вращения Земли, у экватора меньше и, значит, Земля там более возвышается, нежели у полюсов, следует также из наблюдений над маятниками, обозрение которых дается в следующем предложении.

### Предложение XX. Задача IV

*Найти и сравнить между собою веса тел в разных областях Земли.*

Так как веса воды неравных колен канала *ACQqca* между собою равны и веса частей, пропорциональных всей длине колен и сходственно в них расположенных, относятся между собою, как веса самих колен, т. е. также между собою равны, то веса равных частей, сходственно расположенных в этих коленах, будут относиться, как 230 к 229. Это относится и до всяких однородных, равных и сходственно в этих каналах расположенных масс, — веса их обратно пропорциональны длине колен, т. е. обратно пропорциональны расстояниям до центра Земли. Следовательно, если массы находятся в верхних частях канала, т. е. на поверхности Земли, то этих масс веса будут обратно пропорциональны расстояниям их до центра.

На основании такого же рассуждения, веса в каких угодно иных областях Земли обратно пропорциональны расстояниям этих мест до центра, поэтому, если предположить, что Земля есть сфероид, отношение весов находится.

Отсюда следует теорема, что приращение веса при переходе от экватора к полюсам приблизительно пропорционально синусу верзусу удвоенной широты, или, что то же самое, квадрату синуса широты.[191] Приблизительно в том же отношении будут возрастать и длины одного градуса меридиана с широтою. Так как широта *Парижа* 48°50′, широта мест под экватором 0°0′, широта полюсов 90°; синусы верзусы двойной широты суть: 11 334, 00 000 и 20 000, принимая радиус за 10 000; отношение силы тяжести при полюсе к силе тяжести у экватора 230 к 229, избыток тяжести при полюсе

[191] Обозначая геоцентрическую широту места через $\varphi$, радиус экватора через $a$, полярную полуось через $b$ и через $r$ — расстояние места до центра, имеем

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a\,(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sin^2 \varphi\right)$$

если положить $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ и пренебрегать всеми высшими степенями этой малой величины.

к тяжести под экватором 1 к 229, — то избыток силы тяжести под широтою *Парижа* будет относиться к силе тяжести под экватором, как $1 \cdot \frac{11334}{20000}$ к 229, иначе как 5667 к 2 290 000, поэтому силы тяжести в этих местах будут находиться в отношении 2 295 667 к 2 290 000.

Вследствие этого, так как длины маятников, совершающих размахи в одинаковое время, пропорциональны величине силы тяжести, в широте же *Парижа* длина маятника, делающего размах в 1 секунду, равна 3 футам $8\frac{1}{2}$ линиям парижским или, точнее, $8\frac{5}{9}$ линиям, принимая поправку на вес воздуха, то длина маятника под экватором будет меньше маятника парижского на 1.087 линии. На основании такого расчета составлена следующая таблица:

| Широта | Длина маятника | Длина 1° дуги меридиана |
|---|---|---|
| 0° | 3 фут. 7,468 лин. | 56637 туаз. |
| 5 | 7,482 | 642 |
| 10 | 7,526 | 659 |
| 15 | 7,596 | 687 |
| 20 | 7,692 | 724 |
| 25 | 7,812 | 769 |
| 30 | 7,948 | 823 |
| 35 | 8,099 | 882 |
| 40 | 8,261 | 945 |
| 1 | 8,294 | 958 |
| 2 | 8,327 | 971 |
| 3 | 8,361 | 984 |
| 4 | 8,394 | 56997 |
| 45 | 8,428 | 57010 |
| 6 | 8,461 | 022 |
| 7 | 8,494 | 035 |
| 8 | 8,528 | 048 |
| 9 | 8,561 | 061 |
| 50 | 8,594 | 074 |
| 55 | 8,756 | 137 |
| 60 | 8,907 | 196 |
| 65 | 9,044 | 250 |

Из этой таблицы видно, что неравенство градусов настолько мало, что для географии Землю можно принимать за шар, в особенности если она несколько плотнее близ плоскости экватора, нежели у полюсов.

На самом деле, некоторые астрономы, посланные для наблюдений в отдаленные области, заметили, что маятники их часов колебались медленнее близ экватора, нежели в наших местах. Первый это заметил г. *Рише* в 1672 г. на *о. Кайенне*, а именно, наблюдая прохождения неподвижных звезд через меридиан в *августе* того года, он увидал, что его часы отставали против среднего движения Солнца, причем суточная разность достигала 2 минут 28 секунд. Он сделал затем такой простой маятник, который совершал каждый свой размах в 1 секунду, замечаемую по превосходным часам, и измерял его длину. Он повторял эти наблюдения еженедельно в продолжение 10 месяцев. По возвращении во Францию, он сличил длину этого маятника с длиною маятника парижского (которая составляла 3 фута $8\frac{3}{5}$ линий парижских[1], причем оказалось, что его маятник короче на $1\frac{1}{4}$ линии.

Затем наш соотечественник *Галлей* при плавании около 1677 г. на *о. Св. Елены* заметил, что его часы шли там медленнее, нежели в *Лондоне*, но он не пронаблюдал точно разницы, а укоротил маятник более, чем на $\frac{1}{8}$ дюйма, т. е. более, чем на $1^1/_2$ линии; чтобы этого достигнуть, так как длина винта в нижней части маятника была недостаточна, он проложил между гайкою винта и грузом маятника деревянный кружочек.

Затем в 1682 г. гг. *Варен* и *Де-Гайс* нашли, что длина маятника, делающего свои размахи в 1 секунду в королевской Парижской обсерватории, равна 3 футам $8\frac{5}{9}$ линиям, на острове же *Горее* определенная ими по тому же способу длина секундного маятника оказалась в 3 фута $6\frac{5}{9}$ линий, т. е. разность составляла 2 линии. В том же году, перейдя на острова *Мартинику* и *Гваделупу*, они нашли, что длина секундного маятника там равна 3 футам $6\frac{1}{2}$ линиям.

После того г. *Купле* сын в *июле* 1697 г. выверил свои часы в Парижской обсерватории так, что их ход долгое время совпадал с средним движением Солнца. Сделав затем переход в *Лиссабон*, он нашел, что в *ноябре* его часы отставали на 2 минуты 13 секунд в сутки. В *марте* следующего года, придя в *Параибо*, он нашел, что его часы отставали против *Парижа* на 4 минуты 12 секунд в сутки. На основании этих наблюдений, он утверждал, что в *Лиссабоне* маятник короче на $2\frac{1}{2}$ линии и в *Параибо* — на $3\frac{2}{3}$ линии, нежели в *Париже*. Было бы правильнее, если бы он принял эти разности в $1\frac{1}{3}$ и $2\frac{5}{9}$ линии, ибо эти последние величины соответствуют разностям времен качаний в 2 минуты 13 секунд и 4 минуты 12 секунд. Эти грубые наблюдения заслуживают малого доверия.

В ближайшие годы (1699 и 1700) г. *Де-Гайс*, при новом плавании в Америку, определил, что на островах *Кайенне* и *Гренаде* длина секундного маятника немного менее 3 футов $6\frac{1}{2}$ линий, что на *о. Св. Христофора* эта длина равна 3 футам $6\frac{3}{4}$ линиям и на *о. Св. Доминика* она равна 3 футам 7 линиям.

В 1704 г. г. *Феллье* нашел, что в *Портобелло*, в Америке, длина секундного маятника равна лишь 3 футам $5\frac{7}{12}$ линиям, т. е. почти на 3 линии короче, нежели в *Париже*, однако в его наблюдении есть ошибка, ибо придя на *Мартинику*, он нашел, что длина маятника равна лишь 3 футам $5\frac{10}{12}$ линиям.

Широта *Параибо* 6°38′ южн., *Портобелло* 9°33′ сев., широты островов *Кайенны, Гореи, Гвадалупы, Мартиники, Гранады, св. Христофора* и *св. Доминика* соответственно: 4°55′; 14°40′; 14°00′; 14°44′; 12°06′; 17°19′ и 19°48′ сев. Избыток длины парижского секундного маятника над длинами таких же маятников, наблюденными в этих широтах, немного более, нежели показан в предыдущей таблице на основании вычислений. Поэтому Земля на экваторе немного выше, нежели по этому расчету, и к центру более плотна, нежели в шахтах близ поверхности, если только, вследствие высокой теплоты длины маятников, несколько не увеличились.

В самом деле, г. *Пикар* заметил, что железная линейка, которая зимою на морозе была длиною в 1 фут, при нагревании на огне становилась равной 1 футу и $\frac{1}{4}$ линии. Затем г. *де-ля-Гир* наблюдал, что железная полоса, которой длина в зимнее время была 6 футов, будучи выставленной летом на солнце, оказывалась длиною в 6 футов и $\frac{2}{3}$ линии. В первом случае теплота была больше, нежели во втором, в этом же последнем случае была более, нежели наружных частей человеческого тела, ибо металлы сильно накаливаются летним солнцем. Стержень маятника часов никогда летом не выставляется на солнце и никогда не достигает теплоты наружной поверхности человеческого тела, поэтому в часах стержень маятника, длиною в 3 фута, будет немногим длиннее летом, нежели зимою, но разность этих длин не превзойдет $\frac{1}{4}$ линии; вследствие этого полная разность длин секундных маятников под разными широтами не может быть приписываема различной теплоте. Нельзя также приписать эту разность ошибкам в наблюдениях астрономов, посланных из *Франции*, ибо хотя их наблюдения и не вполне между собою совпадают, но разницы настолько малы, что ими можно пренебречь, все же они согласуются в том, что секундные маятники на экваторе короче, нежели в королевской Парижской обсерватории, причем разность не меньше $1\frac{1}{4}$ линии и не больше $2\frac{2}{3}$ линий. По наблюдениям г. *Рише* в *Кайенне* разность была $1\frac{1}{4}$ линии, по наблюдениям *Де-Гайса* эта исправленная разность составляла от $1\frac{1}{2}$ до $1\frac{3}{4}$ линии. По другим, менее точным, наблюдениям получалось даже до 2 линий. Эти несогласия могут частию происходить от погрешности наблюдений, от неоднородности внутренних частей Земли, от высоты гор и от разной теплоты воздуха.

Железная полоса 3-футовой длины в зимнее время в *Англии* короче, нежели в летнее время, на $\frac{1}{6}$ линии, как мне кажется. Если отнять такую величину, как происходящую от теплоты под экватором, из полученной по наблюдениям разности в $1\frac{1}{4}$ линии, то останется $1\frac{1}{12}$ линии, что весьма точно совпадает с полученной по теории величиною в 1.087 линии. Наблюдения *Рише* в Кайенне производились еженедельно в продолжение 10 месяцев, и длины маятника, отмеченные им там на железном стержне, были сличены с длиною его во Франции, отмеченной на том же стержне. Такой тщательности и предосторожности не было в других наблюдениях. Если довериться этим наблюдениям, то Земля при экваторе выше, нежели при полюсах, примерно, на 17 миль, как то и получено по изложенной теории.

### Предложение XXI. Теорема XVII

*Точки равноденствий отступают, и земная ось при каждом годовом обращении Земли совершает колебания, дважды наклоняясь к эклиптике и затем дважды отходя в первоначальное свое положение.*

Следует из предложения LXVI, следствия 20, книги I. Но указанное колебательное движение должно быть весьма мало и едва-едва заметно.

### Предложение XXII. Теорема XVIII

*Все движения Луны и все неравенства этих движений следуют из вышеизложенных начал.*

Из предложения LXV книги I следует, что главные большие планеты, при своем обращении вокруг Солнца, могут переносить другие малые планеты, обращающиеся около них. Эти малые планеты должны обращаться по эллипсам, имеющим своим фокусом центры больших. Вследствие действия Солнца, их движения испытывают весьма многочисленные возмущения и подвержены неравенствам, подобным замечаемым в движении Луны. Эта последняя (по след. 2, 3, 4, 5 предл. LXVI) в сизигиях движется быстрее, описывая радиусом, проведенным к Земле, площадь бо́льшую, нежели следовало бы по пропорциональности времени и ее скорости; в квадратурах кривизна ее орбиты меньше, и она более приближается к Земле, поскольку тому не препятствуют изменения эксцентриситета. Эксцентриситет же наибольший (по след. 9 предл. LXVI), когда апогей Луны находится в сизигиях, и наименьший, когда он приходится в квадратурах, поэтому Луна в перигее быстрее и ближе к нам, в апогее медленнее и дальше от нас, будучи в сизигиях, нежели в квадратурах. Сверх того, апогей перемещается вперед, узлы же — назад, но движения их неравномерны. Апогей (по след. 7 и 8 предл. LXVI) перемещается вперед быстрее в своих сизигиях и отступает назад медленнее в квадратурах и, вследствие избытка перемещений вперед над отступаниями назад, ежегодно перемещается движением попутным. Узлы же (по сл. 2 предл. LXVI) находятся в покое в своих сизигиях и быстрее всего отступают в квадратурах. Наибольшая широта Луны больше в ее квадратурах (по след. 10 предл. LXVI), нежели в сизигиях, и среднее ее движение медленнее, когда Земля в перигелии (по след. 6 предл. LXVI), нежели когда она в афелии. Это и суть главнейшие неравенства Луны, замеченные астрономами. Но, кроме того, есть еще некоторые неравенства, возмущающие движения Луны и не наблюденные прежними астрономами, так что до сих пор они не могли быть приведены ни к какому закону или правилу. Таковы скорости или часовые движения апогея и узлов Луны и уравнения их, разность между наибольшим эксцентриситетом в сизигиях и наименьшим в квадратурах и неравенство, называемое вариацией; все эти неравенства увеличиваются и уменьшаются в продолжение года (по след. 14 предл. LXVI) в отношении кубов видимого диаметра Солнца. Кроме того, вариация увеличивается или уменьшается приблизительно пропорционально квадрату времени между квадратурами (по след. 1 и 2 лем.

X и след. 16 предл. LXVI кн. I). В астрономических вычислениях эти неравенства относились к уравнению центра и смешивались с ним.

### Предложение XXIII. Задача V

*Неравенства движения спутников Юпитера и Сатурна могут быть выведены из движений Луны.*

Движения лун, или спутников Юпитера, выводятся из движения нашей Луны следующим образом. Среднее движение узлов крайнего спутника Юпитера находится к среднему движению узлов Луны в отношении, равном произведению квадрата отношения времени оборота Земли вокруг Солнца к времени оборота Юпитера на отношение времени оборота спутника вокруг Юпитера ко времени оборота Луны вокруг Земли (по след. 16 предл. LXVI), поэтому этот узел в столетие проходит вперед $8°24'$. Средние движения внутренних спутников относятся к вышеуказанному, как времена их обращений ко времени обращения крайнего (по тому же следствию), следовательно определяются.

Прямое движение вершины орбиты каждого спутника относится к понятному движению его узлов, как движение апогея Луны к движению ее узлов, следовательно находится. Однако найденное таким образом движение вершины должно быть уменьшено приблизительно в отношении 5 к 9 или, кругло, 1 к 2 по причине, изложению которой здесь не место. Наибольшие уравнения узлов и вершин для каждого спутника относятся соответственно к наибольшим уравнениям узлов и вершин Луны, как перемещение узлов и вершин спутников за время, равное полному периоду этих уравнений, к перемещению узлов и апогея Луны за время полного периода их уравнений. Вариация спутника, усматриваемая с Юпитера, относится к вариации Луны, как полные перемещения узлов в продолжение времени, в которое спутник и Луна обращаются относительно Солнца (по тому же следствию), следовательно для крайнего спутника не превосходит $5''12.'''$.

### Предложение XXIV. Теорема XIX

*Прилив и отлив моря происходит от действия Луны и Солнца.*

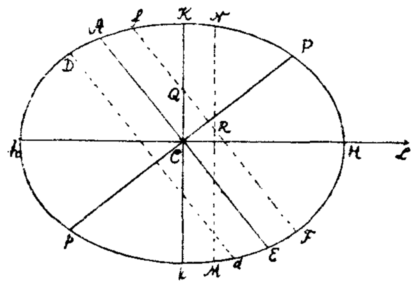
Из следствий 19 и 20 предложения LXVI книги I явствует, что море должно дважды повышаться и дважды понижаться в продолжение каждых как лунных, так и солнечных суток и что наибольшая высота воды (полная вода) в морях свободных и глубоких должна следовать менее, нежели через 6 часов после прохождения светила через меридиан места. Так оно и происходит на всем восточном побережье северной и южной части *Атлантического* океана между *Францией* и мысом *Доброй Надежды*, а также на *Чилийском* и *Перувианском* берегу *Тихого* океана. На всех этих берегах прилив бывает во втором, третьем или четвертом часу, за исключением таких мест, где движение, распространяясь из глубокого океана через мелководия, запаздывает до пятого, шестого, седьмого или даже еще более позднего часа. Я считаю здесь часы от обоих прохождений светила через меридиан места как над, так и под горизонтом, под часом же лунным я разумею одну двадцатьчетвертую часть промежутка времени между двумя последовательными видимыми верхними прохождениями Луны через меридиан места. Но действие силы на море продолжается и после этого и, следовательно, возрастает, пока море не достигнет наибольшей высоты, что бывает через 1 или 2 часа, а у берегов чаще через 3 часа или даже более, если море мелководно.

Оба движения, производимые обоими этими светилами, не распределяются порознь, а слагаются в некоторое среднее движение. При соединениях и при противостояниях светил их действия слагаются и производят наибольший прилив и отлив. В квадратурах Солнце повышает воду там, где Луна ее понижает, и понижает там, где Луна ее повышает, и вследствие разности действий происходит наименьший прилив. А так как наблюдение показывает, что действие Луны сильнее действия Солнца, то наибольшая высота воды и бывает приблизительно в третьем лунном часу. Вне сизигиев и квадратур наибольшая высота воды, которая должна бы иметь всегда место в третьем лунном часу при действии одной только силы Луны и в третьем часу солнечного времени при действии одной только силы Солнца, при совокупном действии обеих сил приходится в некоторое промежуточное время ближе к третьему лунному часу.

Следовательно, при переходе Луны от сизигиев к квадратурам, когда третий час солнечного времени предшествует третьему часу лунному, наибольшая высота воды также предшествует третьему лунному часу и притом на наибольший промежуток немного после октантов. На такие же промежутки наибольшая высота воды опаздывает после третьего лунного часа при переходе Луны от квадратуры к сизигиям. Так это происходит в открытых морях. В устьях же рек наибольшие приливы при прочих одинаковых условиях наступают позже.

Действия светил зависят от их расстояний до Земли, при меньших расстояниях они сильнее, при бóльших — слабее, и притом в отношении кубов видимых диаметров. Следовательно, зимою Солнце, будучи в перигее, производит большее действие, вследствие которого сизигийные приливы несколько больше и квадратурные (при прочих одинаковых условиях) — несколько менее, нежели летом; также и Луна каждый месяц, будучи в перигее, производит более высокие приливы, нежели через 15 дней, когда она приходит в апогей. Отсюда происходит, что два самых наибольших сизигийных прилива не следуют один за другим.

Действие каждого светила зависит и от его склонения, иначе — расстояния от экватора. Ибо, если бы светило находилось в полюсе, то оно притягивало бы частицы воды постоянно без усиления и ослабления действия и, следовательно, не могло бы производить попеременного движения. Поэтому при переходе светил от экватора к полюсам действие их постепенно ослабевает, и они производят меньшие приливы в сизигиях сольстициальных, нежели при равноденственных. В квадратурах же сольстициальных происходят бо́льшие приливы, нежели в квадратурах равноденственных, ибо действие Луны, находящейся на экваторе, в наибольшей степени превосходит действие Солнца. Таким образом наибольшие приливы происходят в сизигиях и наименьшие — в квадратурах близ времени равноденствий для обоих светил вместе. Наибольший сизигийный прилив всегда должен сопровождаться наименьшим квадратурным, что согласно с наблюдениями. Вследствие меньшего расстояния Солнца до Земли в зимнее время, нежели в летнее, происходит то, что наибольшие и наименьшие приливы чаще предшествуют весеннему равноденствию, нежели следуют за ним, и чаще следуют за осенним равноденствием, нежели предшествуют ему.




Фиг. 185.

Действия светил зависят также от широты места. Пусть $ApEP$ представляет (фиг. 185) Землю, покрытую повсюду глубокою водой, $C$ — ее центр, $P$, $p$ — полюсы, $AE$ — экватор, $F$ — какое-либо место вне экватора, $Ff$ — параллель этого места, $Dd$ — соответствующую ей параллель по другую сторону экватора, $L$ — место, занимаемое Луной за 3 часа перед тем, $H$ — место Земли, перпендикулярно под ним лежащее, $h$ — место, ему противоположное, $K$, $k$ — места, отстоящие от них на 90°, $CH$, $Ch$ — наибольшие высоты моря, измеряемые от центра Земли, $CK$, $Ck$ — наименьшие высоты. Если на осях $Hh$ и $Kk$ описать эллипс и затем обращением его около большей оси $Hh$ произвести сфероид $HPKhpk$, то этот сфероид представит приблизительно форму, принимаемую морем; $CF$, $Cf$, $CD$, $Cd$ и будут для мест $F$, $f$, $D$, $d$ высотами воды, считаемыми от центра Земли $C$. Если при обращении этого эллипса какая-либо точка $N$ описывает круг $NM$, пересекающий параллели $Ff$, $Dd$ в точках $R$ и $T$ и экватор $AE$ в точке $S$, то $CN$ представит общую высоту воды для всех точек этого круга. Отсюда видно, что при суточном обращении Земли будет полная вода в данном месте $F$ в третьем часу после верхнего прохождения Луны через меридиан, затем малая вода в $Q$ в третьем часу после захождения Луны, затем полная вода в $f$ в третьем часу после нижнего прохождения Луны и, наконец, опять малая вода в $Q$ в третьем часу после восхода Луны. Вторая полная вода в $f$ будет ниже, нежели первая в $F$. Итак, море подразделяется на два отдельных приливных полушария, $KHk$ — северное и противоположное ему $Khk$ — южное, которое и будем так называть. Эти друг другу противоположные приливы приходят по очереди на меридиан места через промежутки в 12 лунных часов. Так как области, широта коих северная, более подвержены северному приливу, а южные — южному, то поочередно и происходят большой и малый прилив для всех лежащих вне экватора мест, где Солнце и Луна восходят и заходят. Когда при склонении, одноименном с широтою мест, Луна ближе всего проходит к его зениту, наступает наибольший прилив, бывающий в третьем часу по прохождении Луны через меридиан; при изменении склонения Луны высота полной воды уменьшается. Наибольшая разность высот двух последовательных больших вод происходит во времена равноденствий, в особенности если восходящий узел Луны приходится в начале знака Овна. Так оказывается, что зимою утренние приливы в *Плимуте* выше вечерних, летом же вечерние выше утренних почти на 1 фут, в *Бристоле* даже на 15 дюймов, как то наблюдали *Кальпресс* и *Штурми*.

Описанные до сих пор движения несколько изменяются упомянутой выше силою воздействия вод, вследствие которой прилив может сохраняться некоторое время и после того, как прекратилось действие светил. Это сохранение сообщенного движения уменьшает разность чередующихся приливов, увеличивает ближайшие приливы после сизигиев и уменьшает ближайшие приливы, следующие за квадратурами. Поэтому и происходит, что в *Плимуте* и *Бристоле* разность высот последовательных больших вод не больше 1 фута или 15 дюймов и что наибольший прилив не первый после сизигиев, а третий. Все движения вместе с тем замедляются при переходе через мелководия, так что в некоторых приливах и устьях рек наибольшие приливы суть четвертые или даже пятые после сизигий.

Кроме того, может случиться, что к тому же порту прилив доходит через различные проливы и притом через одни скорее, нежели через другие; тогда тот же самый прилив, подразделенный на два или на несколько, происходящих последовательно, может слагаться в новые движения разного рода. Вообразим, что к тому же порту приходят два равных прилива от двух различных мест, причем первый предшествует второму на 6 часов и происходит в третьем часу по прохождении Луны через меридиан этого порта. Если бы Луна при этом своем прохождении через меридиан находилась на экваторе, то через каждые 6 часов происходил бы равный приливу отлив, которые, совпадая между собою, взаимно бы уничтожались; таким образом в те сутки вода оставалась бы спокойною. Если же Луна сойдет с экватора, то океанские приливы будут поочередно большими и малыми, как уже сказано, и таким образом, в этот порт придут поочередно обе больших и обе малых воды. Но две больших воды дают при своем соединении высокую воду в некоторое промежуточное время, высокая и малая вода производят некоторую среднюю высоту воды в промежутке между ними, и наконец, между двумя малыми водами вода имеет наименьшую высоту.

Таким образом в продолжение 24 часов будет не две высоких и две малых воды, а лишь по одной, и высокая вода, когда склонение Луны одноименно с широтою места, придется или в шестом, или в тридцатом часу после прохождения Луны через меридиан, при изменениях же склонения Луны на противоположное эта высокая вода сменится малою. Такого рода пример имеем в *Тонкинском* порте *Батшам* в широте 20°50′ сев., как о том сообщает *Галлей* на основании наблюдений мореплавателей. В этом порте, на следующий день после прохода Луны через экватор, вода остается спокойной, когда же склонение Луны становится северным, то в сутки бывает не два прилива и два отлива, а всего лишь по одному, причем высокая вода бывает при заходе Луны, низкая — при восходе ее. Прилив увеличивается вместе с склонением Луны до 7-го или 8-го дня, затем в продолжение следующих 7 или 8 дней прилив уменьшается в той же постепенности, в какой он нарастал, и прекращается, когда Луна меняет свое склонение с северного на южное, переходя вновь через экватор. После этого прилив заменяется отливом, так что малая вода имеет место при заходе Луны и высокая — при восходе ее, пока Луна, изменяя свое склонение, не пройдет вновь через экватор.

К этому порту подход двоякий, один от *Северного Китайского моря* через пролив между материком и о. *Люцоном*, другой — со стороны

*Индийского моря* (Южнокитайского) между материком и *о. Борнео*. Так как прилив из Индийского моря идет через указанный пролив 12 часов, а из Китайского моря 6 часов, то приходясь на третий и девятый лунные часы, эти два прилива и слагаются в описанное выше движение; нет ли там и еще каких иных условий,—я предоставляю опредедлить наблюдениями на близлежащих побережьях.

До сих пор я объяснял причины движений Луны и морей. О количестве же этих движений остается кое что дополнить.

### Предложение XXV. Задача VI[192]

*Найти силу Солнца, возмущающую движения Луны.*

Пусть $S$ представляет Солнце, $T$ — Землю, $P$ — Луну (фиг. 186), $CADB$ — орбиту Луны. Отложив по $SP$ длину $SK$, равную $ST$, возьмем $SL$ так, чтобы было

$$SL:SK = SK^2:SP^2,$$

и проведем $LM$ параллельно $PT$; тогда, если ускорительную силу тяготения Земли к Солнцу представить длиною $ST$ или $SK$, то $SL$ представит ускорительную силу тяготения Луны к Солнцу.

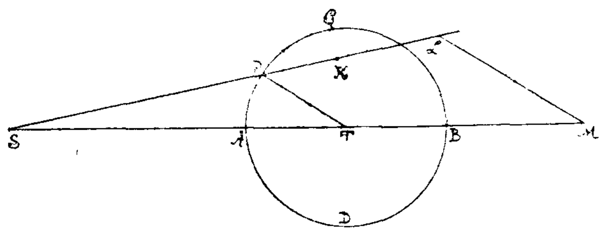
Эта сила слагается из двух сил $SM$ и $LM$, из коих $LM$ и часть $TM$ силы $SM$ возмущают движение Луны, как изложено в предложении LXVI и его следствиях. Если рассматривать, что Земля и Луна обращаются около общего их центра тяжести, то и движение Земли возмущается подобными же силами; но можно относить к Луне как суммы сил, так и движений, и изображать суммы сил пропорциональными им линиями $TM$ и $ML$. Среднее значение силы $ML$ находится к центростремительной силе, под действием которой Луна могла бы обращаться по своей орбите вокруг покоящейся Земли, в отношении, равном квадрату отношения времен обра-

---

[192] В предложениях от XXV до XXXVI Ньютон излагает теорию движения Луны. Эта теория Ньютона разобрана в «Небесной Механике» как Лапласа (Laplace. Mécanique Céleste, t. V, livre XVI, ch. II), так и Тиссерана (F. Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, t. III, ch. III). Разбор Лапласа изложен настолько сжато, что требовал бы, в свою очередь, пояснений, поэтому в прибавлении помещен перевод упомянутой главы «Небесной Механики» Тиссерана. Я предпочел привести этот полный разбор, исполненный знаменитым ученым, вместо примечаний к каждому предложению в отдельности, тем более, что теория движения Луны представляет не столько общий, сколько специальный интерес. Основываясь на разборе Тиссерана, нетрудно представить все результаты Ньютона аналитически, пользуясь его же геометрическими выводами. Кроме сочинений, указанных Тиссераном, в которых развивается теория Ньютона, следует еще отметить курс астрономии Боненбергера (J. Bohnenberger. Astronomie, 1811), в котором автор придерживается весьма близко изложения Ньютона, дополняя и поясняя его геометрические соображения и представления равносильными им формулами и расчетами.

щений Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца (по след. 17 предл. LXVI), т. е. квадрату отношения 27 дней 7 часов 43 минут к 365 дням 6 часам 9 минутам, т. е. в отношении как 1000 к 178725 или 1 к $178\frac{29}{40}$.

В предложении IV этой книги показано, что если бы Земля и Луна обращались около общего их центра тяжести, то среднее расстояние между ними было бы приблизительно в $60\frac{1}{2}$ средних полудиаметров Земли. Сила, под действием которой Луна могла бы обращаться около покоящейся Земли в расстоянии $PT$, равном $60\frac{1}{2}$ земных полудиаметров, относится к силе,




Фиг. 186.

под действием которой она могла бы обращаться в такое же время в расстоянии 60 полудиаметров, как $60\frac{1}{2}$ к 60. Следовательно, средняя величина силы $ML$ относится к силе тяжести на поверхности Земли, как

$$1\cdot 60\frac{1}{2} : 60\cdot 60\cdot 60\cdot 178\frac{29}{40},$$

т. е. как 1 к 638 092,6. На основании этого и отношения линий $TM$ и $ML$ найдется и сила $TM$; это и суть силы Солнца, возмущающие движения Луны.

## Предложение XXVI. Задача VII

*Найти часовое приращение площади, описываемой радиусом, проведенным к Земле, при движении Луны по круговой орбите.*

Уже сказано, что площадь, описываемая радиусом, проведенным от Луны к Земле, пропорциональна времени, за выключением того, насколько движение Луны возмущается действием Солнца. Здесь и предлагается исследовать неравенство часового приращения этой площади. Чтобы сделать вычисление проще, вообразим, что орбита Луны круговая, и отбросим все неравенства, кроме рассматриваемого. В виду весьма большого расстояния до Солнца, примем также линии $SP$ и $ST$ (фиг. 187) за параллельные. При таком условии сила $LM$ сведется к средней своей величине $TP$, а также и сила $TM$ — к средней своей величине $3PK$. Эти две силы (по след. II законов) слагаются в силу $TL$; эта же последняя сила, если опустить на радиус $TP$ перпендикуляр $LE$, разлагается на силы $TE$ и $EL$, из коих $TE$, действуя постоянно по направлению радиуса $TP$, не ускоряет и не замедляет описания площади $TPC$ этим радиусом $TP$, сила же $EL$, действуя перпендикулярно радиусу, ускоряет или замедляет описание площади, поскольку она ускоряет или замедляет движевие Луны.

Это ускоревие Луны, при переходе ее от квадратуры $C$ к соединению $A$, в каждый отдельный момевт пропорционально ускоряющей силе $EL$, т. е.

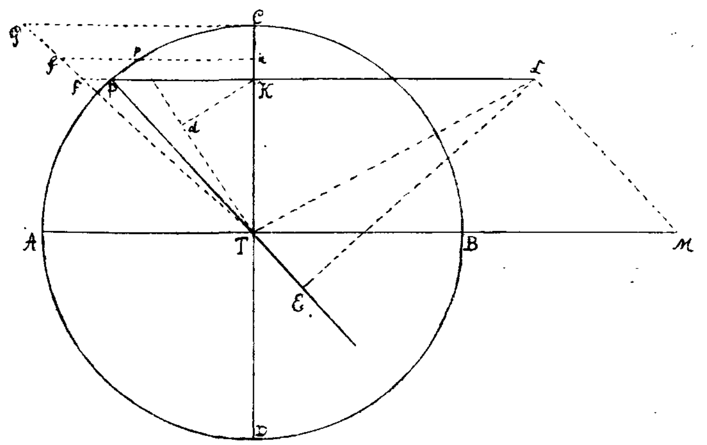
$$\frac{3PK\cdot TK}{TP}.$$

Представим время средним движением Луны, или, что сводится к тому же самому, углом $CTP$, или же дугою $CP$. По перпендикуляру $CG$ к радиусу $CT$ откладывается длива $CG$, равная $CT$.

Четверть окружности $AC$ разделяется на бесчисленное множество равных частей $Pp$, которыми можно представить таковое же число равных весьма малых промежутков времени; проведя $pk$ перпендикулярно к $CT$, проводим $TG$, пересекающую продолжения $KP$ и $kp$ в точках $F$ и $f$; тогда будет:

$$FK = TK$$
$$Kk : PK = Pp : Tp,$$

т. е. отношение $Kk : PK$ — постоянное, поэтому $FK\cdot Kk$, иначе площадь $FKkf$, будет пропорциональна $\frac{3PK\cdot TK}{TP}$, т. е. пропорциональна $EL$. Слагая, получим, что полная площадь $GCKF$ будет пропорциональна сумме всех сил $EL$, действовавших на Луну в продолжевие всего времеви $CP$, а значит, и пропорциональна скорости, этою суммою произведенной, т. е. ускорению описания площади $CTP$, иначе — приращению *секториальной скорости*. Сила, под действием которой Луна может обращаться в 27 дней 7 часов 43 минуты, представляемых кругом $CADB$, заставила бы тело в продолжение времени $CT$ описать при своем падении путь $\frac{1}{2}CT$ и приобрести такую же скорость, с какою Луна движется по своей орбите. Это явствует из следствия 9 предложения IV квиги I. Но так как перпендикуляр $Kd$, опущенный на $TP$, равен $\frac{1}{3}$ $EL$ и $\frac{1}{2}$ $TP$ или $\frac{1}{2}$ $ML$, когда $P$ в октантах, то сила $EL$ в октантах, где она наибольшая, превосходит силу $ML$ в отношении 3 к 2 и, следовательно, относится к той силе, под действием которой Луна могла бы обращаться вокруг покоящейся Земли в продолжение своего периода, как $100 : \frac{2}{3} \cdot 17872\frac{1}{2}$, т. е. как 100 к 11915, и скорость, сообщаемая ею Луне в продолжение времени $CT$, составит $\frac{100}{11915}$ скорости Луны. В продолжение же времени $CPA$ эта сила сообщила бы скорость, большую найденной в отношении $CA$ к $CT$ или к $TP$. Представим наиболь-




Фиг. 187.

шую силу $EL$ в октантах площадью $FK \cdot Kk$, равною площади $\frac{1}{2} TP \cdot Pp$. Скорость, которую эта наибольшая сила может произвести в продолжение времени $CP$, относится к скорости, которую может произвести всякая меньшая сила $EL$ в то же самое время, как площадь $\frac{1}{2}\ TP \cdot CP$ к площади $KCFG$. Скорости же, производимые в продолжение всего времени $CPA$, будут относиться между собою, как площадь $\frac{1}{2}\ TP \cdot CA$ к площади треугольника $TCG$, иначе как дуга $AC$ к радиусу $TP$.

Следовательно (по предл. IX кн. V Эвкл. «Элементов») скорость, производимая в продолжение всего времени $CPA$, составит $\frac{100}{11915}$ скорости Луны.

Таким образом к средней скорости Луны, пропорциональной средней величине приращения площадей, прибавляется или же от нее отнимается половина исчисленной выше; поэтому, если среднюю величину приращения площади представить числом 11 915, то сумма 11 915 + 50, или 11 965, представит наибольшую секториальную скорость в сизигии $A$, и разность

11915 — 50, т. е. 11865, — наименьшую секториальную скорость в квадратурах.

Следовательно, площади, описываемые в равные промежутки времени в сизигиях и в квадратурах, относятся друг к другу, как 11 965 к 11 865. К наименьшей секториальной скорости надо прибавлять такое ее приращение, которое относится к разности этих приращений 100, как площадь трапеции $FKCG$ к площади треугольника $TCG$ (или, что то же, как $PK^2 : TP^2$ или как $Pd : TP$); сумма представит секториальную скорость для промежуточного положения $P$ Луны.

Все это происходит так при предположении, что Солнце и Земля находятся в покое и Луна совершает свой синодический оборот в 27 суток 7 часов 43 минуты. Но так как на самом деле период синодического оборота Луны составляет 29 суток 12 часов 44 минуты, то приращения секториальных скоростей должны быть увеличены пропорционально времени, т. е. в отношении 1 080 853 к 1 000 000. Если это выполнить, то полное приращение, составлявшее $\frac{100}{11915}$ средней секториальной скорости, составит от нее $\frac{100}{11023}$.

Следовательно, секториальная скорость в квадратурах Луны будет относиться к таковой же в сизигиях, как в 11 023 — 50 к 11 023 + 50, т. е. как 10 973 к 11 073, и к скорости при прохождении через какое-либо промежуточное место ее орбиты $P$, как 10 973 к 10 973 + $Pd$, причем $TP$ принимается равной 100.

Следовательно, площадь, описываемая радиусом, проведенным от Луны к Земле в равные, весьма малые, промежутки времени, приблизительно пропорциональна сумме числа 219.46 и синуса верзуса расстояния Луны до ближайшей квадратуры, для круга, коего радиус равен 1. Все это имеет место, когда вариация в октантах имеет среднюю величину. Если же вариация больше или меньше, то вышеупомянутый синус верзус должен быть увеличен или уменьшен в том же отношении.

### Предложение XXVII. Задача VIII

*По часовому движению Луны найти расстояние до Земли.*

Площадь, описываемая радиусом, проведенным от Луны к Земле в отдельные весьма малые равные промежутки времени, пропорциональна произведению часового движения Луны и квадрату расстояния Луны до Земли, следовательно расстояние Луны до Земли прямо пропорционально корню квадратному из сказанной площади и обратно пропорционально корню квадратному из часового движения.

*Следствие 1.* Таким образом может быть найден видимый диаметр Луны, ибо он обратно пропорционален ее расстоянию до Земли. Пусть астрономы попробуют, в какой мере точно это правило совпадает с явлениями.

*Следствие 2.* Таким образом может быть также определен, пользуясь явлениями, более точно, нежели до сих пор, вид орбиты Луны.

### Предложение XXVIII. Задача IX

*Найти диаметры орбиты, по которой Луна должна бы двигаться без эксцентриситета.*

Кривизна траектории, описываемой движущимся телом, притягиваемым перпендикулярно к этой траектории, прямо пропорциональна силе этого притяжения и обратно пропорциональна квадрату скорости. Я считаю, что кривизны линий находятся между собой в предельном отношении синусов или тангенсов углов касания при равных радиусах, когда эти радиусы бесконечно уменьшаются. Притяжение Луны к Земле в сизигиях равно избытку ее тяготения к Земле над происходящею от Солнца силою $2PK$, на которую ускорительная сила тяготения Луны к Солнцу превосходит или не достигает величины ускорительной силы тяготения Земли к Солнцу. В квадратурах это притяжение равно сумме тяготения Луны к Земле и солнечной силы $KT$, которая также направлена тогда к Земле. Эти притяжения, полагая

$$\frac{AT + CT}{2} = N$$

приблизительно пропорциональны величинам

$$\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \cdot N}$$

и

$$\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \cdot N}$$

или

$$178\,725\, N \cdot CT^2 - 2000\, AT^2 \cdot CT$$

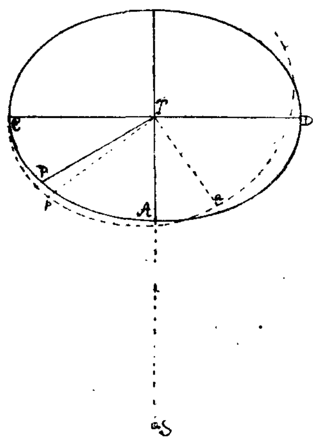
и

$$178\,725\, N \cdot AT^2 + 1000\, CT^2 \cdot AT$$

ибо, если выразить ускорительную силу тяготения Луны к Земле числом 178 725, то средняя величина силы $ML$, которая в квадратурах равна

$PT$ или $TK$ и направлена к Земле, есть 1000, и среднее значение силы $TM$ в сизигиях есть 3000, откуда, если вычесть среднее значение силы $ML$, то и останется сила 2000, которою в сизигиях Луна оттягивается от Земли и которая выше обозначена через $2PK$.

Отношение же скорости Луны в сизигиях $A$ и $B$ к ее скорости в квадратурах $C$ и $D$ равно произведению отношения $CT : AT$ на отношение секториальной скорости в сизигиях к секториальной скорости в квадратурах, т. е. оно равно $11\,073\,CT : 10\,973\,AT$.



Фиг. 188.

Разделив отношение приведенных выше величин на квадрат предыдущего отношения, получим отношение кривизны лунной орбиты в сизигиях к кривизне ее в квадратурах равным

$$\frac{120406729(178725\,AT^2\cdot CT^2\cdot N - 2000\,AT^4\cdot CT)}{122611329(178725\,AT^2\cdot CT^2\cdot N + 1000\,CT^4\cdot AT)},$$

т. е.

$$\frac{2151969\,AT\cdot CT\cdot N - 24081\,AT^3}{2191371\,AT\cdot CT\cdot N + 12261\,CT^3}.$$

Так как вид орбиты Луны неизвестен, то возьмем вместо нее эллипс $DBCA$ (фиг. 188), в центре которого находится земля $T$ и у которого большая ось $CD$ расположена между квадратурами, малая — между сизигиями. Но так как этот эллипс имеет угловое движение, вращаясь около Земли в своей плоскости, та же траектория, кривизна которой ищется, должна описываться в плоскости, не имеющей никакого углового движения, то надо рассматривать фигуру, описываемую Луною на неподвижной плоскости при обращении этого эллипса, т. е. фигуру $Cpa$. Отдельные точки $p$ этой фигуры находятся, беря на эллипсе какую-либо точку $P$, представляющую место Луны, и проводя $Tp = TP$ так, чтобы угол $PTp$ был равен видимому движению Солнца за время после квадратуры $C$, или, что сводится к тому же, так, чтобы угол $CTp$ относился к углу $CTP$, как время синодического оборота Луны ко времени звездного ее оборота, т. е. как 29 суток 12 часов 44 минуты к 27 суткам 7 часам 43 минутам.

Взяв угол $CTa$ в этом отношении к прямому углу $CTA$ и отложив длину $Ta = TA$, получим в точке $a$ ближнюю вершину, в точке же $C$ будет расположена дальняя вершина орбиты $Cpa$. Произведя вычисления, я нашел, что разность кривизн орбиты $Cpa$ в вершине $a$ и круга, описанного из центра $T$ радиусом $TA$, находится к разности кривизн эллипса в вершине $A$ и того же круга в отношении, равном квадрату отношения угла $CTP$ к углу $CTp$, и что кривизна эллипса в $A$ относится к кривизне сказанного круга, как $TA^2 : TC^2$; кривизна же этого круга — к кривизне круга, описанного из центра $T$ радиусом $TC$, — как $TC : TA$. Кривизна же этого круга к кривизне эллипса в точке $C$ — как $TA^2 : TC^2$; наконец, отношение разности между кривизною эллипса в вершине $C$ и кривизною последнего круга к разности между кривизною фигуры $Tpa$ в ее вершине $C$ и кривизною того же круга равно квадрату отношения угла $CTp$ к углу $CTP$. Все эти отношения легко получаются по синусам углов касания и разностям углов. Сопоставление этих отношений дает, что отношение кривизны фигуры $Cpa$ в $a$ к ее кривизне $C$ равно

$$\left(AT^3 + \frac{16\,824}{100\,000} CT^2 \cdot AT\right) : \left(CT^3 + \frac{16\,824}{100\,000} AT^2 \cdot CT\right).$$

Здесь число $\frac{16\,824}{10\,0000}$ представляет отношение разности квадратов углов $CTP$ и $CTp$ к квадрату меньшего угла $CTP$, или, что то же, отношение разности квадратов времен: 27 суток 7 часов 43 минуты и 29 суток 12 часов 44 минуты к квадрату времени 27 суток 7 часов 43 минуты.

Следовательно, так как $a$ представляет сизигий Луны и $C$ — ее квадратуру, то найденное отношение должно равняться отношению кривизны орбиты Луны в сизигиях к кривизне в квадратурах, которая была определена выше. Поэтому, чтобы найти отношение $CT$ к $AT$, уравниваем произведения средних и крайних членов пропорции; по разделении на $AT \cdot CT$, получим

$$2062.79\, CT^4 - 2\,151\,969\, N \cdot CT^3 + 368\,676\, N \cdot AT \cdot CT^2 +$$
$$+ 36342\, AT^2 \cdot CT^2$$
$$- 362\,047\, N \cdot AT^2 \cdot CT + 2\,191\,371\, N \cdot AT^3 + 4051{,}4\, AT^4 = 0$$

здесь

$$N = \frac{AT + CT}{2};$$

обозначая полуразность этих длин через $x$, так что

$$x = \frac{CT - AT}{2}$$

19. Зак. 3350

и приняв $N$ за 1, имеем

$$CT = 1 + x$$

и

$$AT = 1 - x$$

по подстановке этих величин в предыдущее уравнение и решении его, получим

$$x = 0.00719$$

следовательно полудиаметры будут:

$$CT = 1.00719$$
$$AT = 0.99281.$$

Отношение этих чисел приблизительно равно $70\frac{1}{24}$ к $69\frac{1}{24}$.

Следовательно, расстояние от Луны до Земли в сизигиях относится к ее расстоянию до Земли в квадратурах (не рассматривая эксцентриситета), как $69\frac{1}{24}$ к $70\frac{1}{24}$ или, кругло, как 69 к 70.

### Предложение XXIX. Задача X

*Найти вариацию Луны.*

Это неравенство частью происходит от эллиптического вида лунной орбиты, частью от неравенств секториальной скорости описания площадей радиусом, проведенным от Луны к Земле. Если бы Луна $P$ двигалась по эллипсу $DCA$ (фиг. 188) вокруг Земли, покоящейся в его центре, и описывала бы радиусом $TP$, проведенным к Земле, площадь $CTP$, пропорциональную времени, и наибольший полудиаметр $CT$ относился бы к наименьшему $TA$, как 70 к 69, то тангенс угла $CTP$ относился бы к тангенсу угла среднего движения, отсчитываемого от квадратуры $C$, как полудиаметр $TA$ эллипса к его полудиаметру $TC$, иначе как 69 к 70.

Но описание площади $CTP$ при переходе Луны от квадратуры к сизигию должно ускоряться так, чтобы отношение секториальной скорости в сизигии к секториальной скорости в квадратуре равнялось 11073 : 10973 и чтобы избыток секториальной скорости в каком-либо промежуточном месте $P$ над скоростью в квадратуре был бы пропорционален квадрату синуса угла $CTP$. Это будет удовлетворяться достаточно точно, если уменьшить тангенс угла $CTP$ в отношении

$$\sqrt{10973} : \sqrt{11073}$$

иначе в отношении 68.6877 к 69. Тогда тангенс угла $CTP$ будет относиться к тангенсу среднего движения, как 68.6877 к 70, и угол $CTP$ в октантах, где среднее движение равно 45°, окажется равным 44°27′28″; вычитая эту величину из угла среднего движения, т. е. 45°, получим в остатке наибольшую вариацию 32′32″. Так это было бы, если бы переходя от квадратуры к сизигию, Луна описывала угол $CTA$, равный 90°. На самом же деле, вследствие обращения Земли вокруг Солнца, оно переносится видимым прямым движением и Луна, прежде чем обогнать Солнце, описывает угол $CTa$, больший прямого в отношении времени синодического оборота Луны к звездному, т. е. в отношении 29 суток 12 часов 44 минут к 27 суткам 7 часам 43 минутам. От этого все углы при центре увеличиваются в этом отношении, и наибольшая вариация, которая была бы иначе равной 32′32″, при увеличении в этом отношении составляет 35′10″.

Такова ее величина при среднем расстоянии Солнца до Земли и при пренебрежении разностями, происходящими от кривизны земной орбиты и большего действия Солнца на новую и серповидную Луну, нежели на полную и горбатую. При других расстояниях Солнца до Земли, наибольшая вариация изменяется в отношении, равном произведению отношений времени синодического оборота Луны к году (продолжительность которого постоянна) на куб обратного отношения расстояний от Солнца до Земли. Следовательно, в апогее Солнца наибольшая вариация составляет 33′14″, в его перигее 37′11″, если эксцентриситет земной орбиты принять в отношении к ее большой полуоси, как $16\frac{15}{16}$ к 1000.

До сих пор мы исследовали вариацию для орбиты не эксцентрической, для которой Луна в своих октантах находится в среднем расстоянии от Земли. Если же, вследствие эксцентриситета, расстояние от Земли до Луны больше или меньше, нежели при нахождении на предыдущей орбите, то вариация может быть немного более или немного менее, нежели рассчитанная по данному здесь правилу, но этот избыток или недостаток я предоставляю астрономам определить по самим явлениям.

### Предложение XXX. Задача XI

*Найти часовое движение узлов Луны для круговой орбиты.*

Пусть $S$ представляет Солнце (фиг. 189), $T$ — Землю, $P$ — Луну, $NPn$ — орбиту Луны, $Npn$ — проекцию орбиты на плоскость эклиптики, $Nn$ — узлы, $nNTm$ — неопределенно продолженную линию узлов, $PJ$, $PK$ — перпендикуляры, опущенные на прямые $ST$, $Qq$; $Pp$ — перпендикуляр, опущенный на плоскость эклиптики, $AB$ — сизигии Луны в плоскости эклиптики, $AZ$ — перпендикуляр на линию узлов, $Qq$ — квадратуры Луны на плоскости эклиптики и $pQ$ — перпендикуляр на прямую $Qq$, проходящую через квадратуры. Сила Солнца, возмущающая движение Луны (предл. XXV), — двоякая, одна пропорциональна длине $LM$, другая — длине $MT$ (на фиг. 186). Первою силою Луна притягивается к Земле, второю — к Солнцу по направлению прямой, параллельной $ST$ и проведенной от Земли к Солнцу. Первая сила действует в плоскости лунной орбиты и, следовательно, не изменяет положения этой плоскости, и поэтому может быть отброшена. Вторая сила $MT$, которою возмущается положение плоскости лунной орбиты, одинакова с силою $3PK$ или $3JT$. Сила эта (по предл. XXV) относится к силе, под действием которой Луна могла бы равномерно обращаться в продолжение звездного месяца около покоящейся Земли, как $3JT$ к умноженному на 178.725 радиусу круга, иначе — как $JT$ к радиусу, умноженному на 59.375. Как в этом расчете, так и в следующих я считаю, что все прямые, проведенные от Луны к Солнцу, параллельны прямой, соединяющей Солнце с Землею, ибо насколько их наклон уменьшает все действия в одних случаях, настолько же он их увеличивает в других, мы же ищем среднее движение узлов, пренебрегая такого рода мелочами, которые лишь мешают вычислению.

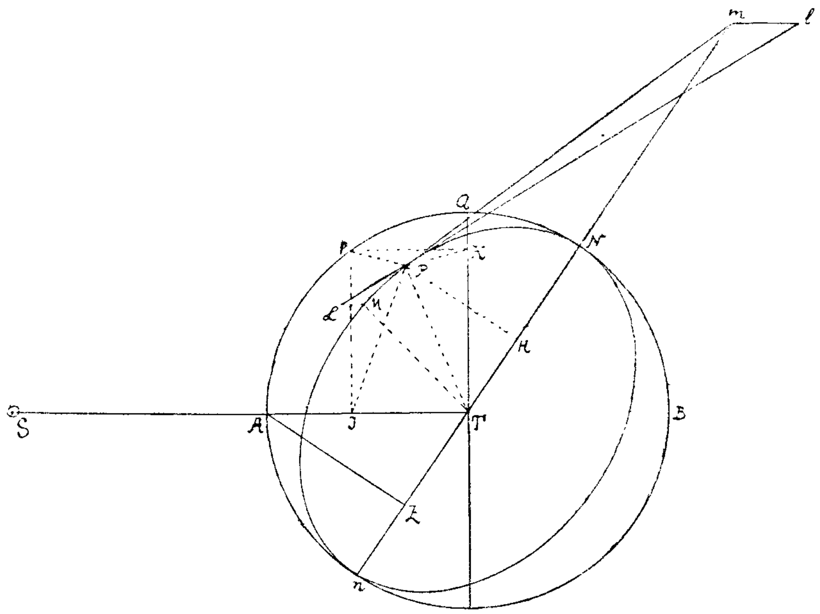
Пусть $PM$ представляет дугу, описываемую Луною в продолжение заданного весьма малого промежутка времени, и $ML$ — такой отрезочек, половину которого Луна прошла бы в продолжение того же промежуточка времени под действием силы $3JT$. Проведем $PL$, $MP$ и продолжим их до точек $m$ и $l$ пересечения с эклиптикой, и на $Tm$ опустим перпендикуляр $PH$. Так как прямая $ML$ параллельна плоскости эклиптики, а значит, с прямой $ml$, лежащей в этой плоскости, встретиться не может, вместе с тем эти прямые лежат в одной плоскости $LMPml$, следовательно они параллельны между собою и треугольники $LMP$, $lmP$ между собою подобны. Так как $MPm$ находится в плоскости той орбиты, по которой Луна двигалась бы в точке $P$, то точка $m$ находится на линии узлов $Nn$ этой орбиты (мгновенной); так как сила, под действием которой проходится длина, равная $\frac{1}{2}LM$, будучи приложена сразу и целиком в точке $P$, заставила бы Луну пройти путь, равный всей этой длине, и произвела бы такое действие, что Луна двигалась бы по дуге, хорда которой равна $LP$, и следовательно, перенесла бы Луну из плоскости $MPmT$ в плоскость $LPlT$; таким образом угловое перемещение узлов, произведенное этою силою, будет равно углу $mTl$.

Но

$$ml : mP = ML : MP$$

а так как $MP$ — постоянная, вследствие постоянства промежуточков времени, то $ml$ пропорционально $ML \cdot mP$, или, что то же, $JT \cdot mP$. Когда угол $Tml$ — прямой, то угол $mTl$ пропорционален

$$\frac{lm}{Tm} \quad \text{или} \quad \frac{JT \cdot Pm}{Tm}$$




Фиг. 189.

т. е. пропорционален

$$\frac{JT \cdot PH}{TP}$$

ибо

$$Pm : Tm = PH : TP$$

а так как $TP$ задано, то этот угол пропорционален $JT \cdot HP$. Когда же угол $Tml$ или $STN$ острый, то угол $mTl$ будет меньше предыдущего в отношении синуса угла $STN$ к радиусу или в отношении $AZ$ к $AT$. Следовательно, скорость движения узлов пропорциональна произведению $JT \cdot PH \cdot AZ$, иначе — произведению синусов углов $TPJ$, $PTN$ и $STN$.

Когда, при положении узлов в квадратурах и Луны в сизигиях, эти углы прямые, то отрезочек $ml$ удаляется в бесконечность, и угол $mTl$ становится равным углу $mPl$. В этом случае угол $mPl$ относится к углу $PTM$, описываемому видимым движением Луны вокруг Земли, как 1 к 59.575. Ибо угол $mPl$ равен углу $LPM$, т. е. тому углу отклонения Луны от прямого пути, которое произвела бы вышеуказанная сила Солнца $3JT$ в рассматриваемый весьма малый промежуток времени, если бы при этом на Луну не действовало бы тяготение к Земле, угол же $PTM$ равен углу отклонения Луны от прямого пути, производимому в такое же время тою силою, которою Луна удерживается на своей орбите, если бы силы Солнца не было, эти же силы, как сказано выше, относятся между собою, как 1 к 59.575.

Так как среднее часовое движение Луны относительно неподвижных звезд равно $32'56''27'''12.5^{\text{IV}}$, то часовое движение узла в этом случае будет $33''10'''33^{\text{IV}}12^{\text{V}}$. В остальных же случаях это часовое движение будет относиться к $33''10'''33^{\text{IV}}12^{\text{V}}$, как произведение синусов углов $TPJ$ $PTN$ и $STN$ (т. е. расстояния Луны до квадратуры, расстояния Луны до узла и расстояния узла до Солнца) к 1. Всякий раз, когда знак синуса какого-либо угла изменяется из положительного в отрицательный, затем из отрицательного в положительный, движение должно быть изменено из попятного в прямое и из прямого в попятное.

Отсюда происходит, что узлы движутся вперед, когда Луна находится между которою-нибудь из квадратур и ближайшим к ней узлом; в остальных же случаях их движение попятное, и вследствие избытка этого движения над движением вперед узлы ежемесячно перемещаются попятно.

*Следствие 1.* Таким образом, если из концов $P$ и $M$ (фиг. 190) весьма малой дуги $PM$ опустить перпендикуляры $PK$ и $Mk$ на прямую $Qq$, проходящую через квадратуры, и продолжить их до пересечения в $D$ и $d$ с линией узлов $Nn$, то часовое движение узлов будет пропорционально площади $MPDd$ и квадрату линии $AZ$. Пусть $PK$, $PH$ и $AZ$ — вышеупомянутые три синуса, а именно: $PK$ — синус расстояния до квадратуры, $PH$ — синус расстояния Луны от узла и $AZ$ — синус расстояния узла от Солнца, тогда скорость узла пропорциональна произведению $PK \cdot PH \cdot AZ$

Но

$$PT : PK = PM : Kk$$

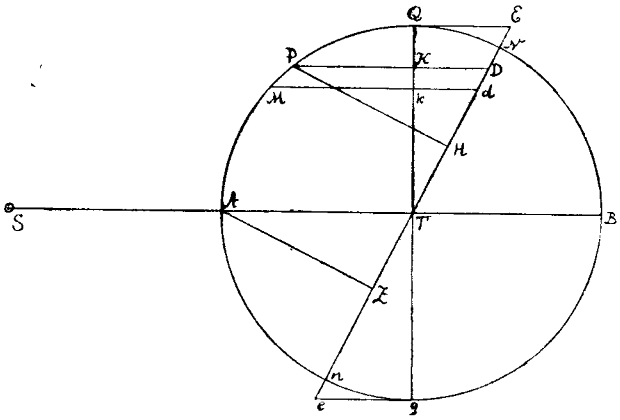
а так как $PT$ и $PM$ постоянны, то $PK$ пропорционально $Kk$.

Вместе с тем

$$AT : PD = LZ : PH$$

поэтому $PH$ пропорционально $PD \cdot AZ$.

По перемножении этих пропорций получим, что $PK \cdot PH$ пропорционально $Kk \cdot PD \cdot AZ$, и $PK \cdot PH \cdot AZ$ пропорционально $Kk \cdot PD \cdot AZ^2$, т. е. пропорционально произведению (площадь $PDMd$) $\cdot AZ^2$.




Фиг. 190.

*Следствие 2.* При каком-либо положении узлов среднее часовое их движение относится к половине часового их движения в сизигиях Луны, т. е. к $16''35'''16^{\mathrm{IV}}36^{\mathrm{V}}$, как квадрат синуса расстояния узлов от сизигий к квадрату радиуса, иначе как $AZ^2 : AT^2$.

Ибо, если Луна обходит равномерным движением полукруг $QAq$, то сумма всех площадок $PDdM$, пока Луна идет от $Q$ до $M$, составит площадь $QMdE$, ограниченную касательною $QE$ к кругу; когда же Луна придет в $n$, эта сумма составит полную площадь $EQAn$, описанную прямою $PD$. Затем, при переходе Луны от $n$ до $q$, линия $PD$ падает вне круга и описывает площадь $rqe$, ограниченную касательною $eq$ к кругу; эту площадь, так как узлы до того перемещались попятно, а теперь попутно, надо вычесть из предыдущей площади, а так как она равна площади $QEN$, то останется площадь полукруга $NQAn$. Следовательно, сумма всех площадок $PDdM$ за время, в продолжение которого Луна описывает полуокружность, есть площадь этого полукруга. Сумма же площадок за время описания всей окружности равна всей площади круга. Когда Луна находится в сизигиях, площадка $PDdM$ равна произведению длины дуги $PM$ на радиус $PT$. Сумма всех таких равных между собою площадок за то время, в которое Луна описывает окружность, составит произведение из полной длины окружности на радиус; так как эта площадь равна удвоенной площади круга, то она вдвое больше предыдущей. Следовательно, узлы, двигаясь равномерно с тою скоростью, которую они имеют в сизигиях Луны, прошли бы путь вдвое больший, нежели они проходят на самом деле, поэтому то среднее движение, двигаясь с которым равномерно они проходили бы то же пространство, как и на самом деле при неравномерном их движении, равно половине того, которое они имеют, когда Луна в сизигиях. Так как наибольшее среднее часовое движение, когда узлы находятся в квадратурах, равно $33''10'''33^{IV}12^{V}$, то среднее часовое движение в рассматриваемом случае будет равно $16''35'''16^{IV}36^{V}$. Но так как часовое движение всегда пропорционально $AZ^2$ и площади $PDdM$ и так как часовое движение узлов в сизигиях Луны пропорционально $AZ^2$ и площади $PDdM$, т. е. $AZ^2$, ибо в сизигиях площадь $PDdM$ постоянна, то и среднее движение будет пропорционально $AZ^2$, так что это движение, когда узлы находятся вне квадратур, будет относиться к $16''35'''16^{IV}36^{V}$, как $AZ^2$ к $AT^2$.

### Предложение XXXI. Задача XII

*Найти часовое движение узлов Луны для эллиптической орбиты.*

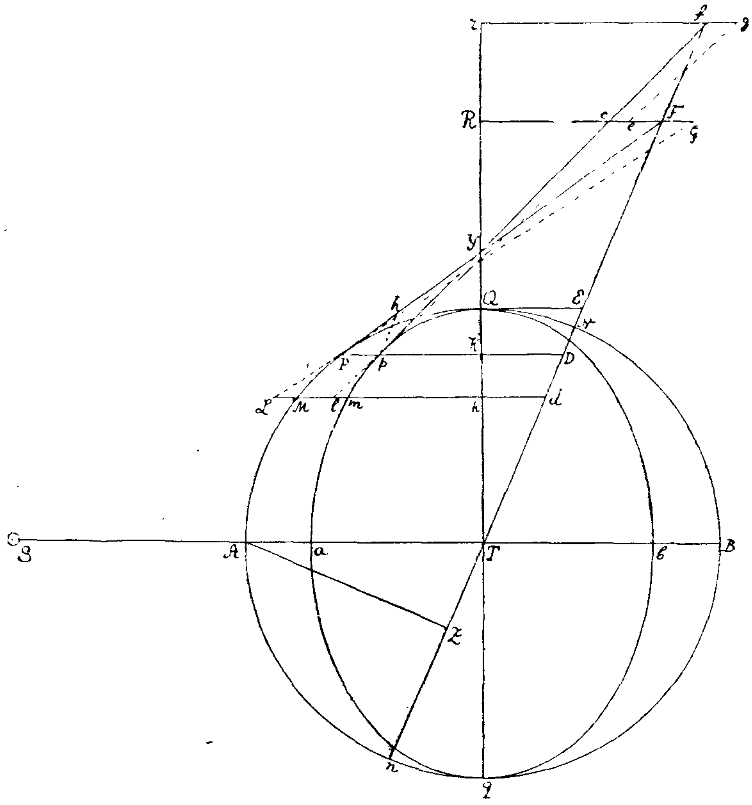
Пусть $Qpamq$ (фиг. 191) представляет эллипс с большою осью $Qq$, малою $ab$; $QAqB$ — описанный круг; $T$ — Землю в центре их обоих; $S$ — Солнце; $p$ — Луну, движущуюся по эллипсу, и $pm$ — дугу, описываемую ею в заданный весьма малый промежуток времени; $N$ и $n$ — узлы, $Nn$ — линию узлов, $pK$ и $mk$ — перпендикуляры, опущенные на ось $Qq$ и продолженные до пересечения с линией узлов в точках $D$ и $d$.

Если Луна описывает радиусом, проведенным к Земле, площади, пропорциональные времени, то часовое движение узла при эллиптической орбите будет пропорционально произведению площади $pDdm$ на $AZ^2$.

Пусть $PF$ касается круга в $P$ и по продолжении пересекает $TN$ в $F$; $pf$ касается эллипса в $p$ и по продолжении пересекает $TN$ в $f$; эти же касательные пересекаются между собою на оси $TQ$ в $Y$; пусть $ML$ представляет пространство, которое Луна, обращаясь по кругу, могла бы пройти поперечным своим движением под действием вышеупомянутой силы $3JT$ или $3PK$ в продолжение времени описания дуги $PM$; пусть $ml$ представляет пространство, которое Луна при своем обращении по эллипсу могла бы пройти под действием той же силы $3JT$ или $3PK$; продолжив $LP$ и $lp$ до их встречи с плоскостью эклиптики в точках $G$ и $g$, проводим $FG$

и $fg$, из коих $FG$ по продолжении пересекает $pf$, $pg$ и $TQ$ соответственно в $c$, $e$ и $R$, прямая же $fg$ пересекает $TQ$ в $r$.

Так как сила $3JT$ или $3PK$ для круга относится к силе $3JT$ или $3pK$ для эллипса, как $PK$ к $pK$ или как $AT$ к $aT$, то и пространства $ML$ и $ml$,



Фиг. 191.

проходимые под действием этих сил, будут в том же отношении $PK$ к $pK$; вследствие подобия фигур $PYKp$ и $FYRc$, это отношение равно отношению $FR$ к $cR$. Итак,

$$ML : ml = PK : pK = FR : cR. \qquad (1)$$

Но, по подобию треугольников $PLM$ и $PGF$,

$$ML : FG = PL : PG$$

по параллельности же прямых $Lk$, $PK$, $GR$ это последнее отношение равно $pl:pe$, которое, в свою очередь, по подобию треугольников $plm$, $cpe$, равно $lm:ce$; итак,

$$ML:FG = lm:ce. \tag{2}$$

Из пропорций (1) и (2) следует

$$FR:cR = FG:ce. \tag{3}$$

Поэтому, если бы имела место пропорция

$$fg:ce = fY:cY = fr:cR \tag{4}$$

то так как

$$fr:cR = \frac{fr}{FR}\cdot\frac{FR}{cR} = \frac{fT}{FT}\cdot\frac{FG}{ce}$$

то было бы

$$fg:FG = fT:FT \tag{5}$$

и значит, тогда углы при Земле $T$, стягиваемые линиями $fg$ и $FG$, были бы между собою равны. Но эти углы (по изложенному в предыдущем предложении) представляют перемещение узлов за то время, пока Луна прошла бы по кругу дугу $PM$ и по эллипсу дугу $pm$, поэтому движение узлов для круга и для эллипса было бы одинаково.

Это происходило бы так, если бы имела место пропорция (4)

$$fg:ce = fY:cY \tag{4}$$

т. е. было бы

$$fg = \frac{ce\cdot fY}{cY}$$

на самом же деле, по подобию треугольников $fgp$ и $cep$,

$$fg:ce = fp:cp$$

т. е.

$$fg = \frac{ce\cdot fp}{cp}$$

значит и угол, стягиваемый на самом деле линией $fg$, относится к углу, стягиваемому линией $FG$, т. е. движение узлов для эллипса относится к их движению для круга, как это истинное значение $fg$ к предыдущему, т. е. как

$$\frac{ce\cdot fp}{cp}:\frac{ce\cdot fY}{cY}$$

что равно

$$\frac{fp\cdot CY}{cp\cdot fY} \text{ или } \frac{fp}{fY}\cdot\frac{cY}{cp}.$$

Пусть прямая $ph$, параллельная $TN$, пересекает $FP$ в $h$, тогда будет

$$\frac{fp}{fY}=\frac{Fh}{FY} \text{ и } \frac{cY}{cp}=\frac{FY}{FP}$$

следовательно

$$\frac{fp}{fY}\cdot\frac{cY}{cp}=\frac{Fh}{FP}=\frac{DP}{Dp}$$

это же последнее отношение равно отношению площади $Dpmd$ к $DPMd$, а так как по следствию 1 предложения XXX площадь $DPMd\cdot AZ^2$ пропорциональна часовому движению узлов для круговой орбиты, то $Dpmd\cdot AZ^2$ пропорционально часовому движению узлов для орбиты эллиптической.

*Следствие.* Поэтому, при данном положении узлов за то время, как Луна переходит от квадратуры до какого-либо положения $m$, сумма всех площадок $pDdm$ составит площадь $mpQed$, ограниченную касательной $QE$ к эллипсу, сумма же всех этих площадок для целого оборота составит полную площадь эллипса; следовательно, среднее движение узлов для эллипса относится к среднему их движению для круга, как площадь эллипса к площади круга, т. е. как $Ta:TA$, иначе как $69:70$. Так как для круга (по след. 2 предл. XXX) среднее часовое движение узлов равно

$$(16''35'''16^{\text{IV}}36^{\text{V}})\cdot\frac{AZ^2}{AT^2}$$

то для эллипса, заметив, что

$$\frac{69}{70}(16''35'''16^{\text{IV}}36^{\text{V}})=16''21'''3^{\text{IV}}30^{\text{V}}$$

оно будет

$$(16''21'''3^{\text{IV}}30^{\text{V}})\cdot\frac{AZ^2}{TA^2}$$

т. е. пропорционально отношению квадрата синуса расстояния узла от Солнца к квадрату радиуса.

Но Луна описывает радиусом, проведенным к Земле, площади быстрее в сизигиях, нежели в квадратурах, поэтому время в сизигиях сокращается, в квадратурах удлиняется; вместе с временем увеличивается и уменьшается движение узлов. Было показано, что секториальная скорость Луны в квадратурах относится к ее секториальной скорости в сизигиях, как $10\,973:11\,073$, поэтому средняя секториальная скорость в октантах относится к ее избытку в сизигиях и недостатку в квадратурах, как полусумма вышеприведенных чисел $11\,023$ к их полуразности $50$. Так как продолжительность описания Луною отдельных равных частиц ее орбиты обратно пропорциональна ее скорости, то средняя продолжительность в октантах относится к избытку ее в квадратурах и к недостатку в сизигиях, происходящих от рассматриваемой причины, приблизительно, как 11 023 к 50. Прослеживая затем эту изменяемость от квадратур до сизигий, я нашел, что избыток секториальной скорости в отдельных местах над наименьшим ее значением в квадратурах приблизительно пропорционален квадрату синуса расстояния Луны до квадратуры, поэтому разность между секториальной скоростью в каком-либо месте и среднею ее величиною в октантах пропорциональна разности между квадратом синуса расстояния Луны до квадратуры и $\sin^2 45°$, т. е. $\frac{1}{2}$. В таком же отношении находятся приращения продолжительности для отдельных мест между октантами и квадратурами и ее уменьшение между октантами и сизигиями. Перемещение же узлов в продолжение того времени, пока Луна описывает каждую отдельную равную частицу своей орбиты, увеличивается или уменьшается пропорционально квадрату этого времени, ибо это перемещение за то время, пока Луна проходит частицу $PM$ своей орбиты (при прочих одинаковых условиях), пропорционально $ML$, величина же $ML$ пропорциональна квадрату времени. Вследствие этого перемещение узлов в сизигиях в продолжение того промежутка времени, в который Луна описывает постоянной длины частицы своей орбиты, уменьшается в отношении $\left(\frac{11023}{11073}\right)^2$, и следовательно, величина уменьшения относится к остающемуся движению, приблизительно, как 100 к 10 973, к полному же движению — как 100 к 11 073. Уменьшение же в местах, промежуточных между октантами и сизигиями, и увеличение в местах между октантами и квадратурами находятся к вышенайденному уменьшению в отношении, равном произведению отношения полного движения в этих местах к полному движению в сизигиях на отношение разности между квадратом синуса расстояния Луны до квадратуры и половиною квадрата радиуса к половине квадрата радиуса. Поэтому, когда узлы находятся в квадратурах, то если взять два места, равноотстоящих от октанта в ту и другую сторону, и два других, отстоящих на столько же одно от сизигия, другое от квадратуры, и затем из уменьшений движений для двух мест, лежащих между сизигием и октантом, вычесть приращения движений для остальных двух мест, лежащих между октантом и квадратурой, то оставшееся уменьшение будет равно уменьшению движения в сизигии, как то легко устанавливается, сделав вычисление. Вследствие этого средняя величина уменьшения, которое надо вычитать из среднего движения узлов, равно одной четверти уменьшения в сизигиях. Полная величина часового движения узлов, когда Луна, находясь в сизигиях, предполагается описывающей радиусом, проведенным к Земле, площади равномерно, была найдена в $32''42'''7^{IV}$, уменьшение же движения узлов вследствие того, что в это время Луна проходит одинаковый путь скорее, составляет от этого движения $\frac{100}{11073}$, т. е. это уменьшение равно $17'''43^{IV}11^{V}$; вычтя четвертую часть этой величины, т. е. $4'''25^{IV}48^{V}$, из найденного выше среднего часового движения узлов $16''21'''3^{IV}30^{V}$, получим в остатке $16''16'''37^{IV}42^{V}$, представляющих исправленное среднее часовое движение.

Если взять, когда узлы находятся вне квадратур, два места, равноотстоящих в обе стороны от сизигий, то сумма движений узлов, при нахождении Луны в этих местах, относится к сумме движений, когда Луна находится в этих же местах, а узлы в квадратурах, как $AZ^2 : AT^2$. Уменьшения движений, происходящие от изложенных причин, будут пропорциональны самим движениям, поэтому и остающиеся движения будут относиться, как $AZ^2 : AT^2$, и средние движения будут относиться, как остающиеся.

Таким образом исправленное среднее часовое движение при каком-либо заданном положении узлов относится к $16''16'''37^{IV}42^{V}$, как $AZ^2 : AT^2$, т. е. как квадрат синуса расстояния узлов от сизигия к квадрату радиуса.

### Предложение XXXII. Задача XIII

*Найти среднее движение узлов Луны.*

Среднее годовое движение есть сумма всех средних часовых движений за год. Вообрази, что узел находится в $N$ и по прошествии каждого часа возвращается в свое первоначальное место так, чтобы, несмотря на свое движение, сохранять постоянное положение по отношению к неподвижным звездам. В это же время, вследствие движения Земли, Солнце будет удаляться от узла, совершая равномерно свой видимый годовой оборот.

Пусть $Aa$ (фиг. 192) есть какая-либо заданная весьма малая дуга, описываемая в весьма малый задавный промежуток времени точкою пересечения, проводимой к Солнцу прямой $TS$ с кругом $NAn$. Среднее часовое движение по уже доказанному пропорционально $AZ^2$, т. е. (по пропорциональности $AZ$ и $ZY$) прямоугольничку $AZ \cdot ZY$, иначе — площади $AZYa$. Сумма всех средних часовых движений от начала будет пропорциональна сумме всех площадок $aYZA$, т. е. площади $NAZ$.

Наибольшая величина площадки $aYZA$ равна произведению дуги $Aa$ на радиус, поэтому сумма всех площадок для всего круга относится к сумме такового же числа таких наибольших площадок, как площадь круга к площади прямоугольника, построенного на длине окружности и радиусе, иначе как $1:2$. Но часовое движение, соответствующее наибольшей площадке, равно $16''16'''37^{\mathrm{IV}}42^{\mathrm{V}}$; за звездный год, т. е. за 365 дней 6 часов 9 минут, полное движение составит $39°38'7''50'''$; половина этого, т. е. $19°49'3''55'''$, и составляет среднее движение узлов, соответствующее полному кругу. Движение же узлов за время, пока Солнце переходит от $N$ до $A$, относится к $19°40'3''55'''$, как площадь $NAZ$ к площади всего круга.

Так это происходит при предположении, что узел по прошествии каждого часа возвращается к своему первоначальному месту, так что Солнце по прошествии полного года возвращается к тому же узлу, из которого оно вышло в начале. На самом же деле, вследствие движения узла, Солнце возвращается к узлу ранее, поэтому надо вычислить сокращение времени. Так как Солнце в продолжение целого года проходит 360°, узел же, двигаясь с наибольшею скоростью, прошел бы за это время $39°38'7''50'''$ или 39.6355 и среднее движение узла в каком-либо его месте $N$ относится к его движению, когда он в квадратурах, как $AZ^2:AT^2$, то движение Солнца будет относиться к движению узла в $N$, как

$$360AT^2:39.6355AZ^2,$$

т. е. как

$$9.082\,764\,6AT^2:AZ^2.$$

Следовательно, если полную окружность круга $NAn$ разделить на равные части $Aa$, то время, в продолжение которого Солнце проходит путь $Aa$ на покоящемся круге, относится к времени, в продолжение которого оно проходит этот путь на круге, вращающемся вокруг центра вместе с узлами, как

$$(9.082\,764\,6AT^2+AZ^2):9.082\,764\,6AT^2,$$

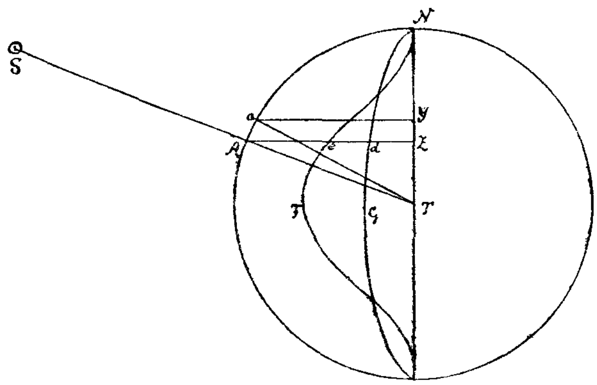
ибо это время обратно пропорционально скорости, с которою путь проходится, скорость же эта равна сумме скоростей Солнца и узла. Представим сектором $NTA$ время, в продолжение которого Солнце без движения узла прошло бы дугу $AN$, и весьма малый промежуток времени, в продолжение которого Солнце прошло бы дугу $Aa$, — весьма малым сектором $ATa$; опустим на $Nn$ перпендикуляр $aY$; на $AZ$ возьмем такую длину $Zd$, чтобы площадь прямоугольника $Zd \cdot ZY$ относилась к площади сектора $ATa$, как

$$AZ^2:(9.082\,764\,6AT^2+AZ^2)$$

т. е. чтобы было

$$Zd:\frac{1}{2}AZ=AT^2:(9.0827646AT^2+AZ^2)$$

тогда прямоугольник $Zd \cdot ZY$ представит уменьшение времени описания дуги $Aa$, происходящее от движения узла.



Фиг. 192.

Если точка $d$ лежит постоянно на кривой $NaGn$, то криволинейная площадь $NdZ$ будет представлять уменьшение времени описания полной дуги $NA$, поэтому избыток площади сектора $NAT$ над площадью $NdZ$ представит полное время описания дуги $NA$.

Так как движение узла пропорционально времени, то и площадь $AaYZ$ должна быть уменьшена в том же отношении, как и время, что будет выполнено, если на $AZ$ взять длину $eZ$ так, чтобы было

$$eZ:AZ=AZ^2:(9.0827646AT^2+AZ^2),$$

тогда прямоугольник $eZ \cdot ZY$ будет относиться к площади $AZYa$, как уменьшение времени описания дуги $Aa$ к полному времени, в которое эта дуга была бы описана, если бы узел был в покое, поэтому этот прямоугольник будет соответствовать уменьшению движения узла. Если точка $e$ лежит постоянно на кривой $NeFn$, то полная площадь $NeZ$, равная сумме всех уменьшений, будет соответствовать полному уменьшению за время описания дуги $AN$, остающаяся же площадь $NAe$ будет соответствовать остающемуся движению, которое и есть истинное движение узла за то время, когда дуга $NA$ описывается совместным движением Солнца и узла. Площадь фигуры $NeFn$ определяется по способу бесконечных рядов и относится к площади полукруга приблизительно, как 60 к 793. Движение же, соответствующее полному кругу, равнялось $19°49'3''55'''$, поэтому движение, соответствующее удвоенной площади $NeFn$, равно $1°29'58''2'''$; по вычитании этой величины из предыдущей остается $18°19'5''53'''$, представляющих перемещение узла по отношению к неподвижным звездам за время от одного соединения узла с Солнцем до следующего. По вычете этого перемещения из полного годового перемещения Солнца в 360°, останется $341°40'54''7'''$, представляющих движение Солнца за время между этими двумя соединениями. Это же перемещение относится к годовому 360°, как выше найденное перемещение узла $18°19'5''53'''$ к его годовому перемещению, которое поэтому окажется равным $19°18'1''23'''$. Таково среднее движение узлов в один звездный год. По астрономическим таблицам оно равно $19°21'21''50'''$. Разность меньше $\frac{1}{300}$ полного движения и происходит, как оказывается, от эксцентриситета лунной орбиты и от наклонности ее к плоскости эклиптики. Вследствие эксцентриситета орбиты движение узлов немного ускоряется, вследствие же наклонности несколько замедляется и приводится к истинной скорости.

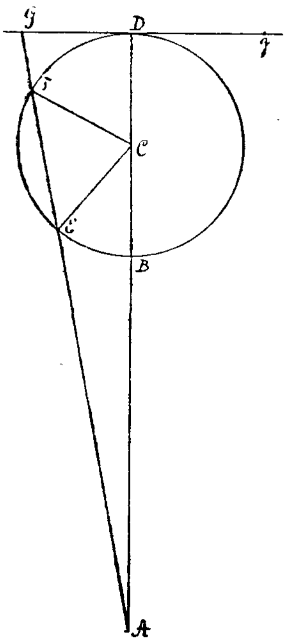
### Предложение XXXIII. Задача XIV

*Найти истинное движение узлов Луны.*

В продолжение времени, пропорционального площади $NTA - NdZ$ (предл. XXXII), это движение пропорционально площади $NAe$ и, следовательно, находится. Вследствие трудности вычисления, предпочтительнее применить следующее построение для этой задачи.

Из центра $C$ (фиг. 193) каким-либо радиусом $CD$ описывается круг $BEFD$. Прямая $DC$ продолжается до $A$ так, чтобы отношение $AB:AC$ равнялось отношению среднего движения к половине средней величины истинного движения, когда узлы в квадратурах, т. е. в отношении $19°18'1''23'''$ к $19°49'3''55'''$, так что отношение $BC$ к $AC$ равно отношению разности движений $0°31'2''32'''$ к последнему из них, т. е. $19°49'3''55'''$, иначе $1:38.3$.

Затем через точку $D$ проводится неопределенно продолженная прямая $gG$, касающаяся круга в точке $D$; строится угол $BCE$ или $BDF$, равный удвоенному расстоянию Солнца от места узла, находимого по среднему его движению, и проводится прямая $AE$ или $AF$, пересекающая перпендикуляр $DG$ в $G$. Взяв угол, который относится к полному движению узлов между их сизигиями (т. е. к 9°11′3″), как длина касательной $DG$ к окружности круга $BED$ (за этот угол можно принять и угол $DAG$), следует придавать его к среднему движению узлов, когда узлы переходят от квадратур к сизигиям, и вычитать из этого среднего движения, когда узлы переходят от сизигиев к квадратурам; тогда и получится истинное движение узлов. Ибо получаемое таким образом движение приблизительно совпадает с истинным, которое получается, если представить время площадью $NTA - NdZ$ и движение узла площадью $NAe$, как то установлено тщательным исследованием и вычислением. Это есть полугодичное уравнение движения узлов. Есть еще и месячное уравнение, но оно совершенно не нужно для нахождения широты Луны, ибо изменение наклонности лунной орбиты к плоскости эклиптики подвержено двоякому неравенству — полугодичному и месячному; это месячное неравенство и месячное неравенство узлов так умеряют и исправляют друг друга, что при определении широты Луны ими обоими можно пренебречь.



Фиг. 193.

*Следствие.* Из этого и предыдущего предложения вытекает, что узлы в своих сизигиях находятся в покое, в квадратурах же движутся попятно с часовым движением $16''19'''26^{\mathrm{IV}}$ и что уравнение движения узлов в октантах равно 1°30′. Все это вполне согласуется с небесными явлениями.

## *ПОУЧЕНИЕ*

Движение узлов нашли также другим способом *И. Мэхин*, проф. астрономии в Гресгаме, и *Генри Пембертон*, д-р медицины, независимо друг от друга. О их способе упоминается также в другом месте. Записки их, мною рассмотренные, содержат каждая по два предложения, одинаковых в них обеих, но так как записка г. *Мэхина* была мною получена ранее, то я ее здесь и помещаю.

## О ДВИЖЕНИИ УЗЛОВ ЛУНЫ

### Предложение I

*Среднее движение Солнца от узла определяется геометрическим средним, пропорциональным между средним движением самого Солнца и тем его средним движением, с которым Солнце быстрее всего отходит от узла в квадратурах.*

Пусть $T$ (фиг. 194) есть место Земли, $Nn$ — линия узлов Луны в какое-либо данное время, $KTM$—перпендикуляр к ней, $TA$— прямая, вращающаяся вокруг центра с такою угловою скоростью, с какою Солнце и узел расходятся друг от друга, так что угол между неподвижною прямою $Nn$ и вращающеюся $TA$ всегда равен расстоянию между местом Солнца и узла. Если какую-либо прямую $TK$ подразделить на части $TS$ и $SK$, относящиеся одна к другой, как среднее часовое движение Солнца к среднему часовому движению узла в квадратурах, и взять прямую $TH$ так, чтобы было

$$TS : TH = TH : TK,$$

то эта прямая будет пропорциональна среднему движению Солнца от узла.

Опишем круг $NKnM$ центром $T$ и радиусом $TK$, и на осях $TH$ и $TN$ при том же центре опишем эллипс $NHnL$; тогда, если провести прямую $Tba$, площадь сектора $NTa$ представит сумму движений узла и Солнца за то время, в продолжение которого Солнце отходит от узла на дугу $Na$ Пусть $aA$ есть весьма малая дуга, описываемая в продолжение заданного весьма малого промежутка времени прямою $Tba$ при ее равномерном вращении по вышеуказанному закону, тогда площадь сектора $TAa$ будет пропорциональна сумме скоростей, с которыми переносятся Солнце и узел. Скорость Солнца почти равномерна, так что ее малые неравенства едва ли могут произвести какое-либо изменение в среднем движении узлов. Вторая же часть этой суммы, именно скорость узла по среднему своему значению, увеличивается при удалении от сизигий пропорционально квадрату синуса расстояния узла от Солнца (по след. предл. XXXI), и так как эта средняя скорость наибольшая в квадратурах $K$, то она находится в том же отношении к скорости Солнца, как $SK$ к $ST$ или как $(TK^2 — TH^2) : TH^2$, или как $KH \cdot MH : TH^2$. Эллипс $NBH$ подразделяет площадь сектора $ATa$, представляющую сумму этих двух скоростей, на две части $ABba$ и $TBb$, пропорциональные самим скоростям.

В самом деле, продолжим $BT$ до пересечения с кругом в точке $\beta$ и опустим из точки $B$ перпендикуляр $BG$ на большую ось и продолжаем его в обе стороны до пересечения с кругом в точках $F$ и $f$. Площадь $ABba$ относится к площади сектора $TBb$, как $AB \cdot B\beta$ к $BT^2$ (ибо произведение $AB \cdot B\beta = TA^2 - TB^2$, так как точка $T$ есть середина прямой $A\beta$); это отношение там, где площадь $ABba$ — наибольшая, т. е. в $K$, будет равно отношению $KH \cdot HM : HT^2$.

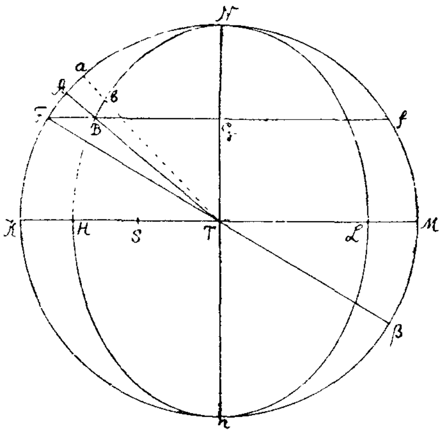
Но и наибольшая средняя скорость узла находилась в таком же отношении к скорости Солнца, значит в квадратурах сектор $ATa$ разделяется на части, пропорциональные скоростям. Но так как

$$KH \cdot HM : HT^2 = FB \cdot Bf : BG^2$$

и

$$AB \cdot B\beta = FB \cdot Bf,$$

то отношение площадки $ABba$ там, где она наибольшая, к остающейся площади сектора $TBb$ равно $AB \cdot B\beta : BG^2$. Но отношение этих площадок, как указано выше, равно $AB \cdot B\beta : BT^2$, поэтому площадка $ABba$ в месте $A$ относится к ее величине в квадратурах, как $BG^2 : BT^2$, т. е. она пропорциональна квадрату синуса расстояния Солнца от узла. Поэтому сумма всех площадок $ABba$, т. е. площадь $ABN$, будет пропорциональна движению узла в то время, в которое Солнце отошло от узла на дугу $NA$. Остающаяся площадь, т. е. площадь эллиптического сектора $NTB$, будет пропорциональна среднему движению Солнца за то же время. Так как среднее годовое движение узла есть то его среднее движение, которое происходит за время полного оборота Солнца, то среднее движение узла от Солнца относится к среднему движению самого Солнца, как площадь круга к площади эллипса, т. е. как $TK : TH$, т. е. к средней пропорциональной между $TK$ и $TS$, или, что то же, как $TH : TS$.



Фиг. 194.

### Предложение II

*Зная среднее движение узлов Луны, найти истинное их движение.*

Пусть угол $A$ есть расстояние Солнца от среднего места узла, иначе — среднее движение Солнца от узла. Возьмем угол $B$ так, чтобы было

$$\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} A = TH : TK$$

т. е. чтобы отношение этих тангенсов было равно корню квадратному из отношения среднего часового движения Солнца к среднему часовому движению Солнца от узла, когда узел в квадратурах. Найденный таким образом угол $B$ будет равен расстоянию Солнца от истинного места узла. Ибо, проведя $FT$, видно, на основании доказательства предыдущего предложения, что угол $FTN$ есть расстояние Солнца от среднего места узла, угол же $ATN$ есть его расстояние от истинного места, тангенсы же этих узлов относятся между собою, как $TK:TH$.

*Следствие.* Таким образом угол $FTA$ есть уравнение узлов Луны; синус этого угла, при наибольшей его величине в октантах, относится к радиусу, как $KH:(TK+HT)$. Синус же этого уравнения в каком-либо ином месте относится к наибольшему синусу, как синус суммы углов $FTN+ATN$ к радиусу, т. е. приблизительно как синус удвоенного расстояния Солнца от среднего места узла, т. е. угла $2FTN$ к радиусу.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Если принять среднее часовое движение узлов в квадратурах равным $16''16'''37^{IV}42^{V}$, т. е. в звездный год $39°38'7''50'''$, то отношение $TH$ к $TK$ будет равно $\sqrt{9.0827646}$ к $\sqrt{10.0827646}$ или $18.6524761:19.6524761$, поэтому $TH$ относится к $TK$, как $18.6524761$ к $1$, т. е. как движение Солнца в звездный год к среднему движению узла $19°18'1''23'''40^{IV}$.

Если же принять среднее движение узлов Луны в 20 юлианских лет равным $386°50'15''$, каковым оно выводится в теории Луны из наблюдений, то среднее движение узлов в звездный год составит $19°20'31''58'''$, и тогда будет

$$TH:TK=360°:19°20'31''58'''=18.61214:1.$$

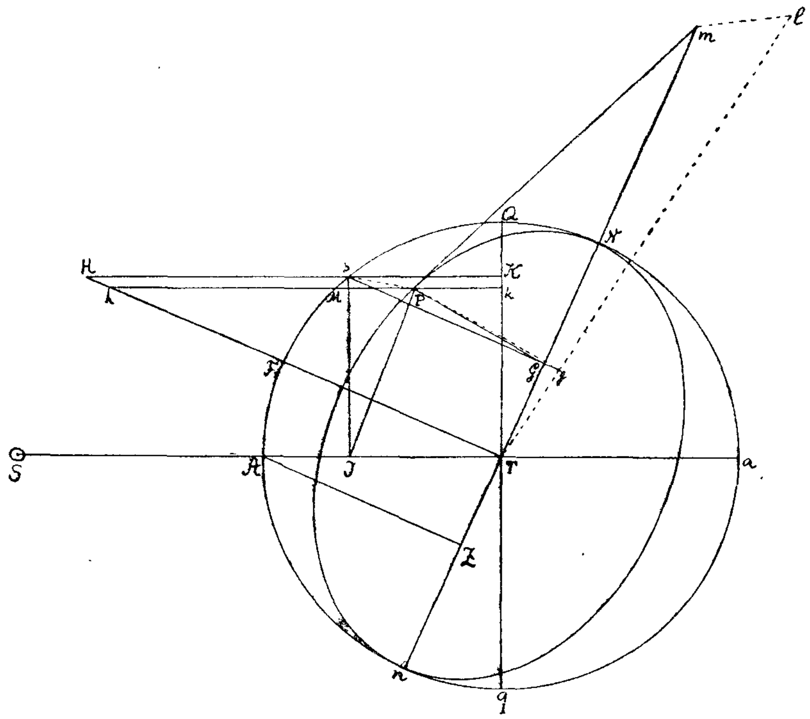
Откуда среднее часовое движение узлов в квадратурах оказывается равным $16''18'''48^{IV}$ и наибольшее уравнение узлов в октантах равным $1°29'57''$.

### Предложение XXXIV. Задача XV

*Найти часовое изменение наклонности лунной орбиты к плоскости эклиптики.*

Пусть $A$ и $a$ представляют сизигии, $Q$ и $q$ — квадратуры, $N$ и $n$ — узлы, $P$ — место Луны на ее орбите, $p$ — проекцию этого места на плоскости эклиптики, $mTl$ — перемещение узлов в весьма малый промежуток времени, как и выше (фиг. 195).

Если на линию $Tm$ опустить перпендикуляр $PG$ и провести $pG$, и продолжить эту прямую до пересечения с прямою $Tl$ в $g$, и затем соединить $Pg$, то угол $PGp$ представит наклонение лунной орбиты к плоскости эклиптики, когда Луна находится в $P$, и угол $Pgp$ — наклонение ее по прошествии



Фиг. 195.

указанного промежутка времени, следовательно угол $GPg$ есть изменение наклонности в продолжение этого промежутка. Но отношение углов

$$GPg : GTg = TG \cdot Pp : PG^2$$

поэтому, если за упомянутый промежуток будет принят один час, то так как по предложению XXX угол

$$GTg = 33''10'''33^{\text{IV}} \cdot \frac{JT \cdot PG \cdot AZ}{AT^3}$$

то угол $GPg$ (т. е. часовое изменение наклонности) будет

$$GPg = 33''10'''33^{\text{IV}} \cdot \frac{JT \cdot AZ \cdot TG}{AT^3} \cdot \frac{Pp}{PG}.$$

Так это будет при предположении, что Луна обращается равномерно по круговой орбите, когда же орбита эллиптическая, то среднее движение узлов уменьшается в отношении малой оси к большой, как это изложено выше. В таком же отношении уменьшается и изменение наклонности.[193]

*Следствие 1.* К $Nn$ восставляется перпендикуляр $TF$; пусть $pM$ есть часовое перемещение Луны в плоскости эклиптики, и пусть перпендикуляры $pK$, $Mn$, опущенные на $QT$ и продолженные в обе стороны, пересекают $TF$ в $H$ и $h$; тогда будет:

$$JT : AT = Kk : Mp$$
$$TG : Hp = TZ : AT.$$

Значит,

$$JT \cdot TG = \frac{Kk \cdot Hp \cdot TZ}{Mp} = (\text{площ. } HpMh) \cdot \frac{TZ}{Mp},$$

поэтому часовое изменение наклонности равно

$$33''10'''33^{\mathrm{IV}} \cdot \text{площ. } HpMh \cdot AZ \cdot \frac{TZ}{Mp} \cdot \frac{Pp}{PG} \cdot \frac{1}{AT^3}.$$

*Следствие 2.* Поэтому, если вообразить, что по прошествии каждого часа Земля и узлы мгновенно переносятся из новых своих мест в первоначальные для того, чтобы их положение в продолжение целого месяца оставалось постоянным, тогда полное изменение наклонности в продолжение месяца получится, если в предыдущей формуле вместо площадки $HpMh$ написать алгебраическую сумму всех таких площадок, образующихся при движении точки $p$, взятых с принадлежащими им знаками $+$ и $-$.

Но эта сумма равна площади круга $QAqa$, следовательно будет

$$\text{мес. изм. накл.} = 33''10'''33^{\mathrm{IV}} \cdot \text{площ. } QAqa \cdot \frac{AZ \cdot TZ}{AT^3 \cdot Mp} \cdot \frac{Pp}{PG} =$$
$$= 33''10'''33^{\mathrm{IV}} \cdot \text{окружн. } QAqa \cdot \frac{AZ \cdot TZ}{2AT^2 \cdot Mp} \cdot \frac{Pp}{PG}.$$

*Следствие 3.* На основании этого, при заданном положении узлов среднее часовое изменение наклонности, из которого, принимая его постоянным, получилось бы выше приведенное месячное, будет

$$\text{ср. час. изм. накл.} = 33''10'''33^{\mathrm{IV}} \cdot \frac{AZ}{2AT} \cdot \frac{TZ}{AT} \cdot \frac{Pp}{PG}.$$

---

193 При изложении этого предложения и его следствий, во избежание длинноты описания формул словами, им придано принятое теперешнее начертание, отступив от буквального перевода текста.

Но

$$\frac{AZ}{AT} = \sin ATn; \quad \frac{TZ}{AT} = \cos ATn; \quad \frac{Pp}{PG} = \sin \text{(наклонности)}.$$

Значит будет

$$\text{ср. час. изм. накл.} = \frac{1}{4} \cdot 33''10'''33^{\text{IV}} \cdot \sin 2ATn \cdot \sin \text{(наклонности)}.$$

*Следствие 4.* Так как отношение часового изменения наклонности, на основании этого предложения, к $33''10'''33^{\text{IV}}$ вообще равно

$$\frac{JT \cdot AZ \cdot TG}{AT^3} \cdot \frac{Pp}{PG}$$

и, когда узлы в квадратурах, $AZ = AT$, кроме того

$$\frac{JT}{AT} = \sin ATp; \quad \frac{TG}{AT} = \cos ATp; \quad \frac{Pp}{PG} = \sin \text{(накл.)},$$

то для положения узлов в квадратурах отношение часового изменения наклонности, разделенного на синус ее, к $33''10'''33^{\text{IV}}$ будет равно отношению $\sin 2ATp$ к 2, т. е. отношению синуса удвоенного расстояния Луны до квадратуры к диаметру. Следовательно, сумма всех таких разделенных на синус наклонности часовых изменений за то время, пока при данном положении узлов Луна переходит от квадратуры к сизигию (т. е. в продолжение $177\frac{1}{6}$ часа) будет относиться к сумме такового же числа углов $33''10'''33^{\text{IV}}$, т. е. к $5878''$, как сумма всех синусов удвоенных расстояний Луны до квадратур к сумме такового же числа диаметров, т. е. как диаметр к окружности. Поэтому, если принять наклонность в $5°1'$, то будет

$$\sin 5°1' = 0.0874 \quad \text{и} \quad \frac{7}{22} \cdot 0.0874 = 0.0278$$

следовательно полное изменение наклонности, образующееся из часовых ее изменений в продолжение указанного времени, составит $163''$ или $2'43''$.

### Предложение XXXV. Задача XVI

*Найти, каково наклонение орбиты Луны к плоскости эклиптики в заданное время.*

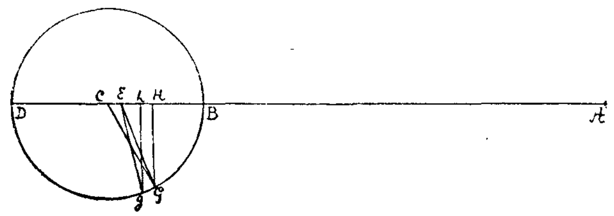
Пусть $AD$ есть синус наибольшей наклонности и $AB$—синус наименьшей. Разделив $BD$ в точке $C$ пополам, точкою $C$, как центром, и радиусом $BC$ описывается круг $BGD$. На $AC$ (фиг. 196) берется $CE$ так, чтобы было

$$CE:EB = EB:2AB;$$

если по заданному времени построить угол $AEG$, равный удвоенному расстоянию узлов до квадратур, и на $AD$ опустить перпендикуляр $GH$, то $AH$ будет синус искомой наклонности.

Ибо имеем

$$GE^2 = GH^2 + HE^2 = BH \cdot HD + HE^2 = HB \cdot BD + HE^2 - BH^2 =$$
$$= HB \cdot BD + BE^2 - 2BH \cdot BE = BE^2 + 2EC \cdot BH =$$
$$= 2EC \cdot AB + 2EC \cdot BH = 2EC \cdot AH$$




Фиг. 196.

следовательно $GE^2$ пропорционально $AH$, так как $2EC$ постоянно. Пусть $AEg$ представляет удвоенное расстояние узлов до квадратур после того, как время получило некоторое весьма малое приращение; угол $GEg$ — постоянный, поэтому дуга $Gg$ будет пропорциональна расстоянию $GE$. Но

$$Hh:Gg = GH:GC.$$

Значит, $Hh$ пропорционально $GH \cdot Gg$ или $GH \cdot GE$, т. е. и $\frac{GH}{GE} \cdot GE^2$ или $\frac{GH}{GE} \cdot AH$, или $AH \cdot \sin AEG$.

Таким образом, если в каком-либо случае длина $AH$ была бы синусом наклонности, то ее приращения были бы всегда такие же, как и синуса наклонности (по след. 3 предл. XXXIV), следовательно эта длина будет постоянно оставаться равной этому синусу. Но длина $AH$, когда точка $G$ падает в $B$ или $D$, равна сказанному синусу, следовательно она ему постоянно равна. При этом доказательстве предположено, что угол $BEG$, равный удвоенному расстоянию узлов до квадратур, возрастает равномерно, ибо здесь не место изъяснять мелочные подробности всех неравенств.

Вообрази, что угол $BEG$ — прямой; в таком случае $Gg$ будет представлять часовое приращение удвоенного расстояния между Солнцем и узлами; часовое изменение наклонности в этом случае (по след. 3 предл. XXXIV) относится к $33''10'''33^{IV}$, как произведение $\frac{AH \cdot \sin BEG}{4}$ относится к радиусу, т. е. как $\frac{1}{4}\,AH$ к радиусу, ибо угол $BEG$ — прямой.

А так как отношение $AH$ к радиусу равно синусу угла средней наклонности, т. е. $\sin 5°8'\frac{1}{2}$, то его четверть равна 0.0224. Полное же изменение наклонности, соответствующее разности $BD$ синусов, относится к вышенайденному часовому, как диаметр $BD$ к дуге $Gg$, это же отношение равно произведению отношений диаметра $BD$ к полуокружности $BGD$ и времени 2079.7 часа, в продолжение коих узел переходит от квадратур к сизигиям, к одному часу, т. е. оно равно $\frac{7}{11} \cdot \frac{2079.7}{1}$. Поэтому, перемножив все эти отношения, получим, что отношение полного изменения наклонности $BD$ к $33''10'''33^{IV}$ равно

$$0.0224 \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{2079.7}{1} = 29.645$$

и следовательно, сказанное изменение $BD$ составит $16'23''30'''$.

Таково наибольшее изменение наклонности, если не рассматривать места, занимаемого Луною на ее орбите; наклонность, когда узлы находятся в сизигиях, не изменяется при переменах положения Луны. Когда же узлы находятся в квадратурах, наклонность меньше на $2'43''$ при положении самой Луны в сизигиях, нежели когда она в квадратурах, как это показано в следствии 4 предыдущего предложения.

Вычитая полонину этой величины, т. е. $1'21''30'''$, из среднего значения изменения наклонности $16'23''30'''$, получим его среднее значение для положения Луны в квадратурах равным $15'2''$, и придавая — получим для сизигий Луны $17'45''$. Следовательно, если Луна находится в сизигиях, то полное изменение наклонности при переходе узлов от квадратур до сизигиев равно $17'45''$; таким образом, если наклонность, когда узлы в сизигиях, равна $5°17'20''$, то когда узлы в квадратурах, Луна же в своем сизигии, наклонность будет $4°59'35''$.

Наблюдениями подтверждается, что все происходит именно так.

*ПОУЧЕНИЕ*

Этими расчетами движений Луны я хотел показать, что на основании теории тяготения движения Луны могут быть вычислены по причинам, их производящим.

Помощью этой же теории я, кроме того, нашел, что годовое уравнение среднего движения Луны происходит от различного растяжения орбиты Луны силою Солнца по следствию 6 предложения LXVI книги I. Эта сила, когда Солнце в перигее, больше и растягивает орбиту Луны; в апогее, где эта сила меньше, она позволяет орбите сжиматься. По растянутой орбите Луна обращается медленнее, по сжатой — быстрее, и годовое уравнение, которым это неравенство выравнивается, равно нулю в апогее и в перигее Солнца; в среднем расстоянии Солнца от Земли оно достигает приблизительно $11'50''$, в других — местах пропорционально уравнению центра для Солнца; это уравнение придается к среднему движению Луны, когда Земля переходит от своего афелия к перигелию, для противоположной же части орбиты — вычитается. Принимая радиус земной орбиты за 1000 и эксцентриситет ее $16\frac{7}{8}$, получим для наибольшей величины этого уравнения по теории тяготения $11'49''$. Но, кажется, эксцентриситет земной орбиты несколько более, при увеличении же эксцентриситета увеличивается пропорционально ему и величина уравнения; так, при эксцентриситете $16\frac{11}{12}$ наибольшее уравнение будет $11'51''$.

Я нашел также, что в перигелии Земли, вследствие большей силы Солнца, апогей и узлы Луны движутся быстрее, нежели в ее афелии, и притом в обратном отношении кубов расстояний Земли до Солнца; от этого происходят годовые уравнения этих движений, пропорциональные уравнению центра Солнца. Движение Солнца обратно пропорционально квадрату расстояния Земли до Солнца, и наибольшее уравнение центра, которое от этого происходит, равно $1°56'20''$ при вышеуказанной величине эксцентриситета земной орбиты в $16\frac{11}{12}$. Если бы движение Солнца было обратно пропорционально кубу расстояния, это неравенство произвело бы наибольшее уравнение в $2°54'50''$, поэтому наибольшие уравнения, которые происходят от неравенства движений апогея и узлов Луны, относятся к $2°54'50''$, как среднее суточное движение апогея и среднее суточное движение узлов Луны к среднему суточному движению Солнца. Происходящее, вследствие этой причины, наибольшее уравнение среднего движения апогея равно $19'43''$, и наибольшее уравнение среднего движения узлов равно $9'24''$

Первое уравнение придается, второе вычитается, когда Земля переходит от своего перигелия к афелию; обратное имеет место для противоположной части орбиты.

По теории тяготения устанавливается также, что действие Солнца на Луну немного более, когда поперечный диаметр лунной орбиты проходит через Солнце, нежели когда он находится под прямым углом к линии, соединяющей Землю и Солнце; поэтому лунная орбита в первом случае немного более, нежели во втором. Отсюда происходит уравнение среднего движения Луны, зависящее от положения апогея Луны относительно Солнца: это уравнение наибольшее, когда апогей расположен в октантах от Солнца, и равно нулю, когда апогей приходит в квадратуры или сизигии; оно придается к среднему движению при переходе апогея Луны от квадратуры с Солнцем к сизигию и вычитается при переходе апогея от сизигия к квадратуре. Это уравнение, которое я называю полугодичным, в октантах апогея, где оно наибольшее, достигает кругло $3'45''$, насколько я мог вывести по явлениям. Таково его значение при среднем расстоянии Солнца от Земли. Оно увеличивается или уменьшается в обратном отношении кубов расстояний от Солнца до Земли, поэтому при наибольшем расстоянии оно приблизительно равно $3'34''$, при наименьшем — равно $3'56''$; когда же положение апогея Луны вне октанта, оно становится меньше и относится к наибольшему своему значению, как синус удвоенного расстояния апогея Луны от ближайшего сизигия или ближайшей квадратуры относится к радиусу.

По той же теории тяготения действие Солнца на Луну немного более, когда прямая линия, проведенная через узлы Луны, проходит через Солнце, нежели когда эта линия составляет прямой угол с прямою, соединяющей Солнце с Землею. Отсюда происходит еще одно уравнение среднего движения Луны, которое я называю вторым полугодичным; оно наибольшее, когда узлы располагаются в октантах относительно Солнца, и обращается в нуль, когда они в сизигиях или в квадратурах, при других же положениях узлов оно пропорционально синусу удвоенного расстояния того или другого узла от ближайшей квадратуры или сизигия. Оно прилагается к среднему движению Луны, если Солнце расположено позади ближайшего к нему узла, вычитается, если Солнце впереди, и в октантах, где оно наибольшее, достигает $47''$ при среднем расстоянии Солнца до Земли, как я вывел из теории тяготения. При других расстояниях Солнца это наибольшее в октантах узлов уравнение обратно пропорционально кубу расстояния Солнца до Земли и, следовательно, составляет кругло $49''$, когда Солнце в перигее, и $45''$, когда оно в апогее.

По той же теории тяготения апогей Луны обладает прямым движением с наибольшею скоростью, когда он находится в соединении с Солнцем или же в противостоянии с ним, и попятным, когда он образует с Солнцем квадратуру.

Эксцентриситет будет наибольший в первом случае и наименьший во втором по следствиям 7, 8 и 9 предложения LXVI книги I. Эти неравенства, по сказанному в тех же следствиях, весьма велики и производят главное уравнение апогея, которое я называю полугодичным. Наибольшее полугодичное уравнение равно кругло $12°18'$, насколько я мог вывести из наблюдений.

Наш соотечественник *Горрокс* первый предположил, что Луна движется по эллипсу вокруг Земли, находящейся в нижнем его фокусе. *Галлей* поместил центр эллипса на эпицикл, центр которого равномерно обращается вокруг Земли; от движения по эпициклу и происходят вышесказанные неравенства в виде прямого и попятного движения апогея и изменений величины эксцентриситета.

Представим, что среднее расстояние между Луною и Землею разделено на 100 000 частей, и пусть $T$ (фиг. 197) изображает землю, $TC$ — среднюю величину эксцентриситета Луны, равную 5505 частям; продолжим $TC$ до $B$ так, чтобы было

$$CB = TC \cdot \sin 12°18',$$

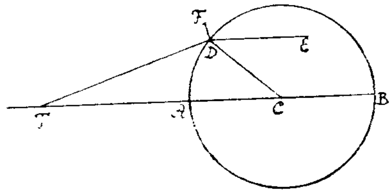
тогда круг $BDA$, описанный точкою $C$, как центром, и радиусом $CB$, и будет сказанный эпицикл, на котором и располагается центр лунной орбиты, обращающийся по порядку букв $BDA$. Возьмем угол $BCD$, равный двойному годовому аргументу, т. е. удвоенному расстоянию истинного места Солнца от апогея Луны, единожды исправленного; тогда $CTD$ будет полугодовым уравнением Луны и $TD$ — эксцентриситетом ее орбиты, направляющимся к апогею, дважды исправленному. Имея среднее движение Луны, апогей и эксцентриситет и длину большой оси ее орбиты, равную 200 000 частям, находят истинное место Луны на ее орбите и ее расстояние до Земли по известным способам.

Когда Земля в перигелии, центр лунной орбиты, вследствие большей силы Солнца, движется быстрее вокруг центра $C$, нежели в афелии, и притом в обратном отношении кубов расстояний Земли до Солнца. Но так как уравнение центра Солнца включается в годовом аргументе, центр лунной орбиты движется по эпициклу $BDA$ быстрее в обратном отношении квадратов расстояний Земли до Солнца. Чтобы заставить его двигаться еще быстрее в обратном отношении этого расстояния, из центра орбиты проводится прямая $DE$ по направлению к апогею Луны, т. е. параллельно прямой $TC$, и берется угол $EDF$, равный избытку вышеуказанного годового аргумента над расстоянием апогея Луны до перигея Солнца, считаемым в прямом направлении, или, что то же, берется угол $CDF$, равный дополнению до $360°$ истинной аномалии Солнца. Пусть $DF$ находится к $DC$ в отношении, равном произведению отношения удвоенного эксцентриситета земной орбиты к среднему расстоянию Солнца до Земли на отношение среднего суточного движения Солнца от апогея Луны к среднему суточному движению Солнца же от своего собственного апогея, т. е. так, чтобы было

$$\frac{DF}{DC}=\frac{33\frac{7}{8}}{1000}\cdot\frac{52'27''16'''}{59'8''10'''}$$

или

$$\frac{DF}{DC}=\frac{3}{100}.$$



Фиг. 197.

Вообрази, что центр орбиты Луны располагается в точке $F$ эпицикла, коего центр есть $D$ и коего радиус $DF$ обращается в то время, как точка $D$ обходит окружность круга $DABD$. При таком условии скорость, с которою центр орбиты Луны будет двигаться по некоторой кривой, описанной вокруг центра $C$, будет приблизительно обратно пропорциональна кубу расстояния Солнца до Земли, как это и требуется.

Расчет этого движения труден, его можно облегчить при помощи следующего приближения. Если среднее расстояние Луны до Земли принять равным 100 000 частям и эксцентриситет $TC = 5505$, как и выше, то длина $CB$ или $CD$ окажется равной $1172\frac{3}{4}$ частям, и длина $DE = 35\frac{1}{5}$.

Эта прямая при расстоянии $TC$ стягивает угол с вершиною в точке $T$, равный тому, который происходит от перемещения центра орбиты из $D$ в $F$ при движении его. Та же прямая, будучи удвоена и находясь в положении параллельном в расстоянии верхнего фокуса орбиты Луны до Земли, стягивает такой же угол как тот, который образуется указанным перемещением при движении фокуса; в расстоянии же Луны от Земли стягивает угол, образуемый тем же перемещением Луны в движении ее, поэтому этот угол может быть назван вторым уравнением центра. Это уравнение, при среднем расстоянии Луны до Земли, приблизительно пропорционально синусу угла, составляемого прямою $DF$ с прямою, проведенной из точки $F$

к Луне, и наибольшая величина этого уравнения составляет $2'25''$. Угол же, составляемый прямою $DF$ и прямою, соединяющей точку $F$ с Луною, получается или вычитая угол $EDF$ из средней аномалии Луны, или же придавая расстояние Луны до Солнца к расстоянию апогея Луны до апогея Солнца. Второе уравнение центра равно произведению $2'25''$ на синус найденного указанным выше образом угла; это уравнение надо придавать, когда этот угол меньше полуокружности, и вычитать, когда он больше.

Таким образом получится долгота Луны при положении этого светила в сизигиях.

Так как атмосфера Земли до высоты 35 или 40 миль преломляет солнечный свет и вследствие этого преломления рассеивает его около тела Земли, вследствие же рассеяния света в смежности с тенью самая тень расширяется, то к диаметру тени, рассчитанному по параллаксу, я прибавляю 1 минуту или 1 минуту с третью при вычислении лунных затмений.

Теорию Луны следует проверять и устававливать на основании явлений прежде всего для сизигий, затем для квадратур и, наконец, для октантов. Если кто предпримет это дело, то было бы удобно, если бы он принял для полдня Королевской Гриничской обсерватории последнего дня декабря 1700 г. ст. ст. следующие данные для средних движений Солнца и Луны: среднее движение Солнца $290°43'40''$, его апогея $97°44'30''$; среднее движение Луны $315°21'00''$, ее апогея $338°20'00''$ и восходящего узла $147°24'20''$, разность долгот этой Обсерватории и Королевской Парижской $0^{ч}9^{м}20^{с}$. Однако до сих пор среднее движение Луны и ее апогея еще не получаются с достаточною точностью.

### Предложение XXXVI. Задача XVII

*Найти силу Солнца, движущую море.*

Сила Солнца $ML$ (фиг. 186), возмущающая движение Луны, когда Луна в квадратурах (по предл. XXV), относится к силе тяжести на Земле, как 1 к 638 092.6. Сила же $TM - LM = 2PK$ вдвое больше, когда Луна в сизигиях.

Эти силы, если опуститься к поверхности Земли, уменьшаются в таком же отношении, как и расстояние до центра, т. е. в отношении $60\frac{1}{2}$ к 1, так что первая сила на поверхности Земли относится к силе тяжести, как 1 к 38 604 600. Этою силою море понижается в местах, отстоящих на 90° от Солнца. Второю силою, которая вдвое больше, море поднимается под Солнцем и в области ему противоположной. Сумма этих двух сил относится к силе тяжести, как 1 к 12 868 200. Так как каждая из этих сил производит то же самое движение, понижает ли она воду в областях, отстоящих на 90° от Солнца, или же ее повышает в областях под Солнцем и в областях, ему противоположных, то эта сумма и представит полную силу, возмущающую море. Производимое ею действие будет то же самое, как если бы эта сила целиком прилагалась лишь в олбастях под Солнцем и в областях, ему противоположных, повышая море, в областях же, отстоящих на 90°, не действовала бы совсем.

Такова сила Солнца, возмущающая море в таком месте, где Солнце находится в зените, и в среднем своем расстоянии от Земли. При других положениях Солнца сила, заставляющая море подниматься, прямо пропорциональна синусу верзусу удвоенной высоты Солнца над горизонтом места и обратно пропорциональна кубу расстояния Солнца до Земли.

*Следствие.* Так как центробежная сила частиц Земли, происходящая от суточного вращения Земли, составляющая $\frac{1}{289}$ силы тяжести, производит то, что высота воды под экватором превосходит ее высоту при полюсах на 85 472 парижских фута, как показано в предложении XIX, то сила Солнца, о которой идет речь, относящаяся к силе тяжести, как 1 к 12 868 200, т. е. к сказанной центробежной силе, как 1 к 44527, произведет, что высота воды в областях под Солнцем и в областях противоположных будет превосходить высоту ее в областях, от них отстоящих на 90°, на 1 фут и $11\frac{1}{3}$ дюймов парижских, ибо эта величина относится к 85 472 как 1 к 44 527.

### Предложение XXXVII. Задача XVIII

*Найти силу Луны, движущую море.*

Сила Луны, движущая море, должна быть рассчитываема по сравнению ее с силою Солнца, это же сравнение получается, сопоставляя движение моря, происходящее от этих сил. Перед устьем р. *Авон*, в 3 милях ниже *Бристоля*, весною и осенью полный подъем воды при соединениях и противостояниях светил, по наблюдениям *Самуила Штурми*, составляет немногим более или немногим менее 45 футов, в квадратурах же всего 25 футов. Первая высота происходит от суммы сил, вторая — от их разности. Следовательно, когда Луна и Солнце находятся на экваторе и в среднем расстоянии от Земли, то, обозначая их силы через $S$ и $L$, будем иметь

$$(L+S):(L-S)=45:25=9:5.$$

В *Плимутской* гавани прилив, по наблюдениям *Самуила Кальпресса*, в среднем составляет немного более или немного менее 16 футов, весною же и осенью высота воды во время сизигий превышает таковую во время квадратур более, чем на 7 или 8 футов. Если принять, что наибольшая разность достигает 9 футов, то будет

$$(L+S):(L-S)=20\frac{1}{2}:11=41:23.$$

Эга пропорция в достаточной мере согласуется с предыдущей. Вследствие большой высоты прилива в *Бристоле*, наблюдения *Штурми* заслуживают большего доверия; поэтому, пока мы не будем располагать чем-либо более надежным, мы воспользуемся отношением 9 к 5.

Впрочем, от взаимного движения вод наибольшие приливы не совпадают с сизигиями светил, но, как уже сказано, суть третьи после сизигий, т. е. следуют в ближайшее время за третьим прохождением Луны через меридиан места после сизигия, или же, точнее (как заметил *Штурми*), суть третьи после дня новолуния или полнолуния и происходят немного позднее или немного ранее двенадцатого часа после новолуния или полнолуния. Таким образом наибольший прилив бывает немного позднее или немного ранее сорок третьего часа после новолуния или полнолуния, ибо приливы происходят в этом порту приблизительно в седьмом часу после прохождения Луны через меридиан места, поэтому полная вода непосредственно следует за прохождением Луны через меридиан, когда Луна отстоит от Солнца или от противостояния с ним на 18° или 19° в прямом направлении Полное развитие зимы и лета приходится не в самые дни солнцестояния, а когда Солнце отстоит от солнцестояний приблизительно на одну десятую полного круга, т. е. 36° или 37°. Подобно этому и наибольший прилив моря происходит после того прохождения Луны через меридиан места, когда она отстоит от Солнца приблизительно на десятую часть своего движения от одного наибольшего прилива до следующего, т. е. около $18\frac{1}{2}°$.

Сила Солнца в этом расстоянии Луны от сизигий и квадратур, увеличивающая или уменьшающая движение моря, происходящее от силы Луны, будет меньше, нежели в сизигиях, в отношении синуса дополнения удвоенного вышеуказанного расстояния, т. е. 37°, к радиусу, значит в отношении 7 986 355 к 10 000 000. Поэтому в предыдущей пропорции надо писать 0.798 6355 $S$ вместо $S$.

Но и сила Луны в квадратурах, вследствие отстояния Луны от экватора на величину ее склонения, должна быть уменьшена. Ибо Луна в квадратурах, или, точнее, в $18\frac{1}{2}^\circ$ после квадратуры, имеет склонение около $22^\circ 13'$, когда же светило находится вне экватора, то его сила, производящая движение моря, уменьшается приблизительно пропорционально квадрату синуса дополнения склонения, поэтому сила Луны в ее квадратурах составляет всего $0.8570327L$. Следовательно, будет

$$(L + 0.7986355S):(0.8570327L - 0.7986355S) = 9:5.$$

Кроме того, диаметры орбиты, по которой Луна должна бы двигаться без эксцентриситета, относятся между собою, как 69 к 70, так что расстояние Луны от Земли в сизигиях относится к ее расстоянию в квадратурах, как 69 к 70, при прочих одинаковых условиях. В $18\frac{1}{2}^\circ$ от сизигиев, когда происходит наибольший прилив, и в $18\frac{1}{2}^\circ$ от квадратур, когда образуется наименьший прилив, расстояния Луны до Земли относятся к среднему ее расстоянию, как 69.098 747 и 69.897 305 к $69\frac{1}{2}$. Силы же Луны, производящие движение моря, обратно пропорциональны кубам расстояний, поэтому силы в наибольшем и наименьшем из указанных расстояний относятся к силе при среднем расстоянии, как 0.983 0427 и 1.017 522 к 1. Следовательно, будет

$$(1.017\,522L + 0.798\,6355S):(0.983\,0427 \cdot 0.857\,0327L - 0.798\,6355S) = 9:5$$

и значит,

$$S:L = 1:4.4815.$$

Так как сила Солнца относится к силе тяжести, как 1 к 128 682 00, то сила Луны относится к силе тяжести, как 1 к 287 1400.

*Следствие 1.* Так как от силы Солнца вода поднимается на высоту 1 фута $11\frac{1}{3}$ дюймов, то от действия силы Луны она поднимется на 8 футов $7\frac{5}{22}$ дюйма, и при действии обеих сил — на $10\frac{1}{2}$ футов, и до высоты $12\frac{1}{2}$ футов и более, когда Луна в перигее, в особенности, если дующий ветер способствует приливу. Такая сила вполне достаточна для того, чтобы производить все движения моря, и вполне отвечает размерам этих движений. Ибо в морях, широко простирающихся от востока к западу, как в *Тихом* океане или в *Атлантическом* вне тропиков, вода поднимается на 6, 9, 12 или 15 футов. Говорят, что в *Тихом* океане, который шире и глубже, прилив больше, нежели в *Атлантическом*, ибо для полноты прилива протяжение моря с востока на запад должно быть не менее 90°. В средней части *Атлантического* океана, между тропиками, приливы меньше, нежели в умеренных поясах, вследствие узкости океана между *Африкою* и *Южной Америкой*. Посредине моря вода не иначе может подниматься, как опускаясь одновременно у восточного и западного берега, тогда как в наших узких морях она должна была бы понижаться у этих берегов поочередно. От этой же причины приливы и отливы на островах, лежащих весьма далеко от берегов, должно быть весьма малыми.

В некоторых портах, куда вода, чтобы поочередно заполнять и опорожнивать заливы, должна протекать с большим напором через мелководия, приливы и отливы должны быть больше обыкновенных; так это происходит в *Плимуте* и *Чипстоубридже* в Англии, у горы *св. Михаила* и г. *Авранш* в *Нормандии*, в *Камбайе* и в *Пегу* в *Индии*. В этих местах море, приливая и отливая с большою скоростью, то затопляет, то обнажает берега на много миль. Иногда же этот напор втекающей или вытекающей воды прекращается не ранее того, как вода поднимется или опустится на 30, 40 или 50 футов и даже более. В таких условиях находятся длинные и мелководные проливы, подобно *Магелланову* или тем, которыми окружена *Англия*. Приливы в такого рода портах и проливах, вследствие стремительности втекания и вытекания, увеличиваются вне меры. У берегов же, лежащих у глубокого и открытого моря и приглубых, у которых вода может подниматься и опускаться не притекая и не вытекая под напором, размеры прилива соответствуют силам Солнца и Луны.

*Следствие 2*. Так как сила Луны, движущая море, относится к силе тяжести, как 1 к 2 871 400, то ясно, что эта сила гораздо меньше такой, которая могла бы чувствоваться в опытах с маятниками или в опытах статических или гидростатических. Лишь в приливах моря эта сила оказывает чувствительное проявление.

*Следствие 3*. Так как сила Луны, двигающая море, относится к подобной же силе Солнца, как 4.4815 к 1, силы же эти (по след. 14 предл. LXVI кн. I) пропорциональны, соответственно, плотности Луны и Солнца и кубам их видимых диаметров, то плотность Луны находится к плотности Солнца в отношении, равном

$$\frac{4.4815}{1} \cdot \left(\frac{32'12''}{31'16''\frac{1}{2}}\right)^3 = 4.891.$$

Плотность же Солнца относится к плотности Земли, как 1 : 4, поэтому плотность Луны относится к плотности Земли, как 4891 к 4000 или как 11 : 9. Следовательно, масса Луны плотнее и более землиста, нежели наша Земля.[194]

*Следствие 4.* Так как, на основании астрономических наблюдений, истинный диаметр Луны относится к истинному диаметру Земли, как 100 к 365, то масса Луны относится к массе Земли, как 1 к 39.788.

*Следствие 5.* Ускорительная сила тяжести на поверхности Луны будет около 3 раз меньше ускорительной силы тяжести на поверхности Земли.

*Следствие 6.* Расстояние центра Луны от центра Земли относится к расстоянию центра Луны до общего центра тяжести ее и Земли, как 40.788 к 39.788.

---

[194] Лаплас, излагая в книге XIII «Небесной Механики» общий обзор теории приливов и отливов, между прочим говорит: «Наблюдение показывает, что наибольший прилив не совпадает с моментами сизигиев, а происходит на $1^1/_2$ сутки позже. Ньютон приписывает это опоздание колебательному движению моря, которое сохранилось бы некоторое время и после прекращения действия светил. Точная теория колебаний моря, производимых этим действием, показывает, что без побочных обстоятельств наибольшие приливы совпадали бы с сизигиями, наименьшие — с квадратурами. Таким образом опаздывание их относительно этих фаз не может быть приписано причине, указываемой Ньютоном, оно зависит, как и время полной воды в каждом порте, от побочных обстоятельств. Этот пример показывает, насколько надо опасаться даже представляющихся самыми вероятными общих взглядов, когда они не проверяются точным анализом»... «В последующих изданиях „Начал“ Ньютон почти ничего не добавил к теории приливов, изложенной в первом издании; он принял лишь во внимание, при вычислении действия Луны, изменение расстояния Луны, производимое неравенством, называемым *вариацией*. Так как наибольший прилив происходит через $1^1/_2$ сутки после сизигиев, то он счел, что при вычислении *наибольшего* прилива действие Солнца следует умножать на косинус удвоенного синодического движения Луны за этот промежуток времени. Но эта поправка неправильна, потому что прилив в данном порту не есть результат непосредственного действия светил, но их действия за $1^1/_2$ сутки до этого момента. Эти приливы можно уподобить тем, которые, будучи непосредственно вызываемы действием светил, употребляли бы $1^1/_2$ сутки для достижения порта...

«Обратив внимание на правильность приливов в Бресте, я предложил правительству сделать распоряжение о производстве в этом порту ряда наблюдений над приливами, в продолжение, по крайней мере, полного оборота лунных узлов (18 лет). Это было исполнено, и наблюдения начаты с 1 июня 1806 г. и продолжаются без перерыва»... Обработка этих наблюдений за 16 лет привела Лапласа к заключению, что отношение $L : S$, иначе отношение

$$\left(\frac{m}{r^3}\right) : \left(\frac{M}{R^3}\right) = 2.35333$$

и что

$$m : m_0 = 1 : 74.946$$

где $m$, $M$, $m_0$ суть соответственно массы Луны, Солнца и Земли, $r$ — среднее расстояние Луны и $R$ — среднее расстояние Солнца до Земли. По Ньютону, эти отношения суть 4.4815 и 39.788. Понятно, что и все числа следствий 3, 4, 5 и 6 соответственно изменяются.

*Следствие 7.* Среднее расстояние центра Луны от центра Земли в октантах составляет приблизительно 60.4 наибольших полудиаметров Земли. Так как наибольший полудиаметр Земли составляет 19 658 600 парижских футов, то среднее расстояние между центрами Земли и Луны, равное 60.4 таких полудиаметров, равно 1 187 379 440 футов. Это расстояние (по предыдущему следствию) относится к расстоянию центра Луны до общего центра тяжести Луны и Земли, как 40.788 к 39.788, следовательно это последнее расстояние равно 1 158 268 534. Так как Луна обращается относительно неподвижных звезд в 27 суток 7 часов $43\frac{4}{9}$ минуты, то синус верзус угла, описываемого Луною в 1 минуту составит 12 752 341 при радиусе 1 000 000 000 000 000; в каком отношении этот радиус находится к синусу верзусу, в таком же отношении находится 1 158 268 534 фута к 14.770 6353 футам. Следовательно, Луна, падая под действием той силы, которою она удерживается на своей орбите, проходит в первую минуту своего падения 14.7706353 футов. Увеличивая эту силу в отношении 178.725 к 177.725, получим полную силу тяжести на орбите Луны по следствию предложения III. Падая под действием этой силы, Луна пройдет в 1 минуту 14.853 8067 фута.

В расстоянии, равном $\frac{1}{60}$ расстояния Луны от центра Земли, т. е. и 19 789 657 футах, тяжелое тело пройдет в 1 секунду также 14.8538067 футов. Следовательно, в расстоянии 19 615 800 футов, составляющих средний полудиаметр Земли, тяжелое тело пройдет при своем падении 15.111 75 футов, т. е. 15 футов 1 дюйм $4\frac{1}{11}$ линии. Таково будет падение тел в широте 45°. По таблице, приведенной в предложении XX, падение немногим более в широте Парижа, причем разность составляет около $\frac{2}{3}$ линии, ибо тяжелые тела, по упомянутому расчету, в широте Париже при падении в пустоте проходят в первую секунду 15 футов 1 дюйм $4\frac{25}{33}$ линии, если же силу тяготения уменьшить, отняв центробежную силу, происходящую в этой широте от суточного вращения Земли, то падающие тела проходили бы там путь в первую секунду 15 футов 1 дюйм $1\frac{1}{2}$ линии. Что тела падают с такою скоростью в широте Парижа, показано выше в предложениях IV и XIX.

*Следствие 8.* Среднее расстояние между центрами Земли и Луны в сизигиях составляет 60 наибольших полудиаметров Земли, за вычетом лишь около $\frac{1}{30}$ полудиаметра. В квадратурах Луны среднее расстояние между указанными центрами равно $60\frac{5}{6}$ полудиаметров Земли, ибо такие два расстояния находятся к среднему расстоянию Луны в октантах, как 69 и 70 к $69\frac{1}{2}$ по предложению XXVIII.

*Следствие 9.* Среднее расстояние между центрами Земли и Луны в сизигиях Луны равно 60 средним полудиаметрам Земли, с прибавкою $\frac{1}{10}$ полудиаметра. В квадратурах Луны среднее расстояние между этими центрами равно 61 среднему полудиаметру Земли, за вычетом $\frac{1}{30}$ полудиаметра.

*Следствие 10.* В сизигиях Луны средний горизонтальный ее параллакс составляет соответственно в различных широтах:

| Широта | Параллакс |
|---|---|
| 0° | 57′20″ |
| 30° | 57′16″ |
| 38° | 57′14″ |
| 45° | 57′12″ |
| 52° | 57′10″ |
| 60° | 57′8″ |
| 90° | 57′4″ |

Во всех этих вычислениях я не рассматривал магнитного притяжения Земли, величина которого весьма мала и неизвестна. Если же когда-либо это притяжение можно будет исследовать и если длины градуса меридиана и длины секундных маятников под разными широтами, законы движений моря, параллакс Луны и видимые полудиаметры Солнца и Луны будут определены из наблюдений совершающихся явлений более точно, тогда будет возможно повторить и весь этот расчет с большею точностью.

## Предложение XXXVIII. Задача XIX

*Найти фигуру Луны.*

Если бы Луна была телом жидким, наподобие нашего моря, то сила Земли, заставляющая подниматься ближайшие и отдаленнейшие его части, находилась бы к силе Луны, поднимающей наши моря в местах под Луною и противоположных ей, в отношении, равном произведению отношений ускорительной силы тяготения Луны к Земле к ускорительной силе тяготения Земли к Луне и отношения диаметра Луны к диаметру Земли, т. е. как

$$\frac{39.788}{1}\cdot\frac{100}{365}=10.81.$$

20. Зак. 3350

А так как наше море повышается силою Луны на 8.6 фута, то жидкость Луны должна бы под действием силы Земли подниматься на 93 фута. Вследствие этой причины фигура Луны стала бы представлять сфероид, которого больший диаметр по продолжении проходил бы через центр Земли и превышал бы перпендикулярные диаметры на 186 футов.

Итак, Луна принимает такую форму и должна бы ею обладать с самого начала.

*Следствие.* Вследствие этого происходит, что с Земли наблюдается всегда одна и та же сторона Луны; в другом положении тело Луны не могло бы и находиться в покое, а постоянно возвращалось бы к этому положению, совершая колебания. Но эти колебания, вследстние малости действующих сил, происходили бы весьма медленно, так что та сторона, которая должна бы быть постоянно обращена к Земле, могла бы быть обращена и к другому фокусу лунной орбиты (по причине, указанной в предл. XVII) без того, чтобы немедленно быть оттянутой и повернутой к Земле.

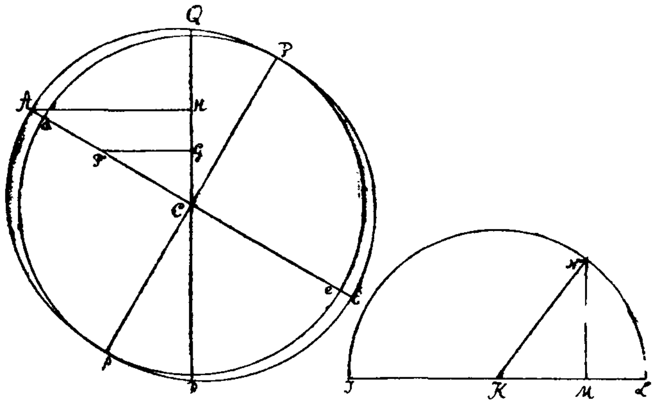
### Лемма I

*Пусть $APEp$ представляет Землю однородной плотности, $C$— центр ее, $Pp$—полюсы, $AE$—экватор; радиусом $CP$ из центра $C$ описывается шар $Pape$, $QR$ есть плоскость, перпендикулярная к прямой, соединяющей центр Земли с центром Солнца; если предположить, что все наружные частицы Земли, заключенные в объеме $PapAPepE$, лежащем снаружи шара $Pape$, вынуждаются удаляться от плоскости $QR$, причем это стремление для каждой частицы пропорционально ее расстоянию до плоскости $QR$, то я утверждаю: во-первых, что действительность силы, происходящей от всех частиц, расположенных равномерно по экваториальному кругу $AE$ вне шара подобно кольцу, на вращение Земли около ее центра относится к действительности силы, происходящей от такого же числа частиц, сосредоточенных в точке $A$, находящейся в наибольшем удалении от плоскости $QR$, стремящейся сообщить Земле подобное же вращательное движение около ее центра, как единица к двум; самое же это вращательное движение происходит около оси, лежащей в пересечении экватора и плоскости $QR$.*

Вообразим, что из центра $K$ (фиг. 198) на диаметре $JL$ описан полукруг $JNLK$ и полуокружность $JNL$ разделена на бесчисленное множество равных частиц, от каждой из которых на диаметр $JL$ проведен синус $NM$. Сумма квадратов исех синусов $NM$ равна сумме квадратов синусов $KM$, обе же суммы составнт сумму такового же числа квадратов полудиаметров

$KN$, следовательно сумма квадратов всех $NM$ вдвое меньше суммы квадратов такового же числа[195] полудиаметров $KN$.

Вообразим теперь, что окружность круга $AE$ разделяется на такое же число равных частей, и из одной из них $F$ опускается на плоскость $QR$



Фиг. 198.

перпендикуляр $FG$, и из точки $A$ — перпендикуляр $AH$. Сила, с которою частица $F$ стремится удалиться от плоскости $QR$, по предположению пропорциональна перпендикуляру $FG$, произведение этой силы на расстояние $CG$ представит меру действительности этой силы на вращение Земли около ее

[195] Это рассуждение есть не что иное, как нахождение интеграла

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi,$$

который нужен для дальнейшего. Примененный прием равносилен следующему: очевидно, что

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Но

$$\int_0^\pi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi d\varphi = \pi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}.$$

20*

центра.[196] Следовательно, действительность частицы, помещенной в $F$, относится к действительности частицы, находящейся в $A$, как

$$FC \cdot CG : AH \cdot HC = FC^2 : AC^2$$

поэтому действительность всех частиц, находящихся на своих местах в $F$, относится к действительности такого же числа их, помещенных в $A$, как сумма всех $FC^2$ относится к сумме всех $AC^2$, т. е. по только что доказанному как $1:2$.

Так как частицы действуют своим стремлением удалиться от плоскости $QR$, следовательно одинаково от обеих сторон этой плоскости, то они заставляют окружность экватора, а значит, и неразрывно с нею связанную Землю, поворачиваться около оси, лежащей как в плоскости экватора, так и в плоскости $QR$.

### Лемма II

*При тех же положениях я утверждаю, во-вторых, что действительность силы всех частиц, расположенных повсюду вне шара, на вращение Земли вокруг той же оси относится к полной силе такого же числа частиц, расположенных равномерно по экватору, подобно кольцу, как два к пяти.*

Пусть $JK$ (фиг. 199) есть какой-либо малый круг, параллельный экватору; $L$, $l$—две равных частицы, находящиеся на этом круге вне шара *Pape*. Если на плоскость $QR$, перпендикулярную радиусу, проведенному к Солнцу, опустить перпендикуляры $LM$, $lm$, то силы стремления этих частиц удаляться от плоскости $QR$ пропорциональны этим перпендикулярам $LM$, $lm$. Пусть прямая $Ll$, параллельная плоскости *Pape*, разделяется точкою $X$ пополам, через точку $X$ проводится параллельно плоскости $QR$ прямая $Nn$,

---

[196] Словами «действительность силы на вращение Земли около ее центра» переведены не вполне буквально слова подлинника «vis et efficacia ad terram circa centrum ejus rotundam». Из хода доказательства видно, что это есть момент рассматриваемой силы, относительно оси вращения, лежащей в плоскости экватора и в плоскости $QR$.

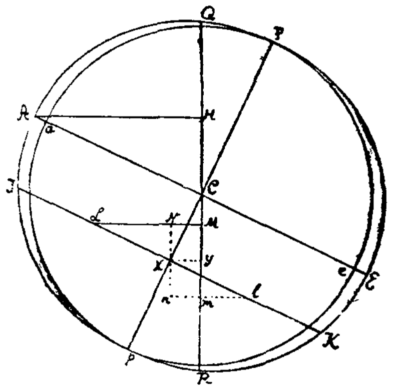
Обозначая линейную плотность воображаемого кольца через $q$, силу, действующую на единицу массы в расстоянии $x$ от плоскости $QR$,—через $kx$, радиус кольца—через $r$, получим, что масса всего кольца есть $2\pi qr$. Если эту массу вообразить сосредоточенной в точке $A$, то момент силы относительно указанной выше оси будет $2\pi qr^2 \sin\alpha$, где через $\alpha$ обозначен угол $QCA$; когда же эта масса распределена равномерно по всему кольцу, то полный момент будет

$$kqr^2 \sin\alpha \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi = k\pi qr^2 \sin\alpha$$

и составит половину предыдущего, как и сказано в теореме.

пересекающая перпендикуляры $LM$ и $lm$ в $N$ и в $n$, и на плоскость $QR$ опускается перпендикуляр $XY$. Действительность силы частиц $L$ и $l$, направленных в противоположные стороны, на вращение Земли пропорциональна соответственно $LM \cdot MC$ и $lm \cdot mC$, иначе $(LN \cdot MC + NM \cdot MC)$ и $(ln \cdot MC - nm \cdot mC)$ или $(LN \cdot MC - NM \cdot MC)$ и $(LM \cdot mC - NM \cdot mC)$; разность этих величин, равная $LN \cdot Mm - NM(MC + mC)$, представляет меру действительности обеих частиц, взятых совместно, на вращение Земли.

Положительная часть этой разности $LM \cdot Mm = 2LN \cdot NX$ относится к силе двух таких же частиц, помещенных в $A$, т. е. к $2AH \cdot HC$, как $LX^2 : AC^2$. Отрицательная часть $NM(MC + mC) = 2XY \cdot CY$ к той же силе $2AH \cdot HC$ — как $CX^2 : AC^2$, поэтому разность этих величин, т. е. действительность сил обеих равных частиц $L$ и $l$ на вращение Земли, взятых совместно, относится к действительности таких же двух частиц, помещенных в $A$, как $(LX^2 - CX^2) : AC^2$. Но если окружность круга $JK$ разделить на бесчисленное число равных частей $L$, то сумма всех $LX^2$ относится к сумме стольких же $JX^2$, как 1 к 2 (по лем. I), следовательно к такому же числу $AC^2$ эта сумма относится, как $JX^2 : 2AC^2$. Отношение стольких же $CX^2$ к стольким же $AC^2$ равно $2CX^2 : 2AC^2$. Вследствие этого совокупность сил всех частиц, расположенных по окружности круга $JK$, относится к совокупности сил такого же числа частиц, помещенных в точке $A$, как



Фиг. 199.

$$(JX^2 - 2CX^2) : 2AC^2,$$

и следовательно (по лем. I), она относится к совокупности сил такого же числа частиц, расположенных по окружности круга $AE$, как

$$(JX^2 - 2CX^2) : AC^2.$$

Если вообразить, что диаметр $Pp$ разделен на бесчисленное число равных частей, на которые опирается столько же кругов $JK$, то количество материи на периметре каждого круга[197] будет пропорционально $JX^2$,

[197] Как здесь, так и при замене в дальнейшем величины $XJ^2$ через $AC^2 - CX^2$, Ньютон считает эллипс $pJAQPEp$ за круг, пренебрегая разностью длин полуосей $CP$ и $CA$.

следовательно сила этого количества вещества на вращение Земли будет пропорциональна $JX^2 \cdot (JX^2 - 2CX^2)$. Сила того же количества вещества, если бы его расположить по окружности круга $AC$, была бы пропорциональна $JX^2 \cdot AC^2$. Поэтому сила всех частиц материи, размещенной вне шара по окружностям всех кругов, относится к силе такового же числа частиц, размещенных по окружности наибольшего круга $AE$, как сумма всех $JX^2 \cdot (JX^2 - 2CX^2)$ к сумме такого же числа $JX^2 \cdot AC^2$, иначе как сумма всех $(AC^2 - CX^2)(AC^2 - 3CX^2)$ к такому же числу $(AC^2 - CX^2) \cdot AC^2$, т. е. как сумма всех

$$AC^4 - 4AC^2 \cdot CX^2 + 3CX^4$$

к таковому же числу

$$AC^4 - AC^2 \cdot CX^2$$

т. е. как флюента, коей флюксия есть первая из этих величин, к флюенте, коей флюксия есть $AC^4 - AC^2 \cdot CX^2$. По способу флюксий первая флюента есть

$$AC^4 \cdot CX - \frac{4}{3} AC^2 \cdot CX^3 + \frac{3}{5} CX^5$$

вторая:

$$AC^4 \cdot CX - \frac{1}{3} AC^2 \cdot CX^3.$$

Отношение этих величин, после того как в них вместо $CX$ представлено $Cp$ или $AC$, равно

$$\frac{4}{15} AC^4 : \frac{2}{3} AC^5$$

т. е. $2:5$.

### Лемма III

*При тех же положениях утверждаю: в третьих, что вокруг оси, проведенной как указано выше, полное количество движения Земли, составленное из количеств движения всех частиц ее, находится к количеству движения вокруг той же оси вышеприведенного кольца в отношении, равном произведению отношения массы Земли к массе кольца на отношение трех квадратов дуги, равной четверти окружности какого-либо круга, к двум квадратам его диаметра, т. е. в отношении, равном произведению отношения масс на число 0.925275.*

Ибо количество движения цилиндра, вращающегося вокруг своей неподвижной оси, относится к количеству движения вписанного шара, вращающегося вместе с ним, как сумма площадей любых четырех равных квадратов к сумме площадей трех кругов, в них вписанных;[198] количество движения того же цилиндра к количеству движения тончайшего кольца, окружающего шар и цилиндр по месту их касания,— как удвоенная масса цилиндра к утроенной массе кольца; количество же движения этого кольца, вращающегося равномерно вокруг оси цилиндра, к количеству его движения при равномерном вращении с такою же продолжительностью оборота вокруг диаметра — как окружность круга к удвоенному диаметру.

---

[198] Та величина, которую в этой лемме Ньютон называет «количеством движения Земли при вращении ее около данной оси», не есть ни количество движения, ни момент количеств движения, а представляет собою величину, не имеющую механического значения, а именно: сумму произведений масс частиц тела на абсолютные величины тех скоростей, коими они при вращении тела обладают. Между тем в дальнейшем Ньютон пользуется найденною им таким образом для однородного шара величиною вместо момента количеств движения этого шара, вследствие чего и произошла та ошибка, на которую обращает внимание в своем очерке ньютоновой теории прецессии Лаплас. Эта ошибка была, повидимому, впервые замечена Т. Симпсоном в его «Miscellaneous Tracts». Что Ньютон исчисляет именно указанную величину, не трудно убедиться, произведя соответствующие расчеты.

Начнем с цилиндра. Пусть имеется однородный круговой цилиндр, вращающийся равномерно с угловою скоростью $\omega$ около своей оси; радиус цилиндра обозначим через $R$, высоту — через $h$ и плотность — через $q$; тогда линейная скорость всех точек слоя, лежащего между цилиндрическими поверхностями радиусов $r$ и $r + dr$, есть $\omega r$, масса этого слоя есть $2\pi r h q dr$, следовательно упомянутая выше сумма произведений масс всех частиц на их скорости составит для цилиндра величину

$$C = 2\pi q h \omega \int_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi q h R^3 \cdot \omega = \frac{2}{3} M \cdot R\omega$$

где $M$ есть масса всего цилиндра.

Такое же количество для шара, вписанного в цилиндр, будет

$$S = \frac{2}{3}\pi q \omega \int_{-R}^{+R} r^3\, dz$$

причем $r^2 + z^2 = R^2$, или, положив $r = R\sin\varphi$, $z = R\cos\varphi$, будет

$$S = \frac{2}{3}\pi q \omega R^4 \cdot \int_0^\pi \sin^4\varphi \cdot d\varphi = \frac{2}{3}\pi q \omega R^4 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi^2 q \omega R^4 = \frac{3}{16}\pi M_0 \cdot R\omega$$

где $M_0$ есть масса шара.

Высота описанного около шара цилиндра есть $h = 2R$, и значит, для него величина $C$ будет

$$C = \frac{4\pi}{3} \cdot qR^4\,\omega.$$

Отношение $S : C = 3\pi : 16$, а это и есть как раз отношение суммы площадей трех кругов, вписанных в равные квадраты, к сумме площадей четырех таких квадратов.

Совершенно так же для «тончайшего кольца, окружающего цилиндр и шар по месту их касания», имеем

$$K = 2\pi q_1 R \cdot \omega R = M_1 \cdot \omega R$$

### Предположение II

*Если по удалении Земли вышеупомянутое кольцо будет двигаться по орбите Земли вокруг Солнца и вместе с тем вращаться суточным движением вокруг своей оси, наклоненной к плоскости эклиптики под углом* $23\frac{1^\circ}{2}$, *то движение точек равноденствия будет одно и то же, жидкое ли это кольцо, или же состоит из твердого и крепкого вещества.*

### Предложение XXXIX. Задача XX

*Найти предварение равноденствий.*

Среднее часовое движение узлов Луны для круговой орбиты, когда узлы в квадратурах, равно $16''35'''16^{IV}36^{V}$, половина его $8''17'''38^{IV}18^{V}$ (по причинам, объясненвым выше) есть общее среднее часовое их движение, составляющее в звездный год $20^\circ11'46''$.

Итак, узлы Луны при движении ее по круговой орбите отступали бы ежегодно на $20^\circ11'46''$.

Если бы было несколько лун, то движение узлов каждой из них было бы (по след. 16 предл. LXVI кн. I) пропорционально времени ее обращения.

Если бы Луна обращалась в продолжение звездных суток у самой поверхности Земли, то годовое движение узлов относилось бы к $20^\circ11'46''$, как звездные сутки, т. е. 23 часа 56 минут к времени звездного оборота Луны, т. е. 27 суткам 7 часам 43 минутам, т. е. как 1436 к 39 343. В таковых условиях находились бы узлы целого кольца лун, окружающих

---

где через $q_1$ обозначена линейная плотность и через $M_1$ — масса этого кольца. Очевидно, что отношение

$$C:K=2M:3M_1$$

т. е. равно отношению удвоенной массы цилиндра к утроенной массе кольца, как и сказано в тексте.

Наконец, количество $Q$, расчисленное таким же образом для кольца, вращающегося около своего диаметра, будет

$$Q=2\omega q_1 R^2\int_0^\pi \sin\varphi\cdot d\varphi=4q_1R^2\omega=\frac{2}{\pi}\cdot M_1R\omega$$

и отношение

$$K:Q=\pi:2,$$

т. е. равно отношению окружности к удвоенному диаметру, как и сказано в тексте.

Очевидно, что

$$S:Q=\frac{3\pi^2}{32}\frac{M_0}{M_1}=0.925275\frac{M_0}{M_1}$$

как и сказано в лемме.

Землю, разделены ли эти луны и не касаются друг друга, обращены ли в жидкость и составляют одно общее кольцо, или же, наконец, если это кольцо затвердело и сделалось неизгибаемым.

Вообразим также, что по массе это кольцо равно массе всего вещества Земли, заключенного в объеме *PapAPepE*, объемлющем шар *Pape* (фиг. 199). Объем этого шара относится к объему вне его, как $aC^2$ к $(AC^2 - aC^2)$, что составляет (так как отношение полудиаметров Земли *PC* или *aC* к *AC* равно 229 к 230) 52 441 к 459. Если бы это кольцо окружало Землю по экватору и вместе с нею вращалось бы вокруг диаметра кольца, то количество движения кольца относилось бы к количеству движения шара,[199] в нем заключенного (по лем. III), как

$$\frac{459}{52441} \cdot 0.925\,275, \text{ т. е. } 4590 : 485\,223.$$

[199] В примечании 198 показано, что та величина, которая исчислена в лемме III и названа Ньютоном количеством движения шара и кольца, не представляет такового, поэтому приводимые в тексте расчеты требуют исправления.

Вместо исчисленной Ньютоном величины, надо взять момент количеств движения шара и кольца, и притом для кольца не момент количеств движения около его диаметра, а также около оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. Эти моменты количеств движения будут:

$$\text{для шара} \ldots\ldots\ldots \frac{2}{5} \cdot MR^2 \omega$$

$$\text{» кольца} \ldots\ldots\ldots M_1 R^2 \omega.$$

Отношение этих величин есть $\frac{5}{2}\frac{M_1}{M}$, поэтому вместо числа 0.925 275 надо написать $\frac{5}{2}$, и будет

$$\frac{459}{52441} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2245}{104882}$$

и вместо отношения 4590 : 489813 надо писать 2445 : 107127.

Таким образом годовое движение точек равноденствия тела, состоящего из шара и кольца, составит от 20°11′46″:

$$\frac{1436}{39343} \cdot \frac{2245}{107127} = \frac{100}{130727}$$

и для Земли будет

$$20°11'46'' \cdot \frac{100}{130729} \cdot \frac{2}{5} = 22''.24.$$

От этой величины, для получения солнечной прецессии, надо взять 0.91706; получится 20″.40.

По Лапласу, отношение приливообразующей силы Луны к таковой же силе Солнца равно 2.35333, поэтому, для получения лунной прецессии надо предыдущее число умножить на 2.35333, получится 48″.01.

Таким образом полная прецессия с этим исправлением составит 68″.41 — величина, далеко отступающая от даваемой наблюдениями. Разница эта происходит от того, что Ньютон принял отношение полуосей земного сфероида равным 230 : 229. По данным Лапласа, оно близко к 301 : 300, и вместо ньютонова числа 459 : 52441, представляющего отношение

Следовательно, количество движения кольца будет относиться к сумме количеств движения кольца и шара, как 4590 : 489813.

Поэтому, если бы кольцо соединилось с шаром неизменно и разделило бы с шаром то свое количество движения, вследствие которого его узлы или точки равноденствий отступают, то количество движения, которое после того осталось бы в кольце, относилось бы к его первоначальному количеству движения, как 4590 к 489 813, поэтому и скорость движения точек равноденствия уменьшилась бы в этом же отношении.

Следовательно, годовое движение точек равноденствия тела, состоящего из шара и кольца, будет относиться к $20°11'46''$, как

$$\frac{1436}{39343}\cdot\frac{4590}{489813}\quad\text{т. е.}\quad\frac{100}{292369}.$$

Силы, вследствие которых узлы Луны (как объяснено выше), а значит, и точки равноденствий, отступают (т. е. силы $3JT$ фиг. 189), для каждой отдельной частицы пропорциональны ее расстоянию до плоскости $QR$, причем частицы, вследствие этих сил, стремятся удалиться от этой плоскости; поэтому (по лем. II), если вещество кольца распределить по всей поверхности шара так, чтобы образовался объем $PapAPepE$, лежащий вне шара, то действительность совокупности сил всех частиц на вращение Земли около какого-либо ее диаметра, а значит, и на движение точек равноденствия, становится меньше прежней в отношении 2 к 5 Следовательно, годовое перемещение точек равноденствия будет относиться к $20°11'46$, как 10 к 73 092 и, таким образом, составит $9''56'''50^{\text{IV}}$.

Вследствие наклонности плоскости экватора, это движение должно быть уменьшено в отношении синуса дополнения $23\frac{1°}{2}$ к радиусу, т. е. в отношении 91 706 к 100 000; по этой причине указанное движение составит $9''7'''20^{\text{IV}}$. Таково годовое предварение равноденствий, происходящее от действия Солнца.

---

разности квадратов полуосей к квадрату малой полуоси, надо взять 601 : 90000; тогда получится, сохраняя как ход расчета, так и принятые выше числа: солнечная прецессия $12''.98$, лунная $37''.61$ и полная $53''$, 59, что уже значительно ближе к истине.

Погрешность в рассуждении Ньютона была, повидимому, впервые замечена Th. Simpson'ом, который в своей статье: «A determination of the precession of the equinox etc . . .», помещенвой в его «Miscellaneous Tracts», обращает на нее внимание и вводит понятие о моменте количеств движения. Эта статья содержит полное развитие теории прецессии по Ньютону, причем в изложении принят и его метод рассуждений и она представляет превосходное пояснение ньютоновой теории, дополненной рассмотрением нутации, незадолго перед тем открытой. Что касается дальнейшего развития теории прецессии и нутации, то нельзя не упомянуть о статье Poinsot—«Précession des équinoxes» «Additions à la Connaissance des Temps», 1858.

Но сила Луны, производящая движение моря, относится к силе Солнца, как 4.4815 к 1. Сила Луны, производящая движение равноденственных точек, находится в таком же отношении к силе Солнца; отсюда происходит годовое предварение, производимое силою Луны в $40''52'''52^{IV}$; следовательно, полное предварение от обеих сил составит $50''00'''12^{IV}$.

Это движение согласуется с явлениями, ибо по астрономическим наблюдениям предварение равноденствий составляет в год немного более или немного менее $50''$.

Если бы возвышение Земли при экваторе превосходило бы ее возвышение у полюсов более, нежели на $17\frac{1}{2}$ миль, то вещество Земли было бы более разреженным к поверхности, нежели к центру, и предварение равноденствий, вследствие увеличения этой высоты, должно быть увеличено, вследствие же меньшей плотности — уменьшено.

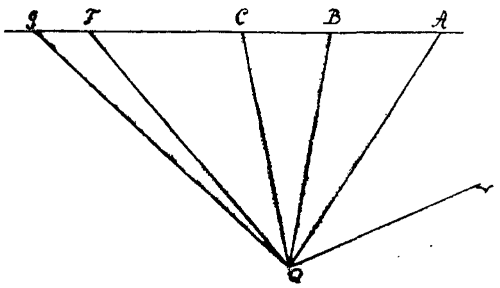
Теперь мы описали систему Солнца, Земли, Луны и планет, остается кое что добавить о кометах.

### Лемма IV

*Кометы находятся далее Луны и бывают в области планет.*

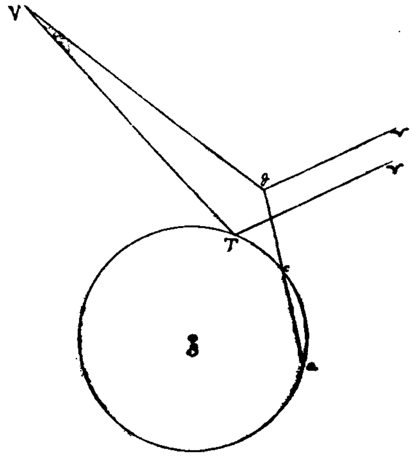
Отсутствие суточного параллакса исключает кометы из области под Луною, по годовому же параллаксу убеждаются, что они спускаются в области планет. Ибо те кометы, которые идут по порядку знаков зодиака, в конце своих появлений имеют или особенно медленное, или даже попятное движение, когда Земля расположена между ними и Солнцем, и много быстрее обыкновенного, когда Земля приходится в противостояниях. Наоборот, те кометы, которые идут по направлению, обратному порядку знаков, имеют движение быстрее обыкновенного в конце их появлений, когда Земля расположена между ними и Солнцем, и медленнее обыкновенного или же попятное, если Земля располагается с противоположной стороны. Это происходит, главным образом, вследствие движения Земли при различном положении ее, подобно тому как и для планет, которые, смотря по тому, направлено ли их движение в одну сторону с Землею, или в противоположную, представляются то идущими попятно, то медленно, то весьма быстро. Если Земля движется в одну сторону с кометой и угловое ее движение вокруг Солнца более быстрое, так что прямые, проводимые от Земли к комете, сходятся за кометой, то комета, рассматриваемая с Земли, вследствие более медленного своего движения, будет казаться идущей попятно; если же Земля движется медленнее кометы, то за вычетом движения Земли комета будет представляться идущей медленнее. Если же Земля перемещается в противоположную сторону, комета будет представляться идущей более быстро. По ускорению или замедлению, или даже по перемене направления движения, можно вывести расстояние до кометы следующим образом. Пусть ♈$QA$, ♈$QB$, ♈$QC$ (фиг. 200)—три наблюденные долготы кометы при начале движения, и пусть ♈$QF$—последняя наблюденная долгота перед исчезанием кометы. Проводим прямую $ABC$ так, чтобы ее отрезки $AB$ и $BC$, заключенные между прямыми $QA$ и $QB$, $QB$ и $QC$, относились между собою, как времена между тремя первыми наблюдениями. Продолжив прямую $AC$ до $G$ так, чтобы отношение $AG$ к $AB$ равнялось отношению промежутков времени между первым и последним наблюдением к промежутку между первым и вторым, проводим прямую $QG$. Если бы комета двигалась равномерно по прямой и Земля находилась в покое или двигалась равномерно и прямолинейно, то угол ♈$QC$ был бы равен долготе кометы при последнем наблюдении. Угол же $FQC$, равный разности долгот, происходит от неравенства движений кометы и Земли. Этот угол, если комета и Земля движутся в противоположные стороны, прилагается к углу ♈$QC$, вследствие чего кажущееся движение кометы становится быстрее, если же комета идет по одному направлению с Землею, этот угол вычитается, вследствие чего кажущееся движение кометы становится медленнее или даже попятным, как уже объяснено. Следовательно, этот угол происходит, главным образом, от движения Земли, и поэтому может быть по справедливости принят за ее параллакс, если пренебречь некоторым его приращением или уменьшением, которые могут происходить от неравномерности движения самой кометы по ее орбите. Расстояние же до кометы по этому параллаксу получается так: пусть $S$ (фиг. 201) представляет Солнце, $acT$—орбиту Земли, $a$—место Земли при первом наблюдении, $c$—место Земли при третьем наблюдении, $T$—место ее при последнем наблюдении и $T$♈—прямая линия проведенная к началу знака Овна. Построив угол ♈$TV$, равный углу ♈$QF$, т. е. равный долготе кометы, когда Земля находится в $T$, соединяем $ac$ и продолжаем ее до $g$ так, чтобы было

$$ag : ac = AG : AC$$




Фиг. 200.

тогда $g$ есть то место, в которое пришла бы Земля, если бы продолжала двигаться равномерно по прямой $ac$. Следовательно, если провести $g♈$ параллельно $T♈$ и построить угол $♈gV$, равный углу $♈QG$, то угол $♈gV$ будет равен долготе кометы, усматриваемой из точки $g$, и угол $TVg$ представит параллакс, происходящий от перемещения Земли из точки $g$ в точку $T$, поэтому $V$ представит место проекции кометы на плоскость эклиптики. Это место $V$ обыкновенно бывает внутри орбиты *Юпитера*. То же самое можно заключить и по кривизне пути комет. Эти тела идут почти по большим кругам, пока их движение более быстрое, в конце же пути, когда та часть кажущегося движения, которая происходит от параллакса, имеет бо́льшую величину по сравнению с полным кажущимся движением, они обыкновенно отклоняются от этих кругов, и когда Земля идет в одну сторону, они отходят в противоположную. Это отклонение происходит, главным образом, от параллакса, вследствие чего и соответствует движению Земли; значительная его величина по моим вычислениям показывает, что исчезающие кометы гораздо ближе Юпитера. Отсюда следует, что в перигеях и перигелиях, когда они всего ближе, они часто заходят внутрь орбит Марса и нижних планет.




Фиг. 201.

Близость комет подтверждается также по свету их ядер. Яркость освещаемых Солнцем небесных тел, уходящих в далекие области, уменьшается пропорционально четвертой степени расстояния, а именно —пропорционально квадрату расстояний, вследствие увеличения расстояния тела до Солнца, и еще раз пропорционально квадрату расстояния, вследствие уменьшения видимого диаметра. Поэтому, если известно количество света и видимый диаметр кометы, то найдется и расстояние, полагая, что ее расстояние находится к расстоянию до планеты в прямом отношении диаметров и в обратном отношении корней квадратных из количества света.

Так, для кометы 1682 г. наименьший диаметр головы, наблюденный *Флемстидом* в 16-футовый телескоп и измеренный микрометром, равнялся $2'0''$, самое же ядро, или звезда посредине головы, занимало лишь десятую часть ее, следовательно было всего в $11''$ или $12''$. По свету же и по яркости головы она превосходила комету 1680 г. и сравнивалась со звездами 1-й или 2-й величины. Положим, что *Сатурн* с своим кольцом был в 4 раза светлее ее: так как свет кольца почти равен свету самого шара, диаметр же шара приблизительно равен 21″, то свет шара и кольца равен свету такого шара, которого диаметр около 30″, и расстояние кометы относится к расстоянию до Сатурна, как

$$\frac{\sqrt{4}}{1}\cdot\frac{12}{30}, \text{ т. е. } \frac{24}{30} \text{ или } \frac{4}{5}.$$

С другой стороны, комета апреля 1665 г., по словам *Гевелия*, превосходила своею яркостью почти все неподвижные звезды и даже была светлее Сатурна, вследствие гораздо более яркого цвета. Эта комета была светлее другой, которая появилась в конце предыдущего года и сравнивалась со звездами 1-й величины. Диаметр головы был около 6′, ядро же, по наблюдениям в подзорную трубу, было значительно менее Юпитера и иногда принималось меньшим, иногда бо́льшим тела Сатурна. Так как диаметр головы комет редко превосходит 8′ или 12′, диаметр же самого ядра, или центральной звезды, составляет около $\frac{1}{10}$ или даже $\frac{1}{15}$ диаметра головы, поэтому и кажется, что эти ядра или большая их часть одинаковой видимой величины с планетами. Так как их свет часто может быть сравнен со светом Сатурна или даже немного его превосходит, то ясно, что все кометы в своих перигелиях располагаются или ближе Сатурна, или же немногим далее. Поэтому совершенно заблуждаются те, которые относят кометы в область близ неподвижных звезд, ибо в этом случае они не более освещались бы нашим Солнцем, нежели находящиеся в наших областях планеты освещаются неподвижными звездами.

Мы рассуждали до сих пор, не рассматривая затемнения комет тем весьма обильным и густым дымом, которым постоянно окружена их голова, просвечивающая всегда как бы через густое облако. Чем более тело затемняется этим дымом, тем ближе оно должно приближаться к Солнцу, чтобы сравниваться с планетами по количеству отражаемого им света. Поэтому становится весьма правдоподобным, что кометы должны спускаться далеко внутрь сферы Сатурна, как и доказано по их параллаксам. То же самое вполне подтверждается по их хвостам, которые происходят или от отражения света Солнца дымом, распространяющимся в эфире, или же от света головы. В первом случае расстояние до комет должно быть уменьшено, ибо иначе пришлось бы приписать распространению дыма, производимому головой комет, совершенно невероятные скорости и протяжения.

В последнем случае весь свет как головы, так и хвоста, надо приписывать ядру. Следовательно, если вообразить, что весь этот свет собран и сосредоточен внутри диска ядра, то ядро наверное, в особенности когда оно испускает большой и яркий хвост, значительно превосходило бы по своему сиянию Юпитер; следовательно, испуская при меньшем видимом диаметре больше света, оно должно бы значительно сильнее освещаться Солнцем и, следовательно, быть гораздо ближе к Солнцу. На основании такого же рассуждения, придется помещать кометы внутри орбиты Венеры, когда их головы, скрываясь за Солнцем, испускают огромные и светлые хвосты, подобные огненным столбам, как то иногда бывает. В этом случае их свет, если бы его весь сосредоточить в ядре, превзошел бы свет Венеры и даже не одной Венеры, а нескольких, соединенных вместе.

То же самое можно вывести и из того, что свет голов возрастает при удалении комет от Земли и приближении их к Солнцу и убывает при их удалении от Солнца и приближении к Земле. Так, последняя комета 1665 г., по наблюдениям *Гевелия,* с того времени, как она была усмотрена, постоянно замедлялась в кажущемся своем движении, следовательно уже прошла через перигей, сияние же головы ее тем не менее ежедневно возрастало, пока комета перестала быть видимой, скрывшись в лучах Солнца. Комета 1683 г. (по наблюдениям того же Гевелия) в конце июля, когда она была впервые усмотрена, двигалась весьма медленно, приблизительно проходя по $40'$ или $45'$ в сутки по своей орбите. В то же время суточное ее движение постоянно возрастало до 4 сентября, когда оно составляло около $5^\circ$, следовательно в продолжение всего этого времени комета приближалась к Земле; об этом можно также заключить и по микрометрическим измерениям диаметра головы, который, по сообщению Гевелия, составлял 6 августа $6'5''$, включая и венец, 2-го же сентября был $9'7''$. Следовательно, в начале голова представлялась значительно меньшей, нежели в конце движения, между тем, как сообщает Гевелий, в начале, поблизости к Солнцу, она казалась гораздо светлее, нежели к концу. Значит, во все это время, вследствие удаления от Солнца, свет ее уменьшался, несмотря на приближение к Земле. Комета 1618 г. около средины декабря и комета 1680 г. в конце того же месяца двигались всего быстрее, следовательно были тогда в перигеях. Однако наибольшее сияние их голов было за 2 недели перед тем, когда они выходили из лучей Солнца, наибольшее же сияние их хвостов — еще немного ранее, в большей близости к Солнцу. Голова первой кометы, по наблюдениям *Цизата*, 1 декабря представлялась больше звезды 1-й величины, декабря же 16-го (будучи тогда в перигее) по-величине мало уменьшилась, по сиянию же и яркости света — весьма значительно. Января 7-го *Кеплер*, неуверенно различая голову, прекратил наблюдения. Декабря 12-го усмотрена и наблюдена *Флемстидом* голова второй кометы в разстоянии 9° от Солнца, что едва было возможно сделать для звезд 3-й величины. Декабря 15-го и 17-го она представлялась как звезда 3-й величины, причем ее яркость была уменьшена облаками после захода Солнца. Декабря 26-го ее движение было самое быстрое, следовательно она находилась ближе всего к перигею, по яркости же она уступала «Рту Пегаса» — звезде 3-й величины. Января 3-го она представлялась звездою 4-й величины, января 9-го — звездою 5-й величины, января 13-го, вследствие увеличившегося сияния Луны, не могла быть наблюдаема, января 25-го едва равнялась звездам 7-й величины. Если брать времена, равноотстоящие от перигея, то голова кометы, которая находилась от Земли в одинаковых удалениях, должна бы представляться одинаково яркой, однако поблизости с Солнцем она сияла всего сильнее, по другую же сторону перигея исчезла. По значительной разности в силе света в этих двух положениях можно заключить о близости кометы к Солнцу в первом из них.

Вообще же яркость комет должна изменяться правильно и представляться наибольшей, когда головы их движутся всего быстрее, т. е. когда они находятся в перигеях, кроме тех случаев, когда эта яркость больше, вследствие близости кометы к Солнцу.

*Следствие 1.* Следовательно, кометы сияют отраженным от них светом Солнца.

*Следствие 2.* Из сказанного становится понятным, почему кометы усматриваются в ближайших к солнцу областях. Еслибы они могли быть видимы в областях далеко за Сатурном, то они чаще бы появлялись в областях, противоположных Солнцу, ибо кометы, находящиеся тут, были бы ближе к Земле, прочие утрачивались бы в лучах Солнца, расположенного между ними и Землею.

На самом же деле, проследив истории комет, оказывается, что их открыто вчетверо или впятеро более в том же полушарии, где находилось Солнце, нежели в противоположном, помимо тех, несомненно, не малочисленных, которые заслонялись светом Солнца. Во всяком случае, при приближении к нашим областям кометы не испускают хвостов и не освещаются настолько Солнцем, чтобы стать видимыми простым глазом ранее того, как они станут ближе Юпитера. Большая же часть объема, заключенного внутри описанного около Солнца настолько малым радиусом шара, лежит от Земли в ту сторону, где Солнце, и в этой большей части кометы, будучи и ближе к Солнцу, сильнее им освещаются.

*Следствие 3.* Отсюда также становится очевидным, что небесные пространства лишены сопротивления. Ибо кометы, следуя по путям наклонным, а иногда даже и противоположным обращениям планет, движутся повсюду вполне свободно и сохраняют свое даже противоположное ходу планет движение весьма продолжительное время. Я даже сомневаюсь, не составляют ли они рода планет, вечно обращающихся по орбитам. Мнение же некоторых писателей, что это—метеоры, выводимое из постоянного изменения вида голов комет, представлнется лишенным основания. Головы комет окружены огромного размера атмосферами, атмосфера же внизу должна быть более плотной. Поэтому все эти изменения усматриваются не в самих головах комет, а лишь в облаках, их окружающих. Так, если бы Землю рассматривать с планет, она, без сомнения, сияла бы своими облаками, и твердое ее тело скрывалось бы за ними. Таким образом пояса Юпитера образованы облаками этой планеты, ибо они меняют относительное свое расположение, самое же тело Юпитера с трудом распознается через эти тучи. В еще большей мере теряются из виду тела комет под их более глубокими и густыми атмосферами.

### Предложение XL. Теорема XX

*Кометы движутся по коническим сечениям, имеющим свой фокус в центре Солнца и описывают радиусами, проводимыми к Солнцу, площади, пропорциональные временам.*

Явствует из следствия 1 предложения XIII книги I при сопоставлении его с предложениями VIII, XII и XIII книги III.

*Следствие 1.* Поэтому, если кометы движутся по замкнутым орбитам, то эти орбиты эллиптические и времена их описания находятся в полукубическом отношении главных осей их к временам обращения планет. Вследствие этого кометы, находясь по большей части вне области планет и описывая орбиты с бóльшими осями, обращаются и более продолжительно. Так, если ось орбиты кометы будет в 4 раза больше оси орбиты Сатурна, то время оборота кометы будет относиться ко времени оборота Сатурна, т. е. к 30 годам, как $4\sqrt{4}$, т. е. как 8 к 1, и составит 240 лет.

*Следствие 2.* Орбиты комет будут поэтому настолько близки к параболе, что их можно принять параболическими без чувствительных погрешностей.

*Следствие 3.* Вследствие этого (по след. 7 предл. XVI кн. I) скорость всякой кометы всегда находится к скорости планеты, обращающейся около Солнца по кругу, в отношении, весьма близком к корню квадратному из отношения удвоенного расстояния планеты до центра Солнца к расстоянию кометы до центра Солнца. Примем радиус орбиты Земли, иначе большую полуось того эллипса, по которому обращается Земля, за 100 000 000 частей, тогда Земля проходит в среднем своем движении в сутки 1 720 212 частей и в час $71\,675\frac{1}{2}$, поэтому комета, находясь в таком же расстоянии от Солнца, как и Земля, будет обладать скоростью, относящеюся к скорости Земли, как $\sqrt{2}:1$, и опишет в сутки при своем движении 2 432 747 частей и в час $10\,134\frac{1}{2}$ части. В большем же или меньшем расстоянии как суточное, так и часовое движение будет находиться к этому в отношении, равном корню квадратному из обратного отношения расстояний, следовательно найдется.

*Следствие 4.* Поэтому, если параметр параболы будет в 4 раза больше радиуса земной орбиты и положить, что квадрат этого радиуса равен 100 000 000 частей, то площадь, описываемая радиусом, проведенным от кометы к Солнцу, в одни сутки составит $1\,216\,373\frac{1}{2}$ части и в час $50\,682\frac{1}{4}$ таких частей. Если же параметр будет больше или меньше, то площадь, описываемая в сутки или в час, будет также больше или меньше в отношении корней квадратных из параметров.

## Лемма V

***Найти параболического рода кривую, проходящую через какое-либо число заданных точек.***

Пусть эти точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ и т. д. (фиг. 202), и из каждой из них опускается перпендикуляр на какую-либо заданную по положению прямую $HN$; пусть эти перпендикуляры суть: $AH$, $BJ$, $CK$, $DL$, $EM$, $FN, \ldots$

*Случай 1.* Если расстояния между точками $H, J, K, L, M, N, \ldots$ между собою равны, то, обозначая ординаты[200]

$$AH = y_1,\quad BJ = y_2,\quad CK = y_3,\quad DL = y_4,\quad ME = y_5,\quad NF = y_6, \ldots$$

[200] При изложении этого доказательства, ньютоновы обозначения заменены общеупотребительными теперь, чтобы легче было следить за ходом самого рассуждения.

составляем их первые разности:

$$b_1 = y_2 - y_1;\quad b_2 = y_3 - y_2;\quad b_3 = y_4 - y_3;\quad b_4 = y_5 - y_4;\quad b_5 = y_6 - y_5,$$

затем вторые:

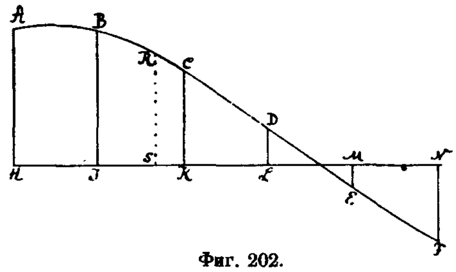
$$c_1 = b_2 - b_1;\quad c_2 = b_3 - b_2;\quad c_3 = b_4 - b_3;\quad c_4 = b_5 - b_4,$$

третьи:

$$d_1 = c_2 - c_1,\quad d_2 = c_3 - c_2,\quad d_3 = c_4 - c_3$$

и продолжаем таким образом далее, пока не дойдем до последней разности, которая в этом случае есть $f_1$, так что получается такая таблица:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_5 & & y_6 \\
 & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \\
 & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & \\
 & & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & & \\
 & & & & e_1 & & e_2 & & & & \\
 & & & & & f_1 & & & & &
\end{array}$$




Фиг. 202.

Проведя затем какой-либо перпендикуляр $RS$, принимаем его за ординату произвольной точки $R$ искомой кривой, и пусть абсцисса точки $R$ равна $x$. Абсциссы же точек $H, J, K, L, \ldots$ соответственно

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4, \ldots,$$

и примем, что все разности

$$x_2 - x_1,\quad x_3 - x_2,\quad x_4 - x_3 \quad \text{и т. д.}$$

равны 1.

Положим затем:

$$\begin{aligned}
p &= x - x_1 \\
q &= \frac{1}{2} p (x - x_2) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2) \\
r &= \frac{1}{3} q (x - x_3) = \frac{1}{2 \cdot 3}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
s &= \frac{1}{4} r (x - x_4) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
t &= \frac{1}{5} s (x - x_5) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5),
\end{aligned}$$

продолжая таким образом, пока не дойдем до предпоследнего перпендикуляра; тогда будем иметь

$$y = y_1 + b_1 p + c_1 q + d_1 r + e_1 s + f_1 t + \ldots$$

Производя это вычисление, надо обращать должное внимание на знаки.

*Случай 2.* Когда же промежутки $HJ$, $JK$ и т. д. между точками $H$, $J$, $K$, $L$,... между собою не равны, тогда, составляя величины $b_1$, $b_2$, ..., надо разности ординат делить на разности их абсцисс; составляя величины $c_1$, $c_2$, ..., надо разности величин $b$ делить на разности абсцисс, взятых через одну, составляя величины $d_1$, $d_2$, ..., надо разности величин $c$ делить на разности абсцисс, взятых через две и т. д., так что будет:

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad b_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \qquad b_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \text{ и т. д.}$$
$$c_1 = \frac{b_2 - b_1}{x_3 - x_1}, \qquad c_2 = \frac{b_3 - b_2}{x_4 - x_2}, \qquad c_3 = \frac{b_4 - b_3}{x_5 - x_3}$$
$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{x_4 - x_1}, \qquad d_2 = \frac{c_3 - c_2}{x_5 - x_1},$$

и т. д.

После того как эти разности найдены, положив

$$\begin{aligned} p &= x - x_1 \\ q &= p(x - x_2) = (x - x_1)(x - x_2) \\ r &= q(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ s &= r(x - x_4) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ t &= s(x - x_5) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5), \end{aligned}$$

будем иметь [201]

$$y = y_1 + b_1 p + c_1 q + d_1 r + e_1 s + f_1 t + \ldots$$

*Следствие.* На основании этого могут быть находимы по приближению площади любых кривых, ибо если взять на той кривой, площадь которой ищется, какое-либо число точек и вообразить, что через них проведена парабола, то площадь этой параболы будет приблизительно равна искомой площади кривой. Площадь же всякой параболы может быть всегда найдена по известным геометрическим способам.

### Лемма VI

*По нескольким местам кометы, известным по наблюдениям, найти ее место в данное время.*

Пусть $HJ$, $JK$, $KL$, $LM$,... (фиг. 202) представляют промежутки между наблюдениями, $HA$, $IB$, $KC$, $LD$, $ME$ — пять наблюденных долгот

---

[201] Доказательство этой формулы, данное самим Ньютоном, см. мою статью «Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений». В этой статье подробно разобран и пояснен примерами способ Ньютона определения параболических орбит комет.

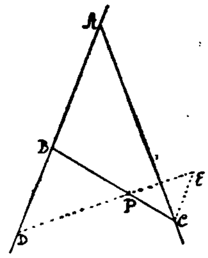
кометы, $HS$ — какое-либо заданное время, долгота в которое ищется. Если вообразить, что через точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ проведена правильная кривая $ABCDE$, и по предыдущей лемме найти ее ординату $RS$, то $RS$ и представит требуемую долготу.

По такому же способу по пяти наблюденным широтам найдется широта для любого данного времени.

Если разности наблюденных долгот малые, напр. 4° или 5°, то достаточно трех или четырех наблюдений для получения новой долготы и широты. Когда же разности больше, напр. 10° или 20°, то надо пользоваться пятью наблюдениями.

### Лемма VII

*Через заданную точку $P$ провести прямую $BC$ так, чтобы ее отрезки $PB$, $PC$, отсекаемые заданными по положению прямыми $AB$ и $AC$, находились в данном друг к другу отношении.*



Фиг. 203.

От данной точки $P$ (фиг. 203) проводится к одной из данных прямых $AB$ какая-либо прямая $PD$ и продолжается в сторону другой прямой $AC$ до точки $E$ так, чтобы отношение $PE$ к $PD$ равнялось заданному. Пусть $EC$ параллельна $AD$, тогда проведя $CPB$ и получим

$$PC : PB = PE : PD.$$

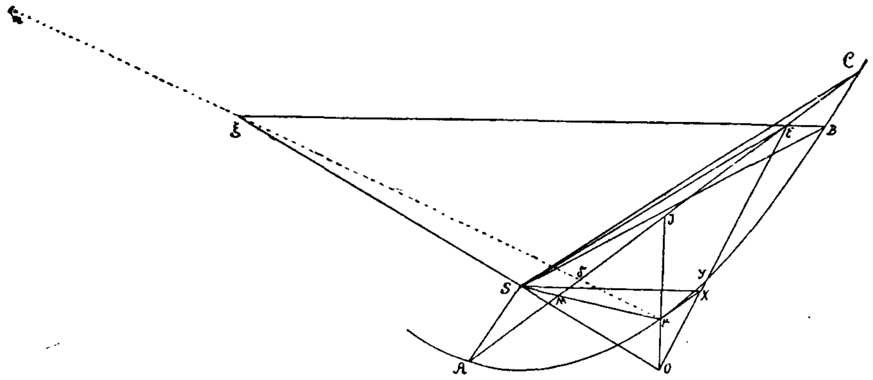
### Лемма VIII

*Пусть $ABC$ есть парабола, имеющая своим фокусом $S$. Хордою $AC$, разделенной в точке $J$ пополам, отсекается сегмент $ABCJ$, коего диаметр $J\mu$ и вершина $\mu$. На продолжении $J\mu$ берется длина $\mu O$, равная половине $J\mu$. Соединив $SO$, продолжают ее до $\xi$ так, чтобы $S\xi$ было равно $2SO$. Если комета $B$ движется по дуге $CBA$ и провести $\xi B$, пересекающую $AC$ в $E$, то я утверждаю, что точка $E$ отсекает от хорды $AC$ сегмент $AE$, приблизительно пропорциональный времени.*

Проводим $EO$ (фиг. 204), пересекающую дугу параболы $ABC$ в $Y$, и прямую $\mu X$, касательную к ней в вершине $\mu$ и пересекающую $EO$ в $X$; тогда криволинейная площадь $AEX\mu A$ будет относиться к криволинейной площади $ACY\mu A$, как $AE$ к $AC$, а так как площадь треугольника $ASE$ находится в таком же отношении к площади треугольника $ASC$, то и отношение полной площади $ASEX\mu A$ к площади $ASCY\mu A$ равно $AE$ к $AC$. Так как

$$\xi O : SO = 3 : 1 = EO : XO$$

то $SX$ параллельна $EB$, и если провести $BX$, то площадь треугольника $SEB$ будет равна площади треугольника $XEB$. Следовательно, если к площади $ASEX\mu A$ придать площадь треугольника $EXB$ и из суммы вычесть площадь треугольника $SEB$, то остается площадь $ASBX\mu A$, равная площади $ASEX\mu A$, значит так относящаяся к площади $ASCY\mu A$, как $AE$ к $AC$.



Фиг. 204.

Но площадь $ASBX\mu A$ приблизительно равна площади $ASBY\mu A$, площадь же $ASBY\mu A$ относится к площади $ASCY\mu A$, как время описания дуги $AB$ к времени описания всей дуги $AC$, следовательно отношение $AE$ к $AC$ приблизительно равно отношению времен.

### *ПОУЧЕНИЕ*

Если провести $\mu\xi$, пересекающую $AC$ в $\delta$, и взять длину $\xi n$ так, чтобы было

$$\xi n : \mu B = 27 MJ : 16 M\mu$$

и провести $Bn$, то эта прямая рассечет хорду в отношении, гораздо более близком к отношению времен, нежели ранее. Точка $n$ располагается за точкою $\xi$, когда точка $B$ более удалена от главной вершины параболы, нежели точка $\mu$, и по сю сторону, если точка $B$ ближе к главной вершине параболы, нежели $\mu$.

### Лемма IX

*Длины $J\mu$, $\mu M$ и $\frac{AJ \cdot JC}{4S\mu}$ равны между собою.*

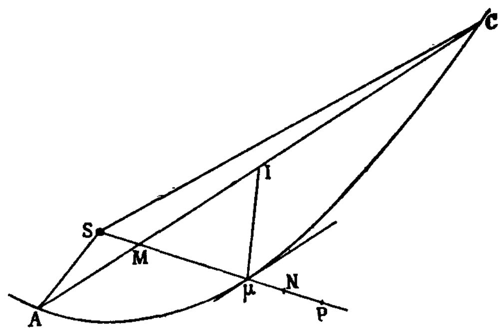
Ибо $4S\mu$ есть параметр параболы, принадлежащий вершине $\mu$.[202]

### Лемма X

*Если прямую $S\mu$ продолжить до точек $N$ и $P$ так, чтобы $\mu N$ было равно $\frac{1}{3}\mu J$ и чтобы имела место пропорция*

$$SP : SN = SN : S\mu,$$

*то комета, двигаясь равномерно с такою скоростью, которую она имеет в удалении $SP$ от Солнца $S$, описала бы длину, равную хорде $AC$, в такое же время, в какое она описывает дугу $A\mu C$.*



Фиг. 205.

Если бы комета с тою скоростью, которою она обладает в точке $\mu$ (фиг. 205), продолжала бы двигаться равномерно по прямой, касающейся параболы в этой точке, то площадь, описываемая радиусом, проводимым в точку $S$, была бы равна параболической площади $ASC\mu$, описанной в такое же время. Следовательно, произведение отрезка касательной, пройденного кометою, на длину $S\mu$, относилось бы к произведению $AB \cdot SM$, как площадь $ASC\mu$ к площади треугольника $ASC$, т. е. как $SN : SM$. Поэтому $AC$ относится к длине, пройденной по касательной, как $S\mu : SN$. Но так как в расстоянии $SP$ скорость кометы (по след. 6 предл. XVI кн. I) относится к ее скорости в расстоянии $S\mu$, как $\sqrt{S\mu} : \sqrt{SP}$, т. е. как $S\mu : SN$, то длина, описываемая в такое же время с этою скоростью, будет относиться к длине, описанной по касательной, как $S\mu : SN$, значит хорда $AC$ и длина, описываемая с этою новой скоростью, находятся в одном и том же отношении к длине, описываемой по касательной, следовательно они равны между собою.[203]

---

[202] Эта лемма есть повторение леммы XIII книги I, в примечании к которой и дано ее доказательство.

[203] Лагранж в своей «Mécanique Analytique» (7-me section, § 26), приведя так называемую формулу Эйлера или Ламберта, которой выражается связь между временем, двумя радиу-

*Следствие.* Следовательно, комета, двигаясь равномерно со скоростью, которою она обладает в расстоянии $S\mu + \frac{2}{3} J\mu$, описала бы хорду $AC$ приблизительно в то же самое время, как и дугу параболы $A\mu C$.

## Лемма XI

*Если бы комета, не обладающая никаким движением, была бы пущена с расстояния $SN$ или $S\mu + \frac{1}{3} J\mu$ свободно падать на Солнце, причем на нее продолжала бы все время действовать одинаково та сила, которая на нее действовала вначале, она прошла бы путь, равный $J\mu$, в продолже-*

---

сами-векторами и хордою при движении кометы по параболе, говорит: «Эта изящная формула была сперва дана Эйлером в томе VII *«Miscellanea Berolinensis»*. Ее можно вывести из леммы X книги III ньютоновых «Начал», выразив аналитически то построение, которым Ньютон определяет скорость, двигаясь с которою равномерно точка прошла бы хорду в такое же время, как комета проходит соответствующую дугу параболы. Для этого надо заметить, что для параболы полусумма радиусов-векторов, идущих к концам любой дуги, всегда равна радиусу-вектору, идущему к вершине этой дуги, сложенному с ее стрелкою, т. е. с отрезком диаметра, заключенным между этою вершиною и серединою хорды; отсюда, на основании леммы IX, получается величина этого радиуса-вектора, выраженного через хорду и через радиусы-векторы концов дуги». Пользуясь этим указанием Лагранжа и сделав следующие обозначения:

$$SA = r_1;\quad SC = r_2;\quad S\mu = r;\quad J\mu = x;\quad AC = \sigma$$

$$r_1 + r_2 = s,$$

будем иметь:

$$r + x = \frac{1}{2} s \quad \text{(по указанию Лагранжа)} \tag{1}$$

$$x = \frac{1}{16} \frac{\sigma^2}{r} \quad \text{(по лем. IX)} \tag{2}$$

$$3k\sqrt{2}\,(t_2 - t_1) = (3r + x)\frac{\sigma}{\sqrt{r}} \quad \text{(по лем. X)}, \tag{3}$$

причем в последней формуле $k$ есть некоторая постоянная, о которой будет сказано ниже (примеч. 205).

Из формул (1) и (2) следует, что $r$ и $x$ определяются как корни уравнения

$$v^2 - \frac{1}{2} sv + \frac{1}{16} \sigma^2 = 0.$$

Если фокус лежит вне сегмента, ограниченного рассматриваемою дугою параболы и ее хордою, то стрелка $x < r$, и надо брать:

$$\left.\begin{aligned} r = v_1 = \frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \\ x = v_2 = \frac{1}{4}\left(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

когда же фокус лежит внутри этого сегмента, то будет $x > r$, и надо брать:

$$\left.\begin{aligned} r = v_2 = \frac{1}{4}\left(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \\ x = v_1 = \frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

*ние половины того времени, в течение коего, двигаясь по орбите, она описывает дугу $A\mu C$.*

Ибо комета в продолжение такого времени, в которое она описывает дугу параболы $AC$, двигаясь равномерно со скоростью, соответствующей расстоянию $SP$ (по лем. X), проходит длину, равную хорде $AC$, поэтому (по след. 7 предл. XVI кн. I), обращаясь под действием силы своего тяготения по кругу, коего радиус $SP$, она описала бы дугу, длина коей относится к длине хорды $AC$, как $1 : \sqrt{2}$. Поэтому, падая на Солнце с расстояния $SP$ под действием такой силы, с какою она притягивается к Солнцу в этом расстоянии, комета описала бы в половину того же промежутка времени (по след. 9 предл. IV кн. I) путь, ранный квадрату этой полухорды, разделенному на учетверенную высоту $SP$, т. е. путь,[204] равный

---

Положим, что имеет место первый случай, тогда будет по формуле (3):

$$3k\sqrt{2}\,(t_2 - t_1) = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{r}}$$

но очевидно

$$8r = 2s + 2\sqrt{s^2 - \sigma^2} = (\sqrt{s+\sigma} + \sqrt{s-\sigma})^2$$

следовательно будет

$$3k(t_2 - t_1) = \frac{2\left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2-\sigma^2}\right)\sigma}{\sqrt{s+\sigma} + \sqrt{s-\sigma}} = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2-\sigma^2}\right)(\sqrt{s+\sigma} - \sqrt{s-\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{2}(s+\sigma)^{\frac{3}{2}} - (s-\sigma)^{\frac{3}{2}}$$

т. е.

$$6k(t_2 - t_1) = (s+\sigma)^{\frac{3}{2}} - (s-\sigma)^{\frac{3}{2}}, \tag{6}$$

Совершенно так же во втором случае, на основании формулы (5), получили бы

$$6k(t_2 - t_1) = (s+\sigma)^{\frac{3}{2}} + (s-\sigma)^{\frac{3}{2}}. \tag{6'}$$

Это и суть формулы Эйлера. Равносильность этих формул лемме X Ньютона, таким образом, очевидна.

[204] При расстоянии $SP = r$, в продолжение времени $t$ точка, двигаясь равномерно по кругу со скоростью $v_0$, соответствующей этому расстоянию, прошла бы дугу

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}AC = v_0 t;$$

ускорение при движении по кругу $w = \frac{v_0^2}{r}$, поэтому проходимая в продолжение времени $t$ при прямолинейном падении с таким ускорением высота

$$h = \frac{1}{2}wt^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{r}t^2 = \frac{AC^2}{4r}.$$

В продолженне же нремени $\frac{t}{2}$ высота паденпя будет

$$\frac{1}{4}h = \frac{AC^2}{16r} = \frac{AJ^2}{4SP}$$

$\frac{AJ^2}{4SP}$. Но так как сила притяжения кометы к Солнцу с расстояния $SN$ относится к ее притяжению в расстоянии $SP$, как $SP : S\mu$, то комета, падая под действием постоянной силы, равной силе притяжения ее в расстоянии $SN$, в продолжение того же времени пройдет путь, равный $\frac{AJ^2}{4S\mu}$, т. е. путь, равный $JM$ или $M\mu$ (по лем. IX).

## Предложение XLI. Задача XXI

*Определить по заданным трем наблюдениям орбиту кометы, движущейся по параболе.*

Задача эта весьма трудна; пытаясь ее решить разными способами, я составил некоторые задачи, помещенные в книге I, которые предназначались для решения ее, но затем я нашел следующее несколько более простое решение.

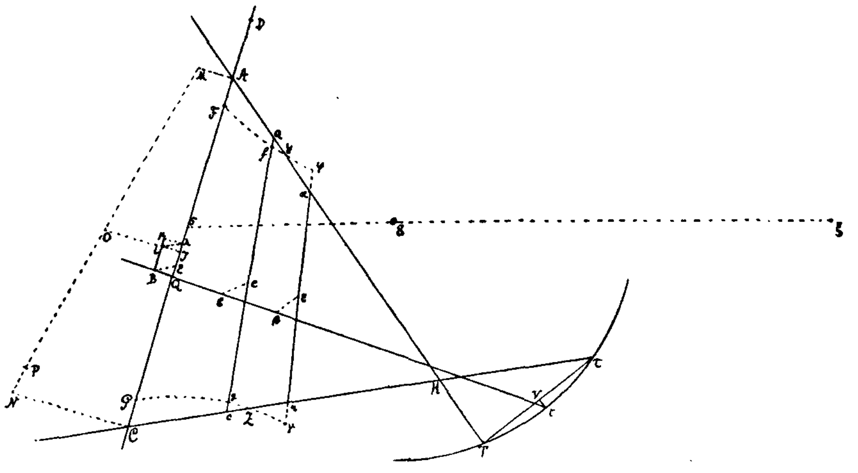
Выбирают три наблюдения, следующих одно за другим приблизительно через равные промежутки времени, причем тот промежуток времени, в который комета движется медленнее, надо брать немного больше другого, так чтобы разность промежутков относилась к их сумме, как эта сумма к 60 дням или около того, иначе чтобы точка $E$ упадала приблизительно в точку $M$ и лучше уклонялась бы от нее к точке $J$, нежели к $A$. Если таких наблюдений нет в готовности, то надо найти новое место кометы по лемме VI.

Пусть $S$ (фиг. 206) представляет Солнце, $T$, $t$, $\tau$ — три места Земли на орбите ее, $TA$, $tB$, $\tau C$ — три наблюденные долготы кометы, $V$ — промежуток времени между первым и вторым наблюдением, $W$ — между вторым и третьим наблюдением, $X$ — длина, которую комета могла бы пройти за время между первым и третьим наблюдением, двигаясь равномерно с такою скоростью, какою она бы обладала, находясь от Солнца в расстоянии, равном среднему расстоянию Земли; эта длина рассчитывается по следствию 3 предложения XL книги III; наконец, $tV$ — перпендикуляр, опущенный на хорду $T\tau$.

На прямой $tB$, соответствующей долготе при среднем наблюдении, берется где-либо точка $B$ и принимается за место проекции кометы на плоскость эклиптики; от этой точки проводится по направлению к Солнцу прямая, по которой откладывается длина $BE$, находящаяся к стрелке $tV$ в отношении, равном отношению произведения $SB \cdot St^2$ к кубу гипотенузы прямоугольного треугольника, коего одна сторона есть $SB$, другая же есть тангенс широты кометы при втором наблюдении и при радиусе $tB$. Через точку $E$ (по лем. VII) проводится прямая $AEC$ так, чтобы ее отрезки $AE$ и $EC$ между точкою $E$ и прямыми $TA$ и $\tau C$ относились бы друг к другу, как $V$ к $W$, тогда $A$ и $C$ будут проекциями кометы на плоскость эклиптики при первом и третьем наблюдениях, если только место $B$ при втором ее наблюдении было принято верно.

Из середины $J$ прямой $AC$ восставь перпендикуляр $Ji$. Через точку $B$ проведи прямую $Bi$, параллельную $AC$. Проведи засечку $Si$, пересекающую $AC$ в $\lambda$, и дополни параллелограмм $iJ\lambda\mu$.

Возьми $J\sigma = 3J\lambda$ и, проведя через Солнце $S$ прямую $\sigma S$, отложи по ней длину $\sigma\xi$, равную $3S\sigma + 3i\lambda$. Сотри точки $A$, $E$, $C$, $J$, и из точки $B$ по



Фиг. 206.

направлению к точке $\xi$ проведи прямую, по которой отложи новую длину $BE$, относящуюся к прежней, как

$$BS^2 : \left(S\mu + \frac{1}{3} i\lambda\right)^2.$$

Через вновь полученную точку $E$ проведи опять прямую $AEC$ по тому же условию, как и прежде, т. е. чтобы было

$$AE : EC = V : W.$$

Полученные точки $A$ и $C$ представят места кометы более точно.

В точке $J$, середине $AC$, восставь к ней перпендикуляр $JO$, и в точках $A$ и $C$ — перпендикуляры $AM$ и $CN$, причем длины их $AM$ и $CN$ соответственно равны тангенсам широты при первом и третьем наблюдениях при радиусах $TA$ и $\tau C$. Проведи $MN$, пересекающую $JO$ в точке $O$.

Построй затем прямоугольник $iJ\lambda\mu$, как и прежде.

На продолжении $JA$ возьми длину $JD$, равную $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Затем от $MN$ в сторону к $N$ отложи длину $MP$, которая находилась бы к найденной выше длине $X$ в отношении корня квадратного из среднего радиуса земной орбиты к корню квадратному из расстояния $OD$.

Если точка $P$ упадет в точку $N$, то $A$, $B$, $C$ и будут тремя местами кометы, через которые и можно бы провести проекцию ее орбиты на плоскость эклиптики.

Если же точка $P$ не упадает в точку $N$, то по прямой $AC$ надо отложить от точки $C$ в ту же сторону от прямой $NC$, как $P$ от $N$, длину $CG = NP$.

Таким же точно способом, по которому построены точки $E$, $A$, $C$, $G$, исходя из принятого положения точки $B$, строятся, приняв еще два какихлибо других ее положения $b$ и $\beta$, новые точки $e$, $a$, $c$, $g$ и $\varepsilon$, $\alpha$, $\varkappa$, $\gamma$. Затем через $G$, $g$, $\gamma$ проводится дуга круга $Gg\gamma$, пересекающая прямую $\tau C$ в точке $Z$; эта точка $Z$ и будет искомою проекцией места кометы при третьем наблюдении на плоскость эклиптики.

Если по прямым $AC$, $ac$ и $\alpha\varkappa$ отложить длины $AF$, $af$, $\alpha\varphi$, соответственно равные $CG$, $cg$, $\varkappa\gamma$, и через точки $F$, $f$, $\varphi$ провести дугу круга $Ff\varphi$, пересекающую прямую $AT$ в точке $Y$, то эта точка $Y$ будет проекцией места кометы на плоскость эклиптики при первом наблюдении.

В точках $Y$ и $Z$ восставляются перпендикуляры, равные тангенсам широт кометы при радиусах $TY$ и $\tau Z$, тогда получатся два места кометы, принадлежащие истинной орбите ее. Затем, по предложению XIX книги I, через эти две точки проводится парабола, имеющая своим фокусом точку $S$. Эта парабола и будет искомою орбитою.

Доказательство этого построения следует из лемм: в самом деле, прямая $AC$ рассекается по лемме VII точкою $E$ в отношении времен, как то требуется леммою VIII. Длина $BE$ по лемме XI составит часть прямой $BS$ или $B\xi$, заключенную на плоскости эклиптики между дугою $ABC$ и хордою $AEC$, и $MP$ (по следствию лем. X) будет хордою дуги, описываемой кометой в ее движении по своей орбите между первым и третьим наблюдениями; поэтому эта длина должна бы ранняться $MN$, если бы точка $B$ была бы действительно проекцией места кометы на плоскость эклиптики при втором наблюдении. [205]

[205] Как уже упомянуто выше (примеч. 201), подобный разбор способа Ньютона для определения параболической орбиты кометы помещен в моей статье: «Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений», помещенной в выпуске 1

Точки $B$, $b$, $\beta$ не следует брать как-нибудь, но поблизости истинного места проекции кометы. Если приблизительно известен угол $AQt$, под которым проекция орбиты на плоскость эклиптики пересекает прямую $tB$, то надо провести под этим углом прямую $AC$ так, чтобы было

$$AC : \frac{4}{3}\,T\tau = \sqrt{SQ} : \sqrt{St},$$

---

«Известий Николаевской Морской Академии»; не приводя этого разбора полностью, ограничиваюсь тою его частью, которая относится к этому предложению, требующему пояснений как относительно построения, так и доказательства.

Условимся обозначать буквами со значками точки плоскости орбиты, коих проекции на плоскости эклиптики обозначены теми же буквами без значков.

Дадим сперва некоторые пояснения, относящиеся к построению.

Длина X, рассчитываемая по следствию 3 предложения XL книги III, находится по формуле

$$X = \frac{2\pi}{365.256\ldots}\, a \cdot \sqrt{2}\,(t_3 - t_1),$$

где $a$ есть длина большой полуоси земной орбиты. Постоянный множитель $\frac{2\pi}{365.256\ldots}$ Ньютон дает равным 0.017 202 12. Гаус, принимая массу Земли $m = \frac{1}{354\,710}$ и звездный год равным 365.256 383 5 средних солнечных суток, получает для сказанной постоянной величину

$$k = \frac{2\pi}{365.256\ldots\sqrt{1+m}} = 0.017\,202\,098\,95,$$

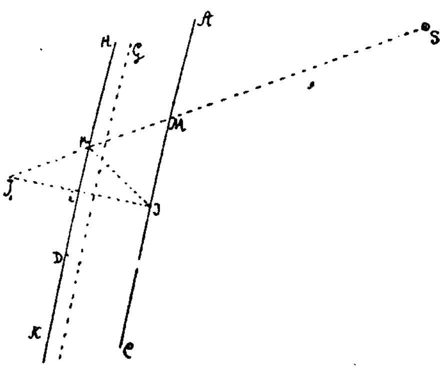
т. е. число, весьма близкое к ньютонову.

Длина $BE$ есть проекция стрелки $B'E'$, представляющей как бы путь, пройденный кометою по направлению к Солнцу равномерно ускоренным движением; сравнивая эту стрелку с таковою $tV$ для Земли, будем иметь пропорцию

$$B'E' : tV = SE^2 : B'S^2,$$

ибо ускорения обратно пропорциональны квадратам расстояний кометы и Земли до Солнца. Чтобы получить $BE$, надо спроектировать $B'E'$ на плоскость эклиптики, для чего надо $B'E'$ умножить на отношение $SB : SB'$; таким образом получится

$$BE = tV \cdot \frac{SE^2 \cdot SB}{SB'^3}$$



Фиг. 207.

Построение поправочного параллелограмма $iJ\lambda\mu$ является самым существенным в методе, и так как даваемое в тексте — *приближенное*, то оно требует сравнения с *точным*, чтобы видеть степень приближения.

Вообразим сперва, что построение делается в плоскости самой орбиты, а затем проектируется на плоскость эклиптики. Пусть (фиг. 207) $S$ есть Солнце — фокус параболы, $AC$ — хорда, $HK$ — параллельная ей касательная в вершине сегмента. Чтобы построить эту вершину $\mu$, в силу леммы IX надо найти на касательной такую точку $\mu$, соединив которую с фокусом $S$ и с серединою хорды $J$ получили бы *равные* длины: $J\mu = \mu M$; для этого стоит проведя затем прямую $SEB$, коей отрезок $EB$ был бы равен $Vt$, получим то место точки $B$, которое надо принять за исходное.

После того как прямая $AC$ будет стерта и затем вторично построена по указанному выше и будет, сверх того, найдена длина $MP$, то на прямой $tB$ точку $b$ надо взять так, чтобы было

$$\frac{Hb}{HB} = \frac{MP}{MN} \cdot \sqrt{\frac{SB}{Sb}},$$

причем точка $H$ есть пересечение прямых $TA$ и $\tau C$.

---

только по перпендикуляру к хорде и касательной, проведенному через точку $J$, отложить длину $iJ_1 = iJ$ и полученную точку $J_1$ соединить с точкою $S$; в пересечении прямой $J_1S$ с касательною $HK$ и получится искомая точка $\mu$.

Но касательной к вершине не дано, а имеется лишь некоторая точка $B$, лежащая на параболе и близкая к вершине $\mu$ сегмента.

По лемме IX уравнение искомой параболы, отнесенной к касательной к вершине $HK$ и к сопряженному с нею диаметру $\mu J$, есть

$$Y^2 = 2p_1 X,$$

причем

$$2p_1 = 4S\mu.$$

Для точки $B$ абсцисса $X = BD$, ордината $Y = \mu D$, поэтому

$$BD = \frac{\mu D^2}{4S\mu}.$$

С другой стороны,

$$J\mu = \frac{AJ^2}{4S\mu}$$

следовательно

$$\frac{BD}{J\mu} = \left(\frac{\mu D}{AJ}\right)^2.$$

Обозначим для краткости через $\tau_1$ и $\tau_2$ — промежутки $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_2$. Длина $\mu D$ соответствует пути, проходимому кометою в продолжение времени

$$\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)$$

длина же $AJ$ — времени $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, следовательно приближенно будет

$$BD = \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right)^2 \cdot J\mu. \tag{2}$$

Если $BD$ настолько мало по сравнению с $JM$, что может быть пренебрежено, то прямую $BG$ можно будет принять за касательную и по ней построить вершину параболы.

Во всяком случае можно принять это в первом приближении, после чего снять от полученного приближенного места вершины расстояние до точки $B$, рассчитать исправленное значение $BD$ по формуле (2), нанести точку $D$, провести исправленное положение касательной, на которой и найдется исправленное место вершины $\mu_1$.

Получив это место по лемме XI, расчисляем длину $J\mu$ или $\mu M$ по формуле

$$J\mu = \mu M = \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{SN^2}$$

причем

$$k = 0.017\,2020\ldots \quad \text{и} \quad SV = S\mu_1 + \frac{1}{3} J\mu_1,$$

По такому же способу надо найти и место третьей точки $\beta$, если бы потребовалось повторить построение и в третий раз, но следуя этому правилу, достаточно сделать его лишь 2 раза, ибо когда расстояние $Bb$ весьма мало, то после того как точки $F$, $f$, $G$ и $g$ найдены, достаточно провести прямые $Ff$ и $Gg$, которые и пересекут $TA$ и $\tau C$ в искомых точках $Y$ и $Z$.

---

и получаем исправленную величину стрелки $J\mu$, пользуясь которой строим исправленное место касательной и т. д., пока два последовательные приближения не будут совпадать.

Но Ньютон выполняет построение не в плоскости орбиты, а в проекции на плоскость эклиптики.

Для проекции орбиты, которая, очевидно, также будет параболою, *Солнце $S$ уже не будет фокусом*, поэтому проекции длин $J\mu$ и $\mu M$ между собою не равны и вышеприведенного *точного* построения вершины сегмента параболы по данной его хорде и касательной к вершине выполнить нельзя, ибо место фокуса неизвестно.

Чтобы обойти это затруднение, Ньютон пользуется тем обстоятельством, что величина $\mu i$ мала по сравнению с $S\mu$, и значит, *прямые $S\mu$ и $Si$ можно принять за параллельные*, что он и делает, откуда и следует даваемое им построение точки $\mu$, т. е. проекции вершины сегмента параболы. Эта точка, очевидно, есть вместе с тем и вершина сегмента проектированной орбиты.

Для получения второго приближения следовало бы рассчитать длину $\mu M$ проекции стрелки и эту исправленную длину отложить по направлению прямой $S\mu$ от точки $M$; получили бы исправленное положение касательной.

Но Ньютон величиною $BD$, описывая свое построение, пренебрегает, по разборе же его примера и указанной выше моей статье я убедился по приведенным им числам, что эта поправка была им введена. Пренебрегая же длиною $BD$, Ньютон прямо исправляет положение точки $E$, делящей хорду в отношении промежутков, причем $B\xi$ и $S\mu$ считает параллельными и, следовательно, длину $BE$ равной длине $\mu M$, откуда и следует его построение.

Но лемма XI дает *длину $J\mu$, которая равна $M\mu$ в плоскости орбиты, но не в проекции*, и угол между $J\mu$ и $M\mu$ — конечный, поэтому отношение проекций этих длин может отличаться на конечную величину от 1, в каковом случае упрощенное построение Ньютона не будет обладать любою степенью точности, а лишь ограниченной.

Очевидно, что обратив внимание на точное построение, которое надлежало бы выполнить в плоскости орбиты, нетрудно ввести в описанное Ньютоном надлежащие поправки в тех случаях, когда ими пренебрегать нельзя, что и сделано в ряде примеров, данных в моей статье.

Указанное в лемме X расстояние $SP$, служащее для расчета длины хорды $A'C'$, выражается формулою

$$SP = \left(S\mu' + \frac{1}{3} M'\mu'\right)^2 : S\mu'$$

обозначая буквами со значками точки, лежащие в плоскости орбиты, проекции коих обозначены теми же буквами без значков.

Следовательно, будет

$$S\mu'^2 = S\mu^2 + JO^2$$

принимая приближенно, что возвышение точек $\mu$ и $J$ над плоскостью эклиптики одинаково. Затем

$$i'\lambda' = i\lambda \cdot \frac{S\mu'}{S\mu};$$

## *ПРИМЕР*

Предлагается комета 1680 г. Движение ее, наблюденное *Флемстидом*, вычисленное по этим наблюдениям, а затем, на основании тех же наблюдений, исправленное *Галлеем*, показано в следующей таблице:

| Год, месяц и число | Истинное время | Среднее время | Долгота солнца | Долгота кометы | Широта кометы |
|---|---|---|---|---|---|
| 1680 дек. 12 . . . | 4ч 46 м | 4ч 46м 0с | 271°51′23″ | 276°32′30″ | 8°28′ 0″N |
| 21 . . . | 6 32½ | 6 36 59 | 281 6 44 | 305 8 12 | 21 42 13 |
| 24 . . . | 6 12 | 6 17 52 | 284 9 26 | 318 49 23 | 25 23 5 |
| 26 . . . | 5 14 | 5 20 44 | 286 9 22 | 328 24 13 | 27 0 52 |
| 29 . . . | 7 55 | 8 3 2 | 289 19 43 | 343 10 41 | 28 9 58 |
| 30 . . . | 8 2 | 8 10 26 | 290 21 9 | 347 38 20 | 28 11 53 |
| 1681 янв. 5 . . . | 5 51 | 6 1 38 | 296 22 18 | 8 48 53 | 26 15 7 |
| 9 . . . | 6 49 | 7 0 53 | 300 29 2 | 18 44 4 | 24 11 56 |
| 10 . . . | 5 54 | 6 6 10 | 301 27 43 | 20 40 50 | 23 43 52 |
| 13 . . . | 6 56 | 7 8 55 | 304 33 20 | 25 59 48 | 22 17 28 |
| 25 . . . | 7 44 | 7 58 42 | 316 45 36 | 39 35 0 | 17 56 30 |
| 30 . . . | 8 7 | 8 21 53 | 321 49 58 | 43 19 51 | 16 42 18 |
| февр. 2 . . . | 6 20 | 6 34 51 | 324 46 59 | 45 13 53 | 16 4 1 |
| 5 . . . | 6 50 | 7 4 41 | 327 49 51 | 46 59 6 | 15 27 3 |

---

подставляя, получим

$$SP = S\mu' \left[1 + \frac{1}{3}\frac{i\lambda}{S\mu}\right]^2 = S\mu' + \frac{2}{3}\, i\lambda \frac{S\mu'}{S\mu} + \ldots = S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda + \ldots =$$

$$= \sqrt{\left(S\mu + \frac{2}{3}\, i\lambda\right)^2 + JO^2} = OD$$

причем пренебрегается величинами $\frac{i\lambda^2}{S\mu}$ и ей подобными.

Точки $F, f, \varphi$ суть не что иное, как «ложные положения» точки $Z$. Ясно, что эту часть чертежа можно выполнять и отдельно в произвольном масштабе, откладывая лишь при точках $A$, $a$, $\alpha$ длины, пропорциональные $AF$, $af$, $\alpha\varphi$, так чтобы проведя через точки $F, f, \varphi$ «согласную кривую» (дугу круга по Ньютону), получить отчетливое пересечение с прямою $T_1A$ или, вообще, с принятою условно за изображение оси $Aa\alpha$, служащей для построения «ложных положений». К подобному графическому решению Ньютон прибегает и в следствии 7 предложения IV книги II.

После того как получены точки $A$ и $C$ — проекции на плоскость эклиптики мест кометы при первом и третьем наблюдении, дальнейшее определение элементов построением настолько просто, что Ньютон не считает нужным о нем даже упоминать.

В самом деле, отложив по перпендикулярам прямой $YZ$ в точках $Y$ и $Z$ длины

$$A'Z = TY \cdot \operatorname{tg}\beta_1$$

и

$$C'Y = \tau Z \cdot \operatorname{tg}\beta_3$$

К этим я присовокупляю еще несколько наблюдений из своих собственных:

| | Истинное время | Долгота кометы | Широта кометы |
|---|---|---|---|
| 1681 февр. 25 . . . . . . | $8^ч30^м$ | 56°18′35″ | 12°46′46″ $N$ |
| 27 . . . . . . | 8 15 | 57 4 30 | 12 36 12 |
| март. 1 . . . . . . | 11 0 | 57 52 42 | 12 23 40 |
| 2 . . . . . . | 8 0 | 58 12 48 | 12 19 38 |
| 5 . . . . . . | 11 30 | 59 18 0 | 12 3 16 |
| 7 . . . . . . | 9 30 | 60 4 0 | 11 57 0 |
| 9 . . . . . . | 8 30 | 60 43 4 | 11 45 52 |

Эти наблюдения произведены 7-футовым телескопом и нитяным микрометром, помещенным в фокусе телескопа. Этими инструментами я определял как относительные положения неподвижных звезд, так и кометы.

Пусть $A$ (фиг. 208) представляет звезду 4-й величины в левой пятке Персея (Кат. *Bayer* $o$), $B$ — следующую звезду в его левой пятке (*Bayer* $\xi$) и $C$ — звезду 6-й величины (*Bayer* $n$) на лодыжке той же ноги; $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $J$, $K$, $L$, $M$, $N$, $O$, $Z$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — другие меньшие звезды в той же ноге; $p$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $V$, $X$ — места кометы, приведенные выше.

Принимая расстояние $AB = 80\frac{7}{12}$ части, было:

$$AC = 52\frac{1}{4};\quad BC = 58\frac{5}{6};\quad AD = 57\frac{5}{12};\quad BD = 82\frac{6}{11}$$
$$CD = 23\frac{2}{3};\quad AE = 29\frac{4}{7};\quad CE = 57\frac{1}{2};\quad DE = 49\frac{11}{12}$$
$$AJ = 27\frac{7}{12};\quad BJ = 52\frac{1}{6};\quad CJ = 36\frac{7}{12};\quad DJ = 53\frac{5}{11}$$
$$AK = 38\frac{2}{3};\quad BK = 43;\quad CK = 31\frac{5}{9};\quad FK = 29$$
$$FB = 23;\quad FC = 36\frac{1}{4};\quad AH = 18\frac{6}{7};\quad DH = 50\frac{7}{8}$$
$$BN = 46\frac{5}{12};\quad CN = 31\frac{1}{3};\quad BL = 45\frac{5}{12};\quad NL = 31\frac{5}{7}$$

---

где $\beta_1$ и $\beta_3$ — геоцентрические широты кометы при первом и третьем наблюдении, получим совмещенные положения мест кометы $A'$ и $C'$ на плоскости эклиптики.

Продолжив прямую $A'C'$ до пересечения в точке $\Omega$ с ее проекцией $YZ$, получим точку, принадлежащую линии узлов; соединив эту точку с $S$, получаем линию узлов, а значит, и долготу восходящего узла.

Вообразив, что плоскость истинной орбиты совмещена с плоскостью эклиптики поворотом около линии, получим точки $A_1$ и $C_1$ — совмещенные места кометы, через которые если провести параболу, имеющую свой фокус в $S$, то получится искомая орбита в совмещенном с плоскостью эклиптики положении.

$OH$ относилась к $HJ$, как 7 к 6, и по продолжении проходила между звездами $D$ и $E$, так что расстояние звезды $D$ от этой прямой равнялось

$$\frac{1}{6}\,CD.$$

$LM$ относилась к $LN$, как 2 к 9, и по продолжении проходила через звезду $H$. По этим данным были определены относительные положения неподвижных звезд.

Затем *Поунд* вновь пронаблюдал относительные положения этих звезд и свел их долготы и широты в следующую таблицу:

| Звезда | Долгота | Широта $N$ | Звезда | Долгота | Широта $N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 56°41′50″ | 12° 8′36″ | $K$ | 57°42′ 7″ | 11°53′21″ |
| $B$ | 58 40 23 | 11 17 54 | $L$ | 59 33 34 | 12 7 48 |
| $C$ | 57 58 30 | 12 40 25 | $M$ | 59 18 54 | 12 7 20 |
| $E$ | 56 27 17 | 12 52 7 | $N$ | 58 48 29 | 12 31 9 |
| $F$ | 58 28 37 | 11 52 22 | $Z$ | 59 44 48 | 11 57 13 |
| $G$ | 56 56 8 | 12 4 58 | $\alpha$ | 59 52 3 | 11 55 48 |
| $H$ | 57 11 45 | 12 2 1 | $\beta$ | 60 8 23 | 11 48 56 |
| $J$ | 52 25 2 | 11 53 11 | $\gamma$ | 60 40 10 | 11 55 18 |
| | | | $\delta$ | 61 3 20 | 11 30 42 |

Положения кометы относительно этих неподвижных звезд, мною наблюденные, были следующие:

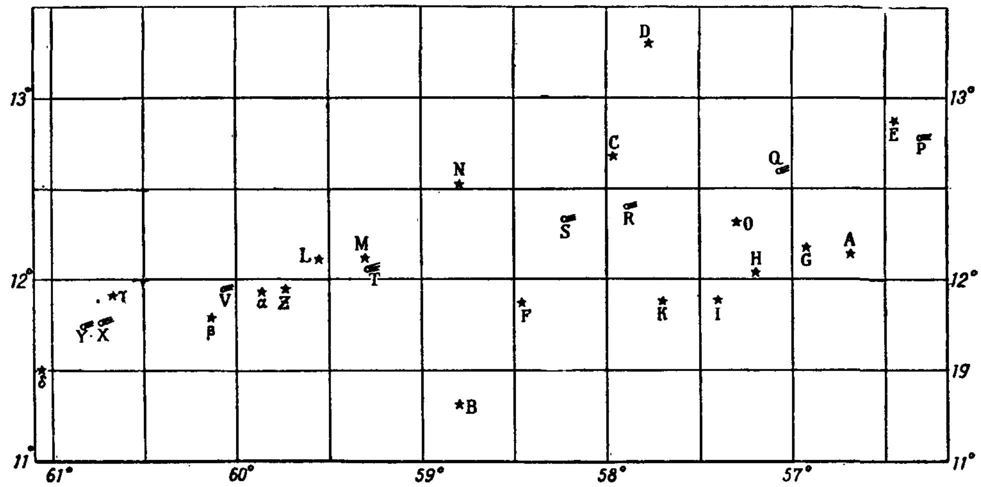
В пятницу 25 февраля ст. ст. в $8\frac{1}{2}$ часов пополудни расстояния кометы, находящейся в $p$, были: от звезды $E$ менее $\frac{3}{13}AE$ и более $\frac{1}{5}AE$, поэтому приблизительно равно $\frac{3}{14}AE$, угол $ApE$ был немногим больше прямого, но почти прямой. Затем, если бы опустить на $pE$ перпендикуляр из $A$, то расстояние кометы до этого перпендикуляра было $\frac{1}{5}pE$.

В ту же ночь в $9\frac{1}{2}$ часов расстояния кометы, бывшей в $P$, до звезды $E$ было больше $\dfrac{1}{4\frac{1}{2}}AE$ и меньше $\dfrac{1}{5\frac{1}{4}}AE$, следовательно равно

$$\frac{1}{4\frac{7}{8}}\,AE \text{ или } \frac{8}{39}\,AE.$$

От перпендикуляра же, опущенного из места звезды $A$ на прямую $PE$, расстояние кометы было $\frac{4}{5}$ $PE$.

В *воскресенье* 27 февраля в $8\frac{1}{4}$ часов пополудни расстояние кометы, находившейся в $Q$, до звезды $O$ было равно расстоянию звезд $OH$ и прямая $QO$ по продолжении проходила между звездами $K$ и $B$. Положения этой прямой более точно я не мог определить по случаю начавшейся облачности.




Фиг. 208.

Во *вторник* 1 марта в 11 часов пополудни комета, находясь в $R$, располагалась в точности на прямой $CK$. Отрезок $CR$ прямой $CRK$ был немного меньше $\frac{1}{3}CK$ и немного больше $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$, следовательно равен

$$\frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR, \text{ т. е. } \frac{16}{45}CK.$$

В *среду* 2 марта в 8 часов пополудни расстояние кометы, бывшей в $S$, до звезды $C$ было приблизительно $\frac{4}{9}$ $FC$. Расстояние звезды $F$ от продолжения прямой $CS$ было $\frac{1}{24}FC$, расстояние же звезды $B$ от той же прямой было в 5 раз более, нежели расстояние звезды $F$. Вместе с тем прямая $NS$ по продолженви проходила между звездами $H$ и $J$ в 5 или 6 раз ближе к звезде $H$, нежели к звезде $J$.

В *субботу* 5 марта в $11\frac{1}{2}$ часов пополудни, когда комета находилась в $T$, прямая $MT$ равнялась $\frac{1}{2}ML$ и прямая $LT$ по продолжении проходила между $B$ и $F$ в 4 или в 5 раз ближе к $F$, нежели к $B$, отсекая от $BF$ пятую или шестую ее часть к $F$. Прямая $MT$ по продолжении проходила вне $BF$, со стороны $B$, в 4 раза ближе к $B$, нежели к $F$. Звезда $M$ была весьма малая, едва видимая в телескоп, и звезда $L$ почти не более 8-й величины.

В *понедельник* 7 марта в $9\frac{1}{2}$ часов пополудни, когда комета находилась в $V$, прямая $V\alpha$ по продолжении проходила между $B$ и $F$, отсекая от $BF$ в сторону к $F$ длину в $\frac{1}{10}BF$, и отношение ее к $V\beta$ было, как 5 к 4. Расстояние кометы от прямой $\beta\alpha$ было равно $\frac{1}{2}V\beta$.

В *среду* 9 марта в $8\frac{1}{2}$ часов пополудни, когда комета находилась в $X$, прямая $\gamma X$ равнялась $\frac{1}{4}\gamma\delta$ и перпендикуляр, опущенный от звезды $\delta$ на прямую $\gamma X$, равнялся $\frac{1}{2}\gamma\delta$.

В ту же ночь в 12 часов, когда комета находилась в $Y$, прямая $\gamma Y$ равнялась $\frac{1}{3}\gamma\delta$ или немного менее, положим $\frac{5}{16}\gamma\delta$, и перпендикуляр, опущенный из звезды $\delta$ на прямую $\gamma Y$, равнялся $\frac{1}{6}\gamma\delta$ или $\frac{1}{7}\gamma\delta$. Но, в виду близости кометы к горизонту, я едва мог ее различать и не мог определить ее места настолько ясно, как в предыдущих случаях.

По наблюдениям такого рода я построением фигур и расчетами вывел долготы и широты кометы, *Поунд* же по исправленным местам неподвижных звезд исправлял места кометы. Эти исправленные места и приведены выше.

Я пользовался микрометром, устроенным довольно грубо, тем не менее погрешности в долготах и в широтах (поскольку они выводятся из моих наблюдений) едва ли превышают 1 минуту. Комета (по моим наблюдениям) к концу своего движения начала заметно уклоняться к северу от параллели, по которой она следовала в конце *февраля*.

Чтобы определить орбиту кометы, я избрал из вышеприведенных наблюдений три, произведенных *Флемстидом* 21 декабря, 5 января и 25 января. По ним я нашел

$$St = 9842.1 \quad \text{и} \quad Vi = 455$$

причем большая полуось земной орбиты принята равной 10 000.

Приняв затем для первого положения точки $B$

$$tB = 5657,$$

я нашел:

$SB = 9747$; и первоначально: $BE = 412$, $S\mu = 9503$; $i\gamma = 413$.

Затем вторично:

$$BE = 421;\quad OD = 10186;\quad X = 8528.4;\quad MP = 8450$$
$$MN = 8475;\quad NP = 25.$$

Для второго положения я принял $tb = 5640$, и получил расстояния

$$TY = 4775 \quad \text{и} \quad \tau Z = 11322$$

по которым, определив орбиту, я нашел, что:

| | |
|---|---|
| Долгота нисходящего угла . . . . . | $91°53'$ |
| » восходящего » . . . . . | $271°53'$ |
| Наклонность . . . . . . . . . . . | $61°20'\frac{1}{3}$ |
| Расстояние перигелия до узла . . . . | $8°38'$ |
| Долгота перигелия . . . . . . . . . | $267°43'$ |
| Широта перигелия . . . . . . . . . | $7°34'$ |
| Параметр . . . . . . . . . . . . . | 236.8. |

Площадь, описываемая в сутки радиусом, проведенным к Солнцу, 93 585, принимая, что квадрат большой полуоси земной орбиты равен 100 000 000. Комета движется по этой орбите по порядку знаков, и *8 декабря* в *0 часов 4 минуты пополудни* проходила через вершину своей орбиты, т. е. через перигелий.

Все это я определил графически, пользуясь разделенным на равные части масштабом и таблицею натуральных синусов для нанесения углов по их хордам. Чертеж я построил достаточных размеров, большая полуось земной орбиты (10 000 частей) изображалась на нем длиною в $16\frac{1}{3}$ англ. дюймов.

Затем, чтобы убедиться, действительно ли комета движется по найденной таким образом орбите, я вывел частью вычислением, частью чертежом места кометы для некоторых из моментов наблюдений, как показано в следующей таблице.

21. Зак. 3350

| | Расстояние ком. до Солнца | Вычисленная долгота | Вычисленная широта | Наблюденная долгота | Наблюденная широта | Разность долгот | Разность широт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Дек. 12 . . . | 2792 | $276^\circ32'$ | $8^\circ18'\frac{1}{2}$ | $276^\circ31'\frac{1}{2}$ | $8^\circ26'$ | $+1'$ | $-7'\frac{1}{2}$ |
| 29 . . . | 8403 | $343\ 13\frac{2}{3}$ | 28 0 | $343\ 11\frac{3}{4}$ | $28\ 10\frac{1}{12}$ | $+2$ | $-10\frac{1}{12}$ |
| Февр. 5 . . . | 16669 | 47 0 | $15\ 29\frac{2}{3}$ | $46\ 59\frac{7}{8}$ | $15\ 27\frac{2}{5}$ | $+0$ | $+2\frac{1}{4}$ |
| Март. 5 . . . | 21737 | $50\ 19\frac{3}{4}$ | 12 4 | $59\ 20\frac{6}{7}$ | $12\ 3\frac{1}{2}$ | $-1$ | $+\frac{1}{2}$ |

После того *Галлей* определил эту орбиту при помощи вычислений более точно, нежели это было возможно выполнить чертежом, и получил также, что:

$$\text{Долгота узлов}\ .\ .\ .\ 91^\circ53' \quad \text{и} \quad 271^\circ53'$$

$$\text{Наклонность}\ .\ .\ .\ .\ 61^\circ20'\frac{1}{3}.$$

Время прохождения через перигелий — 8 декабря 0 часов 4 минуты. Расстояние же перигелия от узла, считаемое в плоскости орбиты кометы, оказалось $9^\circ20'$, и параметр параболы 2430, принимая большую полуось земной орбиты за 100 000. По этим данным, применив также точный расчет, он вычислил места кометы в моменты наблюдений, показанные в следующей таблице:

| Среднее время | Расстояние кометы от Солнца | Вычисленная долгота | Вычисленная широта | Погрешности | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Долгота | Широта |
| Дек. $12^{с}\ 4^{ч}46^{м}$ . . . . | 28028 | $276^\circ29'25''$ | $8^\circ26'\ 0''N$ | $-3'\ 5''$ | $-2'\ 0''$ |
| 11 6 37 . . . . | 61076 | 305 6 30 | 21 43 20 | −1 42 | +1 7 |
| 24 6 18 . . . | 70008 | 318 48 20 | 25 22 40 | −1 3 | −0 25 |
| 26 5 21 . . . . | 75576 | 328 22 45 | 27 1 36 | −1 28 | +0 44 |
| 29 8 3 . . . | 84021 | 343 12 40 | 28 10 10 | +1 59 | +0 12 |
| 30 8 10 . . . . | 86661 | 347 40 5 | 28 11 20 | +1 45 | −0 33 |
| Янв. 5 6 $1\frac{1}{2}$ . . . . | 101440 | 8 49 49 | 26 15 15 | +0 56 | +0 8 |
| 9 7 0 . . . . | 110959 | 18 44 36 | 24 12 54 | +0 32 | +0 58 |
| 10 6 6 . . . . | 113162 | 20 41 0 | 23 44 10 | +0 10 | +0 18 |
| 13 7 9 . . . . | 120000 | 26 0 21 | 22 17 30 | +0 33 | +0 2 |
| 25 7 59 . . . . | 145370 | 39 33 40 | 13 57 55 | −1 20 | +1 25 |
| 30 8 22 . . . . | 155303 | 43 17 41 | 16 42 7 | −2 10 | −0 11 |
| Февр. 2 6 35 . . . . | 160951 | 45 11 11 | 16 4 15 | −2 42 | +0 14 |
| 6 7 $4\frac{1}{4}$ . . . . | 166686 | 46 58 25 | 15 29 13 | −0 41 | +2 10 |
| 25 8 44 . . . . | 202570 | 56 15 46 | 12 48 0 | −2 49 | +1 14 |
| Март. 5 11 39 . . . . | 216205 | 59 18 35 | 12 5 40 | +0 35 | +2 24 |

Эта комета появилась в ноябре 1680 г. и была наблюдена в *Кобурге* в *Саксонии г. Готфридом Киршем* 4-го, 6-го и 11-го того месяца по старому стилю. По положениям кометы относительно ближайших неподвижных звезд, наблюденных достаточно точно телескопом частью 2-футовым, частью 10-футовым, принимая разность долгот Кобурга и Лондона в 11° и пользуясь местами звезд, определенными *Поундом*. *Галлей* определил места кометы.

*Ноября* 3-го дня в 17 часов 2 минуты истинного *Лондонского* времени — долгота кометы 149°51′, широта 1°17′45″N.

*Ноября* 5-го дня в 15 часов 58 минут — долгота 153°23′, широта 1°6′N.

*Ноября* 10-го дня в 16 часов 21 минута комета находилась в равных расстояниях от звезд σ Leonis и τ Leonis (по кат. *Bayer*), но при этом лежала не вполне на прямой, их соединяющей, а немного от нее отстояла. По каталогу звезд Флемстида положение этих звезд таково:

| | | | |
|---|---|---|---|
| σ Leonis . . . . | $164^\circ 15'$ | и широта . . . . | $1^\circ 41'$N |
| τ » . . . . | $167^\circ 3'\frac{1}{2}$ | | $9^\circ 34'$S. |

Положение средней между ними точки есть

Долгота . . . . $165^\circ 39'\frac{1}{4}$ и широта . . . . $0^\circ 33'\frac{1}{2}$N.

Если расстояние кометы от упомянутой прямой было 10′ или 12′, то разность долгот кометы и сказанной средней точки составляла около 7′, и разность широт — около $7\frac{1}{2}$, поэтому место кометы находилось приблизительно:

Долгота . . . . 165°33′ и широта . . . . 0°26′N.

Первое наблюдение по положению, занимаемому кометою относительно некоторых малых неподвижных звезд, было вполне достаточной точности. Второе также было достаточно точно. В третьем, которое было менее точно, могла остаться погрешность в 6′ или 7′ или немногим более. Вычисленное место кометы при движении ее по указанной выше орбите в момент первого наблюдения, которое точнее прочих, было:

Долгота . . . 149°30′22″ и широта . . . 1°25′7″

Расстояние от Солнца . . . 115 546.

*Галлей* заметил, что большая комета появлялась 4 раза через промежутки по 575 лет, а именно: в *сентябре* после убийства *Юлия Цезаря*, в 531 г. после Р. Хр. в консульство *Лампадия* и *Ореста*, в 1106 г. в *феврале* и в конце 1680 г. Эти кометы обладали длинным и ярким хвостом (кроме той, которая была после смерти *Цезаря*, у которой хвост, вследствие неудачного расположения Земли, представлялся меньшим); тогда Галлей разыскал такую эллиптическую орбиту, большая ось которой равнялась 1 382 957, принимая среднее расстояние Земли до Солнца за 10 000, ибо по такой орбите комета может обращаться в 575 лет; оказалось:

| | |
|---|---|
| Долгота восходящего узла . . . . . . . . . . . | 92°2′ |
| Наклонность. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 61°6′48″ |
| Долгота перигелия. . . . . . . . . . . . . . . . | 262°44′25″ |
| Время прохождения через перигелий. . . . . . | дек. 7-го в 23 ч. 9 м. |
| Расстояние перигелия до узла (по плоск. орбите). . | 9°17′35″ |
| Малая ось. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 18481.2 |

Он вычислил движение кометы по этому эллипсу; полученные им по вычислению места и наблюденные приводятся в предыдущей таблице, из которой видно, что наблюдения этой кометы от начала ее появления и до конца согласуются с движением кометы по ее орбите не хуже, чем обыкновенно согласуются движения планет с их теориями. Это согласие доказывает, что это была одна и та же комета, которая появлялась все это время, и что ее орбита определена правильно.

В предыдущей таблице опущены наблюдения 16, 18, 20 и 23 ноября как менее точные. Комета же была наблюдена и в эти дни. А именно: *Понтеус* с помощниками ноября 17-го в 6-м часу утра в *Риме*, т. е. в 5 часов 10 минут Лондонского времени, по наблюдениям при помощи нитей, направляемых через неподвижные звезды, определил место кометы под 188°30′ долготы и 0°40′S широты. Эти наблюдения приведены в сочинении, изданном *Понтеусом* об этой комете. *Целлиус*, который был при этом и сообщил свои наблюдения в письме к *Кассини*, определил место кометы в тот же час в долготе 188°30′ и широте 0°30′S. В том же часу (т. е. 5 часов 42 минуты утра *Лондонского* времени) *Галлетиус* в *Авиньоне* наблюдал комету в долготе 188° без широты. По теории же комета тогда находилась в долготе 188°16′45″ и широте 0°53′7″S.

*Ноября* 18-го в 6 часов 30 минут утра в *Риме* (т. е. в 5 часов 40 минут *Лондонского* времени) *Понтеус* наблюдал комету в долготе 193°30′ и в широте 1°20′ S, *Целлиус* — в долготе 193°30′ и широте 1°00′S.

| Среднее время | Наблюденная долгота | Наблюденвая широта | Вычисленная долгота | Вычисленная широта | Погрешности | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Долгота | Широта |
| Нояб. 3д16ч47м . . . | 149°51′ 0″ | 1°17′45″ | 149°51′22″ | 1°17′32″N | +0′22″ | —0′13″ |
| 5 15 37 . . . . | 153 23 0 | 1 6 0 | 153 24 32 | 1 6 3 | +1 32 | +0 9 |
| 10 16 18 . . . . | 165 32 0 | 0 27 0 | 165 33 2 | 0 25 7 | +1 2 | —1 53 |
| 16 17 0 . . . . | | | 188 16 45 | 0 53 7 S | | |
| 18 21 34 . . . . | | | 198 52 15 | 1 26 54 | | |
| 20 17 0 . . . . | | | 208 10 36 | 1 53 35 | | |
| 23 17 5 . . . . | | | 223 22 42 | 2 29 0 | | |
| Дек. 12 4 46 . . . . | 276 32 30 | 8 28 0 | 276 31 20 | 8 29 6 N | —1 10 | +1 6 |
| 21 6 37 . . . . | 305 8 12 | 21 42 13 | 305 6 14 | 21 44 42 | —1 58 | +2 29 |
| 24 6 18 . . . | 318 49 23 | 25 23 5 | 318 47 30 | 25 23 35 | —1 53 | +0 30 |
| 26 5 21 . . . . | 328 24 13 | 27 0 52 | 328 21 42 | 27 2 1 | —2 31 | +1 9 |
| 29 8 3 . . . | 343 10 41 | 28 9 58 | 343 11 14 | 28 10 38 | +0 33 | +0 40 |
| 30 8 10 . . . . | 347 38 20 | 28 11 53 | 347 38 27 | 28 11 37 | +0 7 | —0 16 |
| Янв. 5 6 $1\frac{1}{2}$ . . . | 8 48 53 | 26 15 7 | 8 48 51 | 26 14 57 | —0 2 | —0 10 |
| 9 7 1 . . | 18 44 4 | 24 11 56 | 18 43 51 | 24 12 17 | —0 13 | +0 21 |
| 10 6 6 . . . . | 20 40 50 | 23 43 32 | 20 40 23 | 23 43 25 | —0 27 | —0 7 |
| 13 7 9 . . . . | 25 59 48 | 22 17 28 | 26 0 8 | 22 16 32 | +0 20 | —0 56 |
| 25 7 59 . . . | 39 35 0 | 17 56 30 | 39 34 11 | 17 56 6 | —0 49 | —0 24 |
| 30 8 22 . . . . | 43 19 51 | 16 42 18 | 43 18 28 | 16 40 5 | —1 23 | —2 13 |
| Февр. 2 6 35 . . . | 45 13 53 | 16 4 1 | 45 11 59 | 16 2 7 | —1 54 | —1 54 |
| 5 7 $4\frac{1}{2}$ . . . | 46 59 6 | 15 27 3 | 46 59 17 | 15 27 0 | +0 11 | —0 3 |
| 25 8 41 . . . . | 56 18 35 | 12 46 46 | 56 16 59 | 12 45 22 | —1 36 | —1 24 |
| Март. 1 11 10 . . . . | 57 52 42 | 12 23 40 | 57 51 47 | 12 22 28 | —0 55 | —1 12 |
| 5 11 39 . . . . | 59 18 0 | 12 3 16 | 59 20 11 | 12 2 50 | +2 11 | —0 26 |
| 6 8 38 . . . . | 60 43 4 | 11 45 52 | 10 43 43 | 11 45 30 | —0 21 | —0 17 |

*Галлетиус* — в 5 часов 30 минут утра в *Авиньоне* наблюдал комету в долготе 193°00′ и широте 1°00′S. Наконец, о. *Анго* в *Ла-Флеш* во *Франции*, в 5-м часу утра (т. е. 5 часов 9 минут *Лондонского* времени), наблюдал положение кометы посредине между двумя малыми звездами, из коих одна есть средняя из трех, лежащих на прямой линии в левой руке Девы (ψ по *Байеру*), другая же — последняя в крыле ее (θ по *Байеру*), так что место кометы было 192°46′ и 50′ южной широты.

В тот же день в *Бостоне* в *Новой Англии*, в широте $42\frac{1}{2}^{\circ}$, в 5-м часу утра (т. е. в 9 часов 44 минуты утра Лондонского времени) комета была наблюдена приблизительно в долготе 194° и южной широте 1°30′, как мне сообщено знаменитым *Галлеем.*

*Ноября 19-го* в $4\frac{1}{2}$ часа утра в *Кембридже* (по наблюдениям одного студента) комета отстояла от *Колоса Девы* приблизительно на 2° на северо-запад. Положение Колоса было: долгота 199°23′47″ и широта S 2°1′59″. В тот же день в 5 часов утра по наблюдениям в *Бостоне* в *Новой Англии* расстояние кометы до Колоса составляло 1° и разность широт 40′. В тот же день по наблюдениям на *Ямайке* расстояние кометы до Колоса составляло около 1°. В тот же день г. *Артур Сторер*, на р. *Патуксент* близ *Гунтинг Крика* в *Мэриланде*, поблизости к *Виргинии*, в широте $38°\frac{1}{2}$, в 5-м часу утра (т. е. в 10-м по Лондонскому времени), наблюдал комету над Колосом и почти соединенной с этою звездою, так как расстояние между ними было около $\frac{3}{4}^{\circ}$. Сопоставляя эти наблюдения между собою, я заключаю, что в 9 часов 44 минуты по *Лондонскому* времени комета находилась приблизительно в долготе 198°50′ и южной широте 1°25′. По теории же ее положение должно быть:

Долгота 198°52′15″ и широта 1°26′54″S.

*Ноября 2-го* г. *Монтенари*, профессор астрономии в *Падуе*, в 6-м часу утра Венецианского времени (т. е. 5 часов 10 минут Лондонского времени), наблюдал комету в долготе 203° и широте южной 1°30′. В тот же день в Бостоне комета наблюдалась в расстоянии от Колоса 4° по долготе к востоку, следовательно была приблизительно в долготе 203°24′.

*Ноября 21-го Понтеус* с помощниками, в $7\frac{1}{2}$ часов утра, наблюдали комету в долготе 207°50′ и широте южной 1°16′, *Целлиус* — в долготе 208°, *Анго* — в 5-м часу утра в долготе 207°45′, *Монтенари* — в долготе 207°51′. В тот же день на *Ямайке* комета наблюдалась в начале созвездия Скорпиона и широта ее была приблизительно одинакова с широтою Колоса Девы, т. е. 2°2′. В тот же день в 5-м часу утра в *Баласоре* в *Индии* (т. е. 11 часов 20 минут ночи предыдущего числа Лондонского времени) взято расстояние кометы от Колоса в 7°35′ к востоку. Она находилась на прямой линии между Колосом и Весами, следовательно она была в долготе 206°58′ и широте южной 1°11′; по прошествии 5 часов 40 минут (т. е. в 5-м часу утра *Лондонского* времени) она находилась в долготе 208°12′ и широте южной 1°16′. По теории место кометы должно было тогда быть:

Долгота 208°10′36″ и широта 1°53′35″S.

*Ноября 22-го.* Комета наблюдалась *Монтенари* в долготе $221°33'$. В *Бостоне* же в *Новой Англии* ее долгота определена в $213°$ при той же приблизительно широте $1°30'$ S. В тот же день в 5-м часу утра в *Баласоре* комета наблюдалась в долготе $211°50'$, поэтому в 5 часов утра Лондонского времени комета находилась приблизительно в долготе $213°5'$. В этот день в Лондоне, в $6\frac{1}{2}$ часов утра, *Гик* наблюдал комету в долготе около $213°30'$ на прямой линии, проходящей через Колос Девы и Сердце Льва, однако че вполне точно на этой линии, а немного к северу. *Монтенари* также заметил, что линия, проведенная от кометы через Колос, проходила немного южнее Сердца Льва, так что между этой линией и Сердцем Льва был лишь весьма малый промежуток. Прямая линия, проведенная через Сердце Льва и Колос Девы, пересекает эклиптику в долготе $153°46'$ под углом $2°51'$, поэтому, если комета находилась на этой линии в долготе $213°$, широта ее была $2°26'$. Но так как, согласно *Гуку* и *Монтенари*, комета находилась немного к северу от этой линии, то ее широта была немного менее. По наблюдениям *Монтенари*, 20 ноября широта кометы равнялась широте Колоса, следовательно была около $1°30'$ и, согласно *Гуку*, *Монтенари* и *Анго*, все время возрастала, следовательно 22 ноября была чувствительно больше $1°30'$. Среднее между пределами $2°26'$ и $1°30'$ составляет $1°58'$. Хвост кометы, согласно *Гуку* и *Монтенари*, направлялся к Колосу Девы, немного уклоняясь от этой звезды по *Гуку* к югу, по *Монтенари* — к северу, следовательно это уклонение было едва заметно, значит хвост, будучи почти параллелен экватору, уклонялся от противостояния Солнца к северу.

*Ноября 23-го* ст. ст. в 5 часов утра в Нюрнберге (т. е. в $4\frac{1}{2}$ часа Лондонского времени) г. *Циммерман* наблюдал комету в долготе $218°8'$ и широте южной $2°31'$, взяв ее расстояния до неподвижных звезд.

*Ноября 24-го* перед восходом Солнца *Монтенари* наблюдал комету в долготе $222°52'$ по северную сторону прямой, проходящей через Сердце Льва и Колос Девы, следовательно широта кометы была немного менее $2°38'$. Как уже сказано, по наблюдениям *Монтенари*, *Анго* и *Гука* широта кометы все время возрастала, поэтому была теперь несколько более $1°58'$, и значит, без значительной погрешности можно взять среднюю величину $2°18'$. *Понтеус* и *Галлетиус* показывают, что широта уже убывала, *Целлиус* и наблюдатель в *Новой Англии* — что она удерживала почти постоянное значение около $1\frac{1}{2}°$. Наблюдения *Понтеуса* и *Целлиуса* более грубы, ибо они производились измерением азимутов и высот, так же как и *Галлетиуса*; лучше те наблюдения, где положение кометы относилось к неподвижным звездам, как это делали *Монтенари*, *Гук* и *Анго*, наблюдатель в *Новой Англии* и иногда *Понтеус* и *Целлиус*. В тот же день в 5 часов утра комета наблюдалась в *Баласоре* в долготе 221°45′, так что ее долгота в 5 часов утра Лондонского времени была кругло 223°. По теории долгота кометы должна была быть 223°22′42″.

*Ноября 25-го* перед восходом Солнца *Монтенари* наблюдал комету в долготе около $227\frac{3}{4}^{\circ}$. *Целлиус* заметил, что в это время комета находилась на прямой между яркою звездою правого бедра Девы и южною частью коромысла Весов, прямая эта пересекает путь кометы в долготе 228°36′. По теории комета тогда находилась приблизительно в долготе

$$228\frac{1}{3}^{\circ}.$$

Итак, все эти наблюдения согласуются с теориею постольку же, поскольку они согласуются между собою, и этим согласием доказывают, что это была одна и та же комета, которая и появлялась от 4 ноября до 9 марта. Орбита этой кометы дважды пересекает плоскость эклиптики и, следовательно, не может быть прямолинейной. Пересечения с эклиптикою лежат не в двух противоположных частях неба, а в конце знака Девы (от 150 до 180°) и в начале Козерога (от 270 до 300°), с промежутком между ними около 98°, следовательно путь кометы весьма сильно отклоняется от большого круга; так, в *ноябре* ее путь отстоял от эклиптики к югу на 3° с лишним, а затем в *декабре* проходил в 29° к северу от эклиптики, причем те две части орбиты, по одной из которых комета приближалась к Солнцу, по другой удалялась, составляли между собою кажущийся угол наклона более 30°, как наблюдал *Монтенари*. Эта комета прошла через девять знаков, именно — от последнего градуса Льва (149°) до начала Близнецов (60°), не считая знака Льва, который она прошла раньше, нежели стала видимой. Нет никакой другой теории, по которой комета проходила бы закономерным движением такую большую часть неба. Движение ее было весьма неравномерно, ибо около 20 *ноября* она описывала в сутки около 5°, затем замедленным движением от 26 *ноября* по 12 *декабря*, в продолжение $15\frac{1}{2}$ суток, она прошла всего 40°, затем, двигаясь опять ускоренно, она проходила в сутки около 5°, до того как движение ее стало замедляться. Теория, по которой столь неравномерное движение, простирающееся через большую часть неба, теория, основанная на тех же законах, как и теория планет, и в точности согласная с точными астрономическими наблюдениями, не может быть не истинной.

Путь, описанный кометой, и положение отбрасываемого ею хвоста показаны на приложенном чертеже (фиг. 209), изображенном на плоскости орбиты, причем $ABC$ представляет орбиту кометы, $D$ — Солнце, $DE$ — ось орбиты, $DF$ — линию узлов, $GH$ — пересечение сферы, описанной радиусом, равным полуоси земной орбиты с плоскостью орбиты кометы. Места кометы показаны следующие:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$ . . . | ноября | 4 | 1680 г. | | $P$ . . . | января | 5 | 1671 г. |
| $K$ . . . | » | 11 | » | | $Q$ . . . | » | 25 | » |
| $L$ . . . | » | 19 | » | | $R$ . . . | февраля | 5 | » |
| $M$ . . . | декабря | 12 | » | | $S$ . . . | » | 25 | » |
| $O$ . . . | » | 29 | » | | $T$ . . . | марта | 5 | » |
| | | | | | $V$ . . . | » | 9 | » |

Я присовокуплю еще следующие наблюдения, определяющие положение хвоста.

*Ноября 4-го и 9-го* хвост не замечался.

*Ноября 11-го* хвост был едва заметен в 10-футовую трубу и не более $\frac{1}{2}^{\circ}$ длиною.

*Ноября 17-го* хвост представлялся *Понтеусу* длиною более 15°.

*Ноября 18-го* хвост, длиною в 30°, направленный в сторону, противоположную Солнцу, простирался до Марса, который тогда был в долготе 159°54′, как то наблюдали в *Новой Англии.*

*Ноября 19-го* хвост представлялся наблюдателям в Мэриланде в 15° или 20° длиною.

*Декабря 10-го* (по наблюдениям *Флемстида*) хвост проходил по середине расстояния между хвостом Змеи в созвездии Змееносца и звездою $\delta$ южного крыла Орла и исчезал близ звезд $A$, $\omega$ и $b$ таблиц *Байера.* Следовательно, конец хвоста был приблизительно в долготе $289^{\circ}\frac{1}{2}$ и широте $34^{\circ}\frac{1}{4}$ N.

*Декабря 11-го* хвост простирался почти до острия Стрелы (*Байер* $\alpha$ и $\beta$), исчезая в долготе 296°43′ и широте 38°34′N.

*Декабря 12-го* хвост проходил через середину Стрелы, не простираясь далеко за нее, и исчезал в долготе 304° и широте $42^{\circ}\frac{1}{2}$.

Все это относится до длины более яркой части хвоста кометы, ибо менее светлая его часть, а может быть и благодаря большей ясности неба, *декабря 12-го* в 5 часов 40 минут в Риме, по наблюдениям *Понтеуса*, простиралась на 10° за блестящую звезду тела Лебедя, и эта звезда отстояла от края хвоста к северо-западу на 45′. В эти дни ширина хвоста составляла близ его верхнего конца 3°, следовательно середина хвоста проходила от этой звезды в расстоянии 2°15′ к югу, верхний же конец был в долготе 352° и в широте 61° N, таким образом длина хвоста составляла около 70°.

*Декабря 21-го* хвост простирался почти до кафедры *Кассиопеи*, проходя в равных расстояниях между β и *Шедиром*, причем расстояние до каждой из этих звезд было равно расстоянию между ними, так что хвост исчезал в долготе 24° и широте $47\frac{1}{2}^{\circ}$.

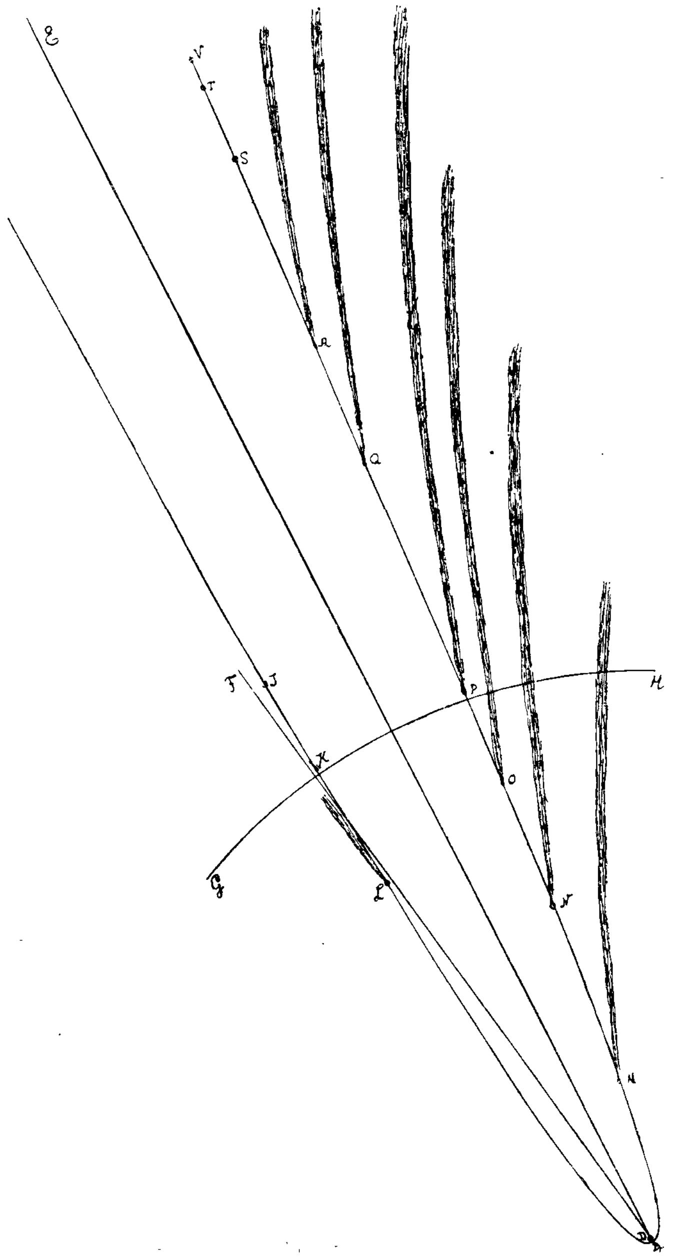
*Декабря 29-го* хвост касался *Шеата*, проходя справа от этой звезды, и в точности заполнял промежуток между двумя звездами северной ноги *Андромеды*. Длина его была 54°, так что он прекращался в долготе 49° и широте 35°.

*Января 5-го* хвост касался звезды π груди *Андромеды* правым своим краем и звезды μ ее пояса левым краем, и (по моим наблюдениям) был длиною в 40°. Но он был изогнут, и выпуклая его сторона была обращена к югу. С кругом, проведенным через голову кометы и Солнце, он составлял угол около 4° близ головы кометы, у конца же своего он был наклонен к этому кругу под углом 10° или 11°, хорда же хвоста образовала с этим кругом угол в 8°.

*Января 13-го* довольно яркая часть хвоста оканчивалась между *Аламехом* и *Алъголем*, тончайший же его свет прекращался в области звезды κ бока *Персея*. Расстояние конца хвоста от круга, соединяющего комету и Солнце, составляло 3°50′, наклонение же хорды квоста к этому кругу $8^{\circ}\frac{1}{2}$.

*Января 25-го и 26-го* хвост обозначался тончайшим светом на длине 6° или 7°, в следующие же две ночи, когда небо было весьма ясное, его нежнейший и едва заметный свет достигал до 12° и даже немного более. Ось хвоста направлялась в точности на яркую звезду левого плеча *Возничего*, следовательно он отклонялся от направления, противоположного Солнцу, к северу на угол в 10°.

Затем, *10 февраля*, хвост представлялся вооруженному глазу длиною в 2°, ибо вышеупомянутый весьма нежный свет не мог быть различаем через стекла. *Понтеус* же пишет, что он видел хвост длиною до 12°.



Фиг. 209.

*Февраля 25-го* и последующее время комета казалась без хвоста.

Рассматривая орбиту этой кометы и сопоставляя прочие явления, ею представляемые, было бы нетрудно прийти к заключению, что тела комет плотные, сплошные, прочные и выносливые подобно телам планет, ибо если бы они были бы ничем иным, как парами или выделениями Земли, Солнца и планет, то проходя поблизости к Солнцу, они немедленно должны бы рассеяться. Действительно, теплота Солнца пропорциональна плотности лучей, т. е. обратно пропорциональна удалениям мест от Солнца, а так как расстояние кометы от центра Солнца 8 декабря, когда она проходила через перигелий, составляло лишь $\frac{6}{1000}$ расстояния Земли до Солнца, то нагревание кометы Солнцем в это время относилось к нагреванию Земли у нас летом, как 1 000 000 к 36, т. е. как 28 000 к 1. Но теплота кипящей воды приблизительно в 3 раза более, нежели теплота, которую принимает сухая земля на солнце летом, как я сам испытывал, теплота же краснеющего железа в 3 или 4 раза более теплоты кипящей воды; поэтому теплота, принимаемая от солнечных лучей сухою почвою кометы при прохождении ее через перигелий, должна бы быть приблизительно в 2000 раз более, нежели теплота краснеющего железа. При таком жаре всякие пары и выделения и всякие летучие вещества должны немедленно сгореть и рассеяться.

Следовательно, комета в своем перигелии испытывает громадное нагревание от Солнца и может весьма долго сохранять это тепло. Ибо железный раскаленный до красна шар, диаметром в 1 дюйм, едва утрачивает весь свой жар на воздухе в продолжение часа. Шар же большего диаметра сохранял бы свое тепло более продолжительно, пропорционально диаметру, ибо поверхность (соответственно величине которой он охлаждается от соприкосновения с окружающим воздухом), отнесенная к заключенному внутри ее нагретому количеству вещества, уменьшается в этом отношении. Следовательно, накаленный до красна железный шар, равный земному, т. е. диаметром около 40 000 000 футов, во столько же дней, т. е. приблизительно в 50 000 лет, едва бы охладился. Однако я подозреваю, что продолжительность сохранения телами тепла, вследствие побочных причин, возрастает в меньшем отношении, нежели их диаметры, и я бы желал, чтобы истинная пропорция была исследована опытами.

Кроме того, надо заметить, что в *декабре* комета, после того как она была накалена таким образом Солнцем, испускала гораздо более длинный и сияющий хвост, нежели в *ноябре*, пока она еще не достигла перигелия.

Вообще хвосты всех комет становятся больше и светлее тотчас же после прохождения их через область Солнца. Следовательно, нагревание кометы влечет за собою увеличение величины хвоста ее. Отсюда можно заключить, что хвост есть не что иное, как тончайший пар, испускаемый головой или ядром кометы вследствие его теплоты.

Впрочем, мнение о хвостах комет троякое. Одни полагают, что это не что иное, как отблеск лучей Солнца, распространяемый прозрачными головами комет, другие—что хвосты происходят от преломления света при распространении его от кометы до Земли, и наконец, третьи—что это есть облако или пар, непрестанно поднимающийся с головы кометы и уходящий в сторону, противоположную Солнцу.

Первое мнение высказывается теми, кто совершенно незнаком с учением об оптических явлениях. Ибо отблеск солнечных лучей распознается в темной комнате лишь постольку, поскольку свет отражается частицами пыли и дыма, носящимися в воздухе, поэтому отблеск ярче в воздухе, заполненном более густым дымом, и тогда он сильнее действует на глаз, в более чистом воздухе этот отблеск нежнее и труднее ощущается, в небесных же пространствах без всякого отражающего вещества его совершенно быть не может. Свет распознается не по собственному отблеску, а по тому, поскольку он отражается в наш глаз, ибо зрение происходит не иначе, как при посредстве лучей, падающих на глаз. Следовательно, необходимо, чтобы в области хвоста находилось бы какое-либо отражающее вещество, иначе все освещенное Солнцем небо сияло бы одинаково.

Второе мнение представляет также много трудностей. Хвосты комет никогда не кажутся окрашенными, преломление света непременно сопровождается изменением цветов. Ясное распространение света до нас от планет и неподвижных звезд доказывает, что небесная среда не обладает преломляющей силой, сообщения же о том, что неподвижные звезды представлялись иногда *египтянам* косматыми, что бывает весьма редко, должно быть приписываемо случайному преломлению света облаками. Мерцание и лучистость неподвижных звезд надо приписывать преломлению лучей в глазу и дрожаниям воздуха, ибо они исчезают, когда глаз смотрит через телескоп. Вследствие дрожаний воздуха и поднимающихся паров происходит, что лучи поочередно легко уклоняются от входа в узкое пространство зрачка, от более же широкого отверстия объектива — никогда, поэтому в первом случае и происходит мерцание, во втором прекращается. Это прекращение мерцания во втором случае доказывает правильное распространение света через небесные пространства без всякого чувствительного преломления. Не следует также думать, что иногда потому не видно хвостов у комет, что их свет недостаточно силен, чтобы восприниматься нашим глазом, и что поэтому не различаются и хвосты неподвижных звезд, — надо знать, что свет неподвижных звезд может быть увеличен при помощи телескопов более, чем в 100 раз, и все-таки у них хвостов незаметно.

Свет планет гораздо обильнее, хвостов же совершенно у них нет, кометы же часто имеют весьма большие хвосты и тогда, когда свет их голов весьма нежен и слаб. Так, комета 1680 г. в *декабре* месяце, когда свет ее головы едва равнялся свету звезды 2-й величины, испускала хвост, имевший заметное сияние на протяжении 40°, 50°, 60°, 70° и даже более. Затем, *января* 27-го и 28-го, голова представлялась звездою не более 7-й величины, хвост же, правда, по его нежнейшему, но все же чувствительному свету замечался на протяжении 6° или 7° и по весьма слабому едва различимому — даже до 12° или немного более, как сказано выше. Наконец, *февраля* 9-го и 10-го, голову нельзя было видеть простым глазом, хвост же, длиною в 2°, я наблюдал в телескоп. Затем, если бы хвост происходил от преломления в небесной среде и вследствие формы небесного пространства отклонялся бы от противоположного Солнцу направления, то это отклонение должно было бы происходить для той же области неба всегда в ту же самую сторону. Между тем, комета 1680 г. 28 декабря в $8\frac{1}{2}$ часов вечера *Лондонского* времени находилась в долготе 338°41′ и широте 28°6′ N, Солнце же — в долготе 288°26′. Комета 1577 г. *декабря* 29-го находилась в долготе 338°41′ и широте 28°40′ N и Солнце — приблизительно в долготе 288°26′, следовательно в обоих случаях Земля находилась в том же самом месте и комета представлялась в той же самой части неба, однако в первом случае (как по моим, так и другим наблюдениям) хвост кометы отклонялся на $4\frac{1}{2}^\circ$ от противоположного Солнцу направления к северу, во втором же случае (по наблюдениям *Тихо*) отклонение составляло 21° к югу. Следовательно, после того как происхождение кометных хвостов от преломления света в небесном пространстве опровергнуто, остается вывести явления, представляемые хвостами, из отражения света некоторым веществом.

Хвосты происходят из голов комет и направляются в сторону, противоположную Солнцу; это подтверждается теми законами, которым они следуют. Так, располагаясь всегда в плоскости орбиты, проходящей через Солнце, они уклоняются от направления, прямо противоположного Солнцу, всегда в ту сторону, которая при движении головы кометы по ее орбите ею уже пройдена. Наблюдателю, находящемуся в плоскости орбиты, хвосты представляются направленными прямо от Солнца, когда же наблюдатель удаляется от этой плоскости, отклонение постепенно становится чувствительнее и ежедневно увеличивается. При прочих одинаковых условиях, отклонение меньше, когда хвост наклоннее к орбите кометы и когда голова ближе подходит к Солнцу, в особенности если угол отклонения рассматривать близ головы кометы. Хвосты не отклоняющиеся представляются прямыми, отклоненные — искривляются. Кривизна больше, когда отклонение больше, и заметнее, когда хвост длиннее, у коротких хвостов кривизна едва заметна. Угол отклонения меньше вблизи головы кометы, больше близ противоположного конца хвоста, потому что выпуклая сторона хвоста обращена в ту сторону, от которой хвост отклоняется и которая совпадает с прямой линией, проведенной от Солнца через голову кометы. Хвосты, более длинные и широкие и испускающие более сильный свет с выпуклой своей стороны, ярче и резче ограничены, нежели с вогнутой своей стороны.

Таким образом представляемые хвостами явления зависят от движения головы кометы, а не от той области неба, в которой голова усматривается, поэтому они происходят не от преломления света в небесных пространствах, а от вещества, доставляемого головой комет. Подобно тому как у нас в воздухе дым какого-либо горящего тела идет вверх и притом отвесно, когда тело в покое, и наклонно, когда тело движется, так и в небесных пространствах, где тела тяготеют к Солнцу, дым и пары должны подниматься от Солнца (как уже сказано) и стремиться прямо вверх, когда дымящее тело находится в покое, или же наклонно, когда тело при своем движении постоянно уходит от тех мест, где поднялись верхние части дыма или пара. Этот уклон там меньше, где скорость поднимающегося пара больше, т. е. в близости к Солнцу и самому дымящему телу. Вследствие различия в наклонности, столб пара искривляется, и так как пар с передней стороны столба немного свежее и поэтому и немного плотнее, то он отражает свет обильнее и ограничен менее неопределенно. О внезапных и сомнительных движениях хвостов, а также и об их неправильных формах, описываемых некоторыми авторами, я ничего не прибавлю, ибо они происходят или от возмущений в нашем воздухе и от движущихся облаков, закрывавших части хвостов, а может быть, от частей млечного пути, которые могли быть ошибочно приняты за проходящие перед ними части хвостов комет.

Что из атмосфер комет может получаться достаточно паров для наполнения столь громадных пространств, можно понять по разрежению нашего воздуха. У поверхности Земли воздух занимает пространство, приблизительно в 850 раз большее, нежели такое же по весу количество воды, так что столб воздуха, высотою 850 футов, весит столько же, как столб воды того же сечения и высотою в 1 фут. Столб же воздуха, достигающий до верху атмосферы, равен весу столба воды, высотою около 33 футов; поэтому, если бы отнять нижнюю часть воздушного столба, высотою в 850 футов, то остающаяся часть по своему весу равнялась бы столбу воды в 32 фута высотою. Отсюда (на основании подтвержденного многочисленными опытами закона, что сжатие воздуха пропорционально весу давящей атмосферы и что сила тяжести обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра Земли), производя вычисление по следствию предложения XXII книги II, я нашел, что если бы воздух поднялся от поверхности Земли на высоту, равную одному ее полудиаметру, то он, по сравнению с нашим воздухом, был бы разрежен в отношении гораздо большем, нежели отношение объема шара, описанного радиусом орбиты Сатурна, к шару, диаметром в 1 дюйм. Следовательно, количество нашего воздуха в объеме шара диаметром в 1 дюйм при том разрежении, которое воздух имел бы на высоте земного радиуса над ее поверхностью, было бы достаточно, чтобы заполнить всю область планет до сферы Сатурна и даже гораздо дальше. Так как воздух, по вышесказанному, при бо́льших возвышениях разрежается в громадной степени, атмосфера же комет возвышается над центром ядра до 10 раз выше, нежели его поверхность, а затем хвост возвышается еще гораздо более, то хвост должен быть в высшей степени разреженный. Хотя, вследствие гораздо большей густоты атмосферы кометы и большей силы тяготения к Солнцу и взаимного притяжения частиц воздуха и паров друг к другу, и возможно, что воздух в кометных хвостах не настолько разрежен, как в небесных пространствах, но все-таки самого малого количества воздуха и паров вполне достаточно для всех явлений, наблюдаемых в кометных хвостах, как то показывает приведенный выше расчет. О весьма сильной разреженности кометных хвостов можно также заключить по просвечиванию через них звезд. Земная атмосфера, при своей толщине в немного миль, сияя от света Солнца, тушит полностью не только все светила, но и самую Луну, между тем через громадную толщу кометных хвостов, также освещенную Солнцем, самые малые звезды просвечивают без утраты яркости. Вместе с тем, яркость большей части хвостов обыкновенно не больше яркости слоя нашего воздуха, толщиною в 1 или в 2 дюйма, отражающего свет Солнца своим блеском в темной комнате.

Время, в продолжение которого пар восходит от головы кометы до конца хвоста, может быть найдено, если провести прямую линию от конца хвоста к Солнцу и заметив место ее пересечения с орбитою, ибо пар при конце хвоста, поднимаясь прямо от Солнца, начал свой подъем из головы в то время, когда голова находилась в этом пересечении. Правда, пар поднимается не вполне прямо от Солнца, ибо удерживая то движение, которое он ранее имел вместе с кометою, он поднимается наклонно, вследствие сложения этого своего движения с движением от Солнца, поэтому решение задачи будет точнее, если проводить указанную секущую параллельно длине хвоста или еще лучше, вследствие криволинейности движения кометы, под небольшим углом к этой линии. Таким образом я нашел, что пар, бывший в конце хвоста *25 января*, начал подниматься от головы *11 декабря*, и следовательно, время его подъема составляло около 45 дней. Весь же тот хвост, который был виден *10 декабря*, поднялся в продолжение тех двух дней, которые прошли после прохождения комет через перигелий. Следовательно, пар вначале по близости с Солнцем поднимался всего скорее, затем, вследствие постоянного замедления его движения силою тяготения, продолжал подниматься медленнее; своим поднятием он увеличивал длину хвоста. Хвост во все последующее время, пока был виден, состоял почти только из того пара, который поднялся при прохождении через перигелий; тот пар, который поднялся раньше всего и составлял конец хвоста, исчез не ранее, как перестал быть видимым вследствие большого расстояния до нашего глаза, так и вследствие меньшего освещения Солнцем. Поэтому и такие хвосты комет, которые коротки, не поднимаются быстро и непрестанно от голов и вскоре затем пропадают, а суть долго сохраняющиеся столбы паров и выделений, распространяющиеся от голов весьма медленно в продолжение многих дней; они разделяют движение самих голов при начале своего выхода и продолжают двигаться через небесные пространства вместе с головами. Отсюда обратно заключаем, что небесные пространства лишены силы сопротивления, ибо через них свободно совершают и долго сохраняют свои движения с огромными скоростями не только твердые массы планет и комет, но и разреженнейшие пары хвостов.

Поднятие хвостов из атмосфер голов и их распространение в сторону, противоположную Солнцу, *Кеплер* приписывает действию лучей Солнца, захватывающих с собою вещество хвостов.

Что нежнейшие испарения в свободных пространствах уступают действию лучей, не противоречит здравому смыслу, несмотря на то, что в наших областях грубые вещества не воспринимают заметных движений от действия лучей Солнца. Другой автор полагает, что могут существовать частицы как легкие, так и тяжелые и что вещество хвостов не тяготеет, а отталкивается, и вследствие этой своей легкости поднимается от Солнца. Но так как тяжесть земных тел пропорциональна их массам и, следовательно, при сохранении количества вещества не может быть ни увеличена, ни уменьшена, то мне кажется, что подъем хвостов должен быть скорее приписан разрежению их вещества. Дым в трубе поднимается вследствие напора воздуха, в котором он находится. Воздух, разреженный нагреванием, поднимается вследствие уменьшившегося его удельного веса и уносит с собою заключенный в нем дым. Почему бы и кометному хвосту не подниматься по такой же причине от Солнца? Ибо лучи Солнца не иначе возмущают среду, через которую они проникают, как своим отражением и преломлением. Отражающие частицы, нагретые этим действием, нагревают эфирную среду, в которой они содержатся. Эта последняя от сообщаемой ей теплоты нагревается и разрежается, и вследствие уменьшившегося от этого разрежения удельного ее тяготения к Солнцу она поднимается и уносит с собою отражающие частицы, из которых составляется хвост. Поднятию паров способствует также их обращение вокруг Солнца, вследствие которого они стремятся удалиться от Солнца, тогда как атмосфера Солнца и вещество небесных пространств или находится в полном покое, или же обладает меньшею скоростью в том движении, которое ему сообщается вращением Солнца. Таковы причины поднятия хвостов поблизости к Солнцу, где кривизна орбит больше и кометы находятся в более плотной, а потому и более тяжелой атмосфере Солнца, и тотчас же выделяют всегда длинные хвосты.

Хвосты, так образовавшиеся, сохраняют свое движение и, тяготея вместе с тем к Солнцу, движутся затем вокруг Солнца по эллипсам подобно головам, и в этом своем движении сопровождают головы и совершенно свободно примыкают к ним, ибо тяготение паров к Солнцу заставляет их отходить от голов комет к Солнцу не более того, сколько тяготение голов заставляет их самих отходить от хвостов. Вследствие одинакового общего тяготения, они или совместно падают к Солнцу, или же совместно замедляются в своем удалении от него, поэтому это тяготение нисколько не препятствует тому, чтобы хвосты и головы, вследствие вышеуказанных или каких иных причин, приняли бы друг относительно друга какое-либо положение и затем свободно его бы сохраняли.

Следовательно, хвосты комет, которые зарождаются в перигелиях, уходят вместе с кометами в весьма отдаленные области и затем, после длинного ряда лет, вместе с ними вновь возвращаются или, вернее, там разрежаясь, постепенно пропадают. Затем, с приближением голов комет к Солнцу, от них должны распространяться сперва медленно коротенькие хвосты, которые затем в перигелиях тех комет, которые опускаются до солнечной атмосферы, возрастают до громадных размеров. Пар в этих свободных пространствах постоянно разрежается и расширяется, вследствие чего всякий хвост в верхнем своем конце шире, нежели у самой головы комет. Представляется небезосновательным, что вследствие сказанного постоянного разрежения и расширения пар рассеивается и распространяется по всему небесному пространству, затем, постепенно притягиваясь вследствие своего тяготения планетами, он смешивается с их атмосферами. Так как моря безусловно необходимы для строения Земли, ибо из них, вследствие нагревания Солнцем, выделяются обильные пары, которые или, собираясь в тучи, затем падают в виде дождей и орошают и питают землю, производя произрастание растений, или же, сгущаясь на холодных вершинах гор (как некоторые основательно рассуждают), стекают в виде источников и рек, то для сохранения морей и влаги на планетах, повидимому, требуются кометы, из сгущенных выделений и паров коих всякая жидкость, поглощаемая растениями и гниением их превращаемая в сухую землю, может непрерывно восполняться и образовываться вновь. Все растения произрастают непременно из жидкостей и затем гниением превращаются по большей части в сухую землю, из гниющих же жидкостей постоянно осаждается ил, поэтому количество сухой земли изо дня в день возрастает, количество же жидкостей, если бы оно не получало восполнения извне, должно бы беспрерывно убывать и наконец исчезнуть. Кроме того, я подозреваю, что тот газ, который составлет меньшую, но тончайшую и лучшую часть нашего воздуха и который требуется для поддержания жизни во всем живущем, также происходит, главным образом, из комет.

Атмосферы комет при движении их к Солнцу, уходя в виде хвостов, уменьшаются и (в той части, конечно, которая обращена к Солнцу) становятся у́же, и наоборот, при удалении комет от Солнца, когда атмосферы слабее уходят в хвосты, они становятся полнее, если только *Гевелиус* правильно подметил эти явления. Наименьшими же они представляются, когда головы раскалены Солнцем и они уходят в виде весьма больших и блестящих хвостов, ядра же в это время, может быть, окружены в нижних слоях атмосферы более густым и черным дымом, ибо дым обыкновенно бывает более густой и черный при более сильном жаре. Так, голова той кометы, о которой мы рассуждали, при равных расстояниях от Солнца и от Земли представлялась более темной после прохождения через перегелий, нежели до того.

В декабре она относилась к звездам 3-й величины, в ноябре — к звездам 1-й и 2-й. Те же, кто видел и ту и другую, описывают первую как более яркую. Так, кембриджскому студенту 19 ноября эта комета, несмотря на свой несколько сероватый и неясный свет, представлялась равной Колосу Девы и более светлой, нежели впоследствии. 20 ноября ст. ст. комета казалась *Монтенари* больше звезды 1-й величины, имея при этом хвост длиною в 2°. В попавших в мои руки письмах г. *Сторер* сообщает, что в *декабре* голова кометы, когда она испускала наибольший и самый яркий хвост, она была малая и по видимой своей величине много уступала той комете, которая появлялась в ноябре перед восходом Солнца; о причине этого явления он выражал догадку, что вещество головы было вначале более обильное и постепенно расходовалось.

Склоняться к такому же объяснению заставляет также и то, что головы других комет, которые испускали весьма большие и яркие хвосты, представлялись полутемными и малыми. Так, 5 марта н. ст. 1668 г. в 7 часов вечера *о. Валентин Естанций*, находившийся в *Бразилии*, видел вблизи горизонта на юго-западе комету, имевшую малую и едва заметную голову, хвост же ее был необыкновенно блестящ, так что стоявшие на берегу легко различали его отражение в море; этот хвост представлялся в виде огненного столба длиною в 23°, почти параллельным горизонту с юга к западу. Такой блеск его продолжался только 3 дня, постепенно затем убывая; при убывании блеска величина хвоста возрастала, так что даже в *Португалии* хвост казался имевшим заметный блеск и простирающимся почти через четверть неба (т. е. 45°) с запада на восток, хотя здесь хвост не был виден целиком, ибо голова кометы в этих широтах была скрыта под горизонтом. По увеличению длины хвоста и уменьшению его блеска можно заключить, что голова кометы удалялась от Солнца и была к нему всего ближе в начале, подобно комете 1680 г. В *Саксонской* летописи монаха *Симеона Дургамского*, как указал *Гевелий*, можно прочесть, что у кометы 1106 г., «*звезда которой была малая и темная* (как у кометы 1680 г.), *но сияние, которое из нее исходило, было весьма ясное и распространялось от востока к северу, подобно огненному столбу*». Комета появлялась в начале *февраля* и впоследствии вечером на юго-западе. На основании этого и по положению хвоста можно заключить, что голова была вблизи Солнца. «*От Солнца*, — пишет *Матвей Парижанин*, — *она отстояла, примерно, на один локоть и испускала из себя луч, длиною от третьего* (правильнее шестого) *до девятого часа*». Такова же была и та весьма яркая комета, которую описывает Аристотель (кн. 1, Метеоры, 6):

*«голова ее в первый день не была усмотрена потому, что она зашла раньше Солнца или тотчас же после него в лучах его, в следующий же день она была усмотрена насколько это возможно, ибо она была в самом незначительном расстоянии от Солнца и тотчас же зашла. Вследствие весьма сильной яркости* (очевидно хвоста), *рассеянный свет головы не был виден, но с течением времени* (говорит Аристотель), *так как сияние хвоста стало меньше, у головы восстановился ее вид. Свой блеск она распространяла на треть неба* (т. е. 60°); *она появилась зимою* [4-го года 101-й олимпиады] *и поднималась до пояса Ориона, где и исчезла»*.

Комета 1618 г., которая вышла из лучей Солнца весьма хвостатою, едва равнялась или немногим превосходила звезды 1-й величины; появлялось также не мало комет большей величины, с весьма короткими хвостами. Про некоторые из них сообщается, что они равнялись Юпитеру, другие — Венере, некоторые — даже Луне.

Мы сказали, что кометы составляют род планет, обращающихся вокруг Солнца по весьма эксцентричным эллипсам. Так как в ряду не имеющих хвостов планет меньше те, которые обращаются по меньшим и ближайшим к Солнцу орбитам, то можно небезосновательно полагать, что и те кометы, которые в своих перигелиях ближе подходят к Солнцу, меньше прочих и нисколько своим притяжением не возмущают Солнца. Определение поперечных осей орбит и времен обращения по сопоставлению комет, возвращающихся через долгие промежутки времени по тем же самым орбитам, я предоставляю другим.

Следующее же предложение может бросить свет на это дело.

### Предложение XLII. Задача XXII

*Исправить найденную орбиту кометы.*

*Действие 1.* Принимают положение плоскости орбиты, найденное по предыдущему предложению, и выбирают три места кометы, определенные самыми точными наблюдениями и сколь можно далекие друг от друга. Пусть $A$ есть промежуток времени между первым и вторым, $B$ — между вторым и третьим наблюдением. При этом удобно, чтобы при одном из наблюдений комета находилась в перигее или отстояла недалеко от перигея. По этим трем наблюденным местам тригонометрически вычисляют истинные места кометы в принятой плоскости ее орбиты. После того как эти места найдены, определяют арифметическими действиями, установляемыми по предложению XXI книги I, коническое сечение, через них проходящее и имеющее свой фокус в центре Солнца. Пусть площади, ограниченные им и радиусами, проведенными от Солнца к найденным местам, суть $D$ и $E$, именно: $D$ — площадь между первым и вторым наблюдением, $E$ — между вторым и третьим. Пусть $T$ есть полное время, в продолжение которого площадь $D+E$ должна бы описываться при скорости кометы согласно предложению XVI книги I.

*Действие 2.* Долгота узлов плоскости траектории увеличивается придав к ней $20'$ или $30'$, которые обозначим через $P$, наклонение же плоскости орбиты к плоскости эклиптики сохраняется. По трем наблюденным местам находят три истинных места кометы в этой новой плоскости, как и выше, затем определяют орбиту, проходящую через эти три места, и ее площади между первым и вторым, и вторым и третьим наблюдениями, которые пусть будут $d$ и $e$, а также и полное время $t$, в которое площадь $d+e$ должна бы быть описываема.

*Действие 3.* Сохраняя ту же долготу узлов, как и при первом действии, увеличивают наклонении плоскости орбиты к плоскости эклиптики, придав к этому наклонению $20'$ или $30'$, которые обозначим через $Q$. Затем, по упомянутым выше наблюдениям трех видимых мест кометы, находят три ее истинных места в этой новой плоскости и орбиту, через них проходящую, а также и ее площади между первым и вторым и вторым и третьим наблюдениями; пусть эти площади суть $\delta$ и $\varepsilon$, и пусть $\tau$ есть полное время, в продолжение которого должна бы описываться площадь $\delta+\varepsilon$.

Пусть будет:

$$C:1=A:B \qquad G:1=D:E$$
$$g:1=d:e \qquad \gamma:1=\delta:\varepsilon,$$

и пусть $S$ есть истинный промежуток времени между первым и третьим наблюдением. Соблюдая правила действий с знаками $+$ и $-$, ищут числа $m$ и $n$ так, чтобы было:

$$2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$$
$$2T-2S=mT-mt+nT-n\tau.$$

Если $J$ означает наклонение плоскости орбиты к плоскости эклиптики при первом действии и $K$ — долготу одного из узлов, то $J+nQ$ представит истинное наклонение, и $K+mP$ — истинную долготу узла.

Затем, если при первом, втором и третьем действии обозначим соответственно через $R$, $r$ и $\rho$ — параметры и через $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ — малые оси орбит, то истинный параметр той орбиты, которую комета описывает, будет

$$R + mr - mR + n\rho - nR,$$

и истинная длина малой полуоси:

$$\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$$

После того как малая ось найдена, находится и время обращения кометы.

Впрочем, времена обращений и малые оси орбит определяются с недостаточною точностью, если только не сопоставить между собою комет, которые появлялись в различное время.

Если несколько комет через одинаковые промежутки времени описывают, как оказывается, одну и ту же орбиту, то надо будет заключить, что они представляют ту же самую комету, обращающуюся по этой орбите. Тогда по временам обращений определяются малые оси орбит, по этим же осям определяются и эллиптические орбиты.

С этою целью надо вычислить орбиты многих комет в предположении, что они параболические, ибо орбиты такого рода весьма близко соответствуют явлениям. Это следует не только из сделанного сопоставления параболической орбиты кометы 1680 г., но также и по той большой комете, которая была наблюдена *Гевелием* в 1664 и 1665 гг. Он сам вычислил из своих наблюдений долготы и широты этой кометы, но с меньшею точностью. Из тех же наблюдений *Галлей* вычислил вновь места кометы и затем, по найденным таким образом местам, определил орбиту кометы.

Он нашел, что:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Долгота узла . . . . . . | = | 81°13′55″ | |
| Наклонность . . . . . . | = | 21°18′40″ | |
| Расстояние перигелия до узла | = | 49°27′30″ | |
| Долгота перигелия . . . . | = | 128°40′30″ | |
| Широта перигелия . . . . | = | 16° 1′15″ | (южная гелиоцентрическая). |

Прохождение через перигелий — ноября 24-го в 11 часов 52 минуты среднего времени Лондонского или 13 часов 8 минут Данцигского по старому стилю.

Параметр параболы 410 286, причем большая полуось земной орбиты принята за 100 000.

Насколько хорошо согласуются вычисленные по этой орбите места с наблюденными, показано в следующей таблице, составленной *Галлеем* (см. стр. 651).

В 1665 г. в *феврале* первая звезда Овна, которая в дальнейшем обозначена через $\gamma$, имела долготу $28°30'15''$ и широту N $7°8'58''$. Вторая звезда Овна была в долготе $29°17'18''$ и широте N $8°28'16''$, и еще одна звезда 7-й величины, которую называю $A$, была в долготе $20°24'45''$ и широте N $8°28'33''$. Февраля 7-го в 7 часов 30 минут *Парижского* времени, т. е. 7-го в 8 часов 37 минут Данцигского по ст. ст., комета образовала треугольник с звездами $\gamma$ и $A$, прямоугольный при $\gamma$, причем ее расстояние до звезды $\gamma$ было равно расстоянию звезд $\gamma$ и $A$ между собою, т. е. $1°19'46''$ по большому кругу, следовательно $1°20'26''$ по параллели звезды $\gamma$. Поэтому, если из долготы звезды $\gamma$ вычесть $1°20'26''$, то остается долгота кометы, равная $27°9'49'$. *Озу* (*Auzout*), на основании этого наблюдения, им произведенного, принял долготу кометы в $27°0'$. По чертежу же, составленному *Гуком*, ее долгота была тогда даже $26°59'24''$. Взяв среднее, я принял ее в $27°4'46''$. По тому же наблюдению *Озу* я принял широту кометы в $7°4'$ или $7°5'$ N. Было бы правильнее принять ее в $7°3'29''$, ибо разность широт кометы и звезды равнялась разности долгот звезд $\gamma$ и $A$.

Февраля 22-го в 7 часов 30 минут Лондонского времени, т. е. 8 часов 46 минут Данцигского, расстояние кометы от звезды $A$, по наблюдению *Гука*, нанесенному им самим на чертеж, и по наблюдениям *Озу* и *Пти* (*Petit*), также нанесенным на чертеж, равнялось $\frac{1}{5}$ расстояния звезды $A$ и первой звезды Овна, т. е. было $15'57''$; расстояние кометы от линии, соединяющей звезду $A$ с первою Овна, равнялось $\frac{1}{4}$ от сказанной пятой части, т. е. $4'$. Поэтому комета была в долготе $28°29'46''$ и широте N $8°12'36''$.

*Марта 1-го в 7 часов 0 минут Лондонского* времени, т. е. в 8 часов 16 минут Данцигского, комета была наблюдена близ второй звезды Овна, причем расстояние между ними относилось к расстоянию между первою и второю звездами Овна, т. е. к $1°33'$, как $4:45$ по *Гуку* или $2:23$ по *Готтигнису*. Отсюда следует, что расстояние кометы до второй звезды Овна было $8'16''$ по *Гуку* или $8'5''$ по *Готтигнису*, или, взяв среднее, $8'10''$. Согласно *Готтигнису*, комета почти прошла перед второю

| Истинное время Данциг | Наблюденные расстояния кометы | | Долгота | | Широта | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | наблюд. | вычисл. | наблюд. | вычисл. |
| Декабрь | От Сердца Льва | От Колоса Девы | | | S | S |
| 3ᵈ 18ʰ 29½ᵐ | 46°24′ 20″ | 22°52′ 10″ | 187° 1′ 0″ | 187° 1′ 29″ | 21°39′ 0″ | 21°38′ 50″ |
| 4 18 1½ | 46 2 45 | 23 52 40 | 186 15 0 | 186 16 5 | 22 24 0 | 22 24 0 |
| 7 17 48 | 44 48 0 | 27 56 40 | 183 6 0 | 183 7 33 | 25 22 0 | 25 21 40 |
| | | От прав. плеч. Ориона | | | | |
| 17 14 43 | 53 15 15 | 45 43 30 | 122 56 0 | 122 56 0 | 49 25 0 | 49 25 0 |
| | От Проциона | От свет. в Чел. Кита | | | | |
| 19 9 35 | 35 13 50 | 52 56 0 | 88 40 30 | 88 43 0 | 45 48 0 | 45 46 0 |
| 20 9 53½ | 40 49 0 | 40 4 0 | 73 3 0 | 73 5 0 | 39 54 0 | 39 53 0 |
| | От прав. пл. Ориона | | | | | |
| 21 9 9½ | 26 21 25 | 29 28 0 | 62 16 0 | 62 18 30 | 33 41 0 | 33 39 40 |
| 22 9 0 | 29 47 0 | 20 29 30 | 54 24 0 | 54 37 0 | 27 45 0 | 27 46 0 |
| | От Яркой Овна | От Альдебарана | | | | |
| 26 7 58 | 23 20 0 | 26 44 0 | 39 0 0 | 39 2 28 | 12 36 0 | 12 34 13 |
| 27 6 45 | 20 45 0 | 28 10 0 | 37 5 40 | 37 8 45 | 10 23 0 | 10 23 13 |
| | | От Палилиция | | | | |
| 28 7 39 | 18 29 0 | 29 37 0 | 35 24 45 | 35 27 52 | 8 22 50 | 8 23 37 |
| | От пояса Андром. | | | | | |
| 31 6 45 | 30 48 10 | 32 53 30 | 32 7 40 | 32 8 20 | 4 13 0 | 4 16 25 |
| Янв. 1665 | | | | | N | N |
| 7 7 37½ | 25 11 0 | 37 12 25 | 28 24 47 | 28 24 0 | 0 54 0 | 0 53 0 |
| | От Голов. Андром. | | | | | |
| 13 7 0 | 28 7 10 | 38 55 20 | 27 6 54 | 27 6 39 | 3 6 50 | 3 7 40 |
| | От пояса Андром. | | | | | |
| 24 7 29 | 20 32 15 | 40 5 0 | 26 29 15 | 26 28 50 | 5 25 50 | 5 26 0 |
| Февраль | | | | | | |
| 7 8 37 | | | 27 4 46 | 27 24 55 | 7 3 29 | 7 3 15 |
| 22 8 46 | | | 28 29 46 | 28 29 58 | 8 12 36 | 8 10 25 |
| Март | | | | | | |
| 1 8 16 | | | 29 18 15 | 29 18 20 | 8 36 26 | 8 36 12 |
| 7 8 37 | | | 30 2 48 | 30 2 42 | 8 56 30 | 8 56 56 |

звездою Овна в расстоянии около $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{5}$ пути, проходимого ею в сутки, т. е. 1′35″ (с чем согласно наблюдение *Озу*), или немного ближе по *Гуку*, т. е. около 1′. Поэтому, если к долготе первой звезды Овна придать 1′ и к широте ее 8′10″, то получится долгота кометы 29°18′ и широта ее N 8°36′26″.

Марта 7-го в 7 часов 30 минут *Парижского* времени, т. е. 8 часов 37 минут Данцигского, по наблюдениям *Озу*, расстояние кометы от второй звезды Овна равнялось расстоянию этой звезды до звезды *A*, т. е. 52′59″, разность же долгот кометы и второй звезды Овна составляла 45′ или 46′ или, взяв среднее, 45′30′. Значит, долгота кометы была 30°2′48″.

| Среднее время 1683 г. | Долгота Солнца | Вычисленная долгота кометы | Вычисленная широта кометы | Наблюденная долгота кометы | Наблюденная широта кометы | Разности | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Долгота | Широта |
| | | | N | | N | | |
| Июль 13ᶜ 12ᶣ 55ᵐ | 121° 2′ 30″ | 103° 5′ 42″ | 29°28′ 13″ | 103° 6′ 42″ | 29°28′ 20″ | +1′ 0″ | +0′ 7″ |
| 15 11 15 | 122 53 12 | 101 37 48 | 29 34 0 | 101 39 43 | 29 34 50 | +1 55 | +0 50 |
| 17 10 20 | 124 45 45 | 100 7 6 | 29 33 30 | 100 8 40 | 29 34 0 | +1 34 | +0 30 |
| 23 13 40 | 130 38 21 | 95 10 27 | 28 51 42 | 95 11 30 | 28 50 28 | +1 3 | —1 14 |
| 25 14 5 | 132 35 23 | 93 27 53 | 24 24 47 | 93 27 0 | 28 23 40 | —0 53 | —1 7 |
| 31 9 42 | 138 9 22 | 87 55 3 | 26 22 52 | 87 54 24 | 26 22 52 | —0 59 | —0 27 |
| 31 14 55 | 138 21 53 | 87 41 7 | 26 16 57 | 87 41 8 | 26 14 50 | +0 1 | —2 7 |
| Авг. 2 14 56 | 140 17 16 | 85 29 32 | 25 16 19 | 85 28 46 | 25 17 28 | —0 46 | +1 9 |
| 4 10 49 | 142 2 50 | 83 18 20 | 24 10 49 | 83 16 55 | 24 12 19 | —1 25 | +1 30 |
| 6 10 9 | 143 56 45 | 80 42 23 | 22 47 5 | 80 40 32 | 22 49 5 | —1 51 | +2 0 |
| 9 10 26 | 146 50 52 | 76 7 57 | 20 6 37 | 76 5 55 | 20 6 10 | —2 2 | —0 27 |
| 15 14 1 | 152 47 18 | 63 30 48 | 11 37 33 | 63 26 18 | 11 32 1 | —4 30 | —5 32 |
| 16 15 10 | 153 48 2 | 60 43 7 | 9 34 16 | 60 41 55 | 9 34 13 | —1 12 | —0 3 |
| 18 15 44 | 155 45 33 | 54 52 53 | 5 11 15 | 54 49 5 | 5 9 11 | —3 48 | —2 4 |
| | | | 8 | | S | | |
| 22 14 44 | 159 35 49 | 41 7 14 | 5 16 53 | 41 7 12 | 5 16 50 | —0 2 | —0 3 |
| 23 15 52 | 160 36 48 | 37 2 18 | 8 17 9 | 37 1 17 | 8 16 41 | —1 1 | —0 28 |
| 26 16 2 | 163 31 10 | 24 45 31 | 16 38 0 | 24 44 0 | 16 38 20 | —1 31 | —0 29 |

По составленному *Пти* чертежу наблюдений *Озу* *Гевелий* вывел широту кометы в 8°54′. Но гравер неправильно искривил путь кометы в конце движения ее, почему *Гевелий* на составленном им самим чертеже наблюдений *Озу* исправил неправильное искривление и получил широту кометы 8°55′30″. Если же исправить неправильность еще более, то широта может оказаться в 8°56′ или 8°57′.

Эта комета была также видна и *марта 9-го*, и тогда место ее должно было быть: долгота 30°18′ и широта $9°3'\frac{1}{2}$ N приблизительно.

Эта комета была видима в продолжение 3 месяцев и прошла почти через 6 знаков зодиака, причем в один из дней она описала почти 20°. Путь ее весьма сильно отклонялся от большого круга, и движение ее под конец из попятного обратилось в прямое. Несмотря, однако, на столь необычный путь, теория от начала до конца согласуется с наблюдениями не хуже, нежели теория планет обыкновенно согласуется с наблюдениями их, как это явствует из рассмотрения таблиц их движений. Однако надо вычитать около 2 минут там, где движение кометы самое быстрое, что может быть достигнуто отнимая 12″ от угла между восходящим узлом и перигелием, т. е. полагая этот угол равным 49°27′18″. Годовой параллакс как этой, так и предыдущей кометы был весьма значителен, чем доказывается движение Земли по ее орбите.

Теория комет подтверждается также движением кометы, появившейся в 1683 г. Оно было попятное и происходило по орбите, плоскость которой составляла с плоскостью эклиптики почти прямой угол. Для этой кометы по вычислениям *Галлея* было:

Долгота восходящего узла . . 173°23′
Наклонность . . . . . . . 83°11′
Долгота перигелия . . . . . 65°29′30″
Расстояние перигелия до Солнца 56 020 (при полуоси земной орбиты = 100 000).
Время прохождения через перигелий — *июля* 2-го 3 часа 50 минут.

Сличение мест кометы на этой орбите, вычисленных *Галлеем* и наблюденных *Флемстидом*, показано в предыдущей таблице.

Теория комет подтверждается также попятным движением кометы, появившейся в 1682 г.

По вычислению *Галлея* для этой кометы:

Долгота восходящего узла . . . . 51°16′30″
Наклонность . . . . . . . . . . 17°56′ 0″
Долгота перигелия . . . . . . . 302°52′50″
Расстояние перигелия до Солнца . . 58 328 ($a = 100000$).
Среднее время прохождения через перигелий — *сентября* 4-го 7 часов 39 минут.

Сличение мест по наблюдениям *Флемстида* и вычисленных по теории показано в следующей таблице.

| Истинное время 1682 г. | Долгота Солнца | Вычисленная долгота кометы | Вычисленная широта кометы | Наблюденная долгота кометы | Наблюденная широта кометы | Разность | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Долгота | Широта |
| | | | N | | | | |
| Авг. 19д 16ч 38м | 157° 0′ 7″ | 138°14′ 28″ | 25°50′ 7″ | 138°14′ 40″ | 25°49′ 55″ | —0′ 12″ | +0′ 12″ |
| 20 15 38 | 157 55 52 | 144 46 23 | 26 14 42 | 144 46 22 | 26 12 52 | +0 1 | +1 50 |
| 21 8 21 | 158 36 14 | 149 37 15 | 26 20 3 | 149 38 2 | 26 17 37 | —0 47 | +2 26 |
| 22 8 8 | 159 33 55 | 156 29 53 | 26 8 42 | 156 30 3 | 26 7 12 | —0 10 | +1 30 |
| 29 8 20 | 166 22 40 | 192 37 54 | 18 37 47 | 192 37 49 | 18 34 5 | +0 5 | +3 42 |
| 30 7 45 | 167 19 41 | 195 36 1 | 17 26 43 | 195 35 18 | 17 27 17 | +0 43 | —0 34 |
| Сент. 1 7 33 | 169 16 9 | 200 30 53 | 15 13 0 | 200 27 4 | 15 9 49 | +3 49 | +3 11 |
| 4 7 22 | 172 11 28 | 205 42 0 | 12 23 48 | 205 40 58 | 12 22 0 | +1 2 | +1 48 |
| 5 7 32 | 173 10 29 | 207 0 46 | 11 33 8 | 206 59 24 | 11 33 51 | +1 22 | —0 43 |
| 8 7 16 | 176 5 58 | 209 58 44 | 9 26 46 | 209 58 45 | 9 26 43 | —0 1 | +0 3 |
| 9 7 26 | 177 5 9 | 210 44 10 | 8 49 10 | 210 44 4 | 8 48 25 | —0 6 | +0 45 |

Теория подтверждается также попятным движением кометы появившейся в 1723 г. Для этой кометы, по вычислению *Брадлея* (профессора астрономии в *Оксфорде* по кафедре *Савиля*):

Долгота восходящего узла . . 14°16′
Наклонность . . . . . . . 49°59′
Долгота перигелия . . . . . 42°15′20″
Расстояние перигелия до Солнца 998 651 ($a = 100000$).
Среднее время прохождения через перигелий — *сентября* 16-го 16 часов 10 минут.

Сличение вычисленных в этой орбите *Брадлеем* мест кометы с наблюденными как им самим, так и его дядею *Поундом* и *Галлеем*, показано в следующей таблице.

| Среднее время 1723 г. | Наблюденная долгота кометы | Наблюденная широта кометы | Вычисленная долгота кометы | Вычисленная широта кометы | Разность Долгота | Разность Широта |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Окт. 9с 8ч 5м . . . | 307°22′ 15″ | 5° 2′ 0″ N | 307°21′ 26″ | 5° 2′ 47″ N | +49″ | —47″ |
| 10 6 31 . . . | 306 41 12 | 7 44 13 | 306 41 42 | 7 43 18 | —50 | +55 |
| 12 7 22 . . . | 305 39 58 | 11 55 0 | 305 40 19 | 11 54 55 | —22 | + 5 |
| 14 8 57 . . | 304 59 49 | 14 43 50 | 305 0 37 | 14 44 1 | —48 | —11 |
| 15 6 35 . | 304 47 41 | 15 40 51 | 304 47 45 | 15 40 55 | — 4 | — 4 |
| 21 6 22 . . | 304 2 32 | 19 41 49 | 304 2 21 | 19 42 3 | +11 | —14 |
| 22 6 24 . . . | 303 59 2 | 20 8 12 | 303 59 10 | 20 8 17 | — 8 | — 5 |
| 24 8 2 . . . | 303 55 29 | 20 55 18 | 303 55 11 | 20 55 9 | +18 | + 9 |
| 29 8 56 | 303 56 17 | 22 20 27 | 303 56 42 | 22 20 10 | —25 | +17 |
| 30 6 20 . . . | 303 58 9 | 22 32 28 | 303 58 17 | 22 32 12 | — 8 | +16 |
| Нояб. 5 5 53 . . . | 304 16 30 | 23 38 33 | 304 16 23 | 23 38 7 | + 7 | +26 |
| 8 7 6 . . . | 304 29 36 | 24 4 30 | 304 29 54 | 24 4 40 | —18 | —10 |
| 14 6 20 . . . | 305 2 16 | 24 48 46 | 305 2 51 | 24 48 16 | —35 | +30 |
| 20 7 45 . . . | 305 42 20 | 25 24 45 | 305 43 13 | 25 25 17 | —53 | —32 |
| Дек. 7 6 45 . . . | 308 4 13 | 26 54 18 | 308 3 55 | 26 53 42 | +18 | +36 |

Этих примеров вполне достаточно для убеждения в том, что движение комет по изложенной нами теории представляется не менее точно, нежели движение планет по теориям их. [206]

[206] Тиссеран заканчивает свою «Небесную Механику» следующими словами: «Закон Ньютона представляет в общем с весьма большою точностью поступательные движения всех небесных тел. Обращаясь к сказанному в конце тома III, можно поражаться, что столь многочисленные, столь сложные и некоторые столь значительные неравенства движения Луны представляются в такой мере точно теориею. Правда, кое что остается: в промежуток времени около двух с половиною столетий Луна постепенно уклоняется от вычисленного места до наибольшей величины этого уклонения в 15″, так что в продолжение этого столь длинного промежутка времени освещенный край Луны будет проходить или немного ранее, или немного позднее, перед нитями трубы меридианного круга, но это упреждение или опоздание не будет превосходить 1 секунды во времени.

Точно так же положения планет в продолжение полутора столетий точных наблюдений представляются с точностью до 2″. Есть одно исключение: Меркурий может иметь

Поэтому на основании этой теории могут быть перечислены орбиты комет и найдены времена обращений тех комет, которые движутся по эллиптическим орбитам, после чего найдутся их малые оси и расстояния афелиев от Солнца.

Комета, появившаяся в 1607 г. и имевшая попятное движение, описала орбиту, для которой по вычислениям *Галлея* было:

Долгота восходящего узла . . 50°21′
Наклонность . . . . . . . 17° 2′
Долгота перигелия . . . . . 302°16′
Расстояние перигелия до Солнца 58 680 ($a = 100\,000$).
Время прохождения через перигелий: *октября* 16-го 3 часов 50 минут.

Эта орбита весьма близко сходится с орбитою кометы, появившейся в 1682 г. Если это была одна и та же комета, появившаяся дважды, то время ее оборота составляет 75 лет и большая ось ее орбиты относится тогда к большей оси земной орбиты, как $\sqrt[3]{75 \cdot 75} : 1$, т. е. как 1778 к 100. Расстояние афелия этой кометы до Солнца относится к среднему расстоянию Земли до Солнца кругло, как 35 к 1. Зная это, нетрудно будет определить эллиптическую орбиту этой кометы. Но это будет верно, если через 75 лет комета действительно возвратится по этой орбите.[207] Остальные кометы, как кажется, обращаются в бóльшие периоды и значит отходят дальше от Солнца.

Впрочем, кометы, вследствие большого их числа и медленности их движений в афелиях, должны несколько возмущать друг друга, и их эксцентриситеты и времена обращений должны то несколько увеличиваться, то уменьшаться. Поэтому нельзя ожидать, чтобы та же самая комета возвращалась в точности через одинаковые периоды по той же самой орбите. Достаточно, если происходящие изменения будут не более тех, какие могут быть вызваны этими причинами.

---

упреждение или опоздание на величину, составляющую в некоторых местах его орбиты до 8″ или около 1/2 секунды во времени к концу ста лет. Несогласия для узла Венеры или перигелия Марса гораздо менее значительны.

В заключение чувствуется глубокое восхищение перед гением Ньютона и его преемников, перед громадными работами Леверрье, который в продолжение свыше 30 лет производил свои последовательные изыскания над всею областью планетной системы, перед теми изысканиями, которые затем столь искусно продолжены и развиты Ньюкомбом».

[207] Как известно, это оправдалось, и комета 1682 г. носит название Галлеевой.

Отсюда можно судить также о причине, почему кометы не заключаются подобно планетам в Зодиаке, но блуждают повсюду и носятся с разнообразными движениями во всех областях неба. Это происходит на тот конец, чтобы в своих афелиях, где движение их весьма медленно, они как можно дальше отстояли бы друг от друга и притягивались бы взаимно как можно слабее. По этой причине те кометы, которые более удаляются от Солнца и, следовательно, медленнее движутся в афелиях, должны и ближе приближаться к Солнцу.

Комета, появившаяся в 1680 г., отстояла от Солнца в своем перигелии менее, нежели на $^1/_6$ диаметра Солнца, и, вследствие огромной скорости в такой от него близости и некоторой плотности солнечной атмосферы, должна была испытать некоторое сопротивление, несколько замедлиться и несколько приблизиться к Солнцу; приближаясь при каждом обороте к Солнцу, она, наконец, упадет на Солнце. Также и в афелии, где она движется весьма медленно, она может быть несколько замедлена притяжением других комет и после того упасть на Солнце. Таким образом неподвижные звезды, которые постепенно истратились на свет и пары, могут восстановляться падающими на них кометами и, получив новый запас горючего, могут быть приняты за новые звезды. Такого рода те неподвижные звезды, которые появляются внезапно и вначале имеют весьма сильный блеск и затем постепенно пропадают. Такова была звезда в Кафедре *Кассиопеи*, которую *Корнелий Гемма*, наблюдавший 8 ноября 1572 г. эту часть неба ясной ночью, совершенно не видел, в следующую же ночь, 9 ноября, он видел ее превосходящей своим блеском все неподвижные звезды и едва уступающей по своему свету Венере. *Тихо-Браге* видел эту звезду 11-го числа того же месяца, когда ее блеск был наибольший; с тех пор он наблюдал, как она постепенно убывала и через 16 месяцев исчезла совсем. В *ноябре*, когда она впервые появилась, она равнялась по свету Венере. В *декабре*, несколько ослабев, она равнялась Юпитеру. В январе 1573 г. она была слабее Юпитера, но сильнее Сириуса, с которым она сравнялась в конце *февраля* и в начале *марта*. В *апреле* и *мае* она равнялась звездам 2-й величины, в *июне*, *июле* и *августе* — звездам 3-й величины, в *сентябре*, *октябре* и *ноябре* — звездам 4-й величины. В *декабре* 1573 г. и в *январе* 1574 г. — звездам 5-й величины, в *феврале* казалась равной звездам 6-й величины, и в *марте* перестала быть видимой. Ее цвет был вначале светлый, беловатый и блестящий, затем желтоватый и в марте 1573 г. красноватый, наподобие Марса или Альдебарана. В мае она стала бледновато-белой, подобно тому оттенку, который наблюдается у Сатурна; этот цвет она сохранила до конца, становясь постоянно слабее. Такова же была и звезда в правой ноге Змеи, появление которой ученики *Кеплера* наблюдали 30 сентября ст. ст. 1604 г. и которая превосходила своим светом Юпитер, тогда как в предыдущую ночь совершенно не появлялась. С того времени она постепенно убывала, и через 15 или 16 месяцев совершенно исчезла из глаз.

Говорят, что *Гиппарх* был побужден к наблюдениям неподвижных звезд и составлению их каталога подобного рода новою звездою, необыкновенно блестящей. Но неподвижные звезды, которые поочередно появляются и исчезают и блеск которых нарастает постепенно и которые по свету своему лишь иногда превосходят звезды 3-й величины, представляются относящимися к другому роду, именно, они вращаясь то обращены к Земле своею светлою, то темною частью.

Пары, производимые Солнцем, неподвижными звездами и кометными хвостами, могут от своего тяготения падать в атмосферы планет, здесь сгущаться и превращаться в воду и в влажные спирты и затем от медленного нагревания постепенно переходить в соли, в серы, в тинктуры, в ил, в тину, в глину, в песок, в камни, в кораллы и в другие земные вещества.

## *ОБЩЕЕ ПОУЧЕНИЕ*

Гипотеза вихрей подавляется многими трудностями. Чтобы планета могла описывать радиусом, проведенным к Солнцу, площади, пропорциональные времени, надо, чтобы времена обращений частей вихря были пропорциональны квадратам расстояний их до Солнца. Чтобы времена обращений планет находились в полукубическом отношении их расстояний до Солнца, и времена обращений частей вихря должны находиться в полукубическом же отношении их расстояний до Солнца. Чтобы меньшие вихри вокруг Сатурна, Юпитера и других планет могли сохранять свое обращение и спокойно плавать в вихре Солнца, времена обращения частей солнечного вихря должны быть между собою равны. Вращение Солнца и планет вокруг своих осей, которое должно бы согласоваться с движениями вихрей, совершенно не согласуется с этими пропорциями. Движения комет вполне правильны и следуют тем же законам, как и движения планет, и не могут быть объяснены вихрями. Кометы переносятся по весьма эксцентрическим орбитам во всех областях неба, чего быть не может, если только вихрей не уничтожить.

Тела, брошенные в нашем воздухе, испытывают единственно только сопротивление воздуха. Когда воздух удален, как, напр., в *бойлевой* пустоте, сопротивление прекращается, так что нежнейшее перышко и кусочек золота падают в этой пустоте с одинаковою скоростью. Таковы же условия и в небесных пространствах, которые находятся над земною атмосферою. Все тела в этих пространствах должны двигаться совершенно свободно, поэтому планеты и кометы непрестанно обращаются, следуя изложенным выше законам, по орбитам постоянного рода и положения. По законам тяготения они продолжают оставаться на своих орбитах, но получить первоначальное расположение орбит лишь по этим законам они совершенно не могли.

Шесть главных планет обращается вокруг Солнца приблизительно по кругам, концентрическим с Солнцем, по тому же направлению и приблизительно в той же самой плоскости. Десять лун обращается вокруг Земли, Юпитера и Сатурна по концентрическим кругам, по одному направлению и приблизительно в плоскости орбит самих планет. Все эти правильные движения не имеют своим началом механических причин, ибо кометы носятся во всех областях неба по весьма эксцентрическим орбитам. Вследствие движения такого рода, кометы проходят через орбиты планет весьма быстро и легко, в своих же афелиях, где они движутся медленнее и остаются дольше, они весьма далеко отстоят друг от друга и весьма мало притягивают друг друга.

Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа. Если и неподвижные звезды представляют центры подобных же систем, то все они, будучи построены по одинаковому намерению, подчинены и власти *единого*: в особенности принян в соображение, что свет неподвижных звезд — той же природы, как и свет Солнца, и все системы испускают свет друг на друга, а чтобы системы неподвижных звезд от своего тяготения не падали друг на друга, он их расположил, в таких огромных одна от другой расстояниях.

Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться господь бог вседержитель (Παντοκρατωρ). *

Ибо бог есть слово относительное и относится к рабам; божественность есть господство бога не над самим собою, как думают полагающие,

* Что означает повелитель вселенной. (*Прим. автора.*)

что бог есть душа мира, но над рабами. Бог величайший есть существо вечное, бесковечноѐ, вполне совершенное; но существо сколь угодно совершенное без господства не есть господь бог. Так мы говорим: бог мой, бог ваш, бог *Израиля*, бог богов и господь господствующих, но мы не говорим: мой вечный, ваш вечный, вечный *Израиля*, вечный богов, не говорим — бесконечный мой или совершенный мой; такие наименования не имеют отношения к рабам. Слово бог обыкновенно означает властитель,* но не всякий властитель есть бог. Господство духовного существа составляет сущность божества, истинное — истинного, высшее — высшего, мнимое — мнимого. Из истинного господства следует, что истинный бог есть живой, премудрый и всемогущий, в остальных совершенствах он высший, иначе — всесовершеннейший. Он вечен и бесконечен, всемогущ и всеведущ, т. е. существует из вечности в вечность и пребывает из бесконечности в бесконечность, всем управляет и все знает, что было и что может быть. Он не есть вечность или бесконечность, но он вечен и бесконечен, он не есть продолжительность или пространство, но продолжает быть и всюду пребывает. Он продолжает быть всегда и присутствует всюду, всегда и везде существуя; он установил пространство и продолжительность. Так как любая частица пространства существует *всегда* и любое неделимое мгновение длительности существует *везде*, то несомненно, что творец и властитель всех вещей не пребывает *где-либо* и *когда-либо* (а *всегда* и *везде*). Всякая душа, обладающая чувствами, в разное время при разных органах чувств и движений составляет то же самое неделимое лицо. В длительности находятся последовательные части, существующие совместно в пространстве, но нет ни тех, ви других в личности человека, т. е. в его мыслящем начале, и тем менее в мыслящей сущности бога. Всякий человек, поскольку он есть предмет чувствующий, есть единый и тот же самый человек в продолжение своей жизни, во всех своих отдельных органах чувств. Бог есть единый и тот же самый бог всегда и везде. Он вездесущ не по свойству только, но по самой сущности, ибо свойство не может существовать без сущности. В вем все содержится и все вообще движется, но без действия друг на друга.** Бог не испытывает воздействин от движущихся тел,

* *Покок* производит латинское слово *deus* (бог) от арабского *du* (в родительном падеже di), означающего господина. В этом смысле князья называются «dii» (Псал. 84, 6, Иоан. X, 45) и *Моисей* называется «*deus*» брата *Аарона* и *deus* Фараона (Исх. IV, 16, и VII, 1). В этом же смысле души умерших князей прежде язычниками именовались богами, но ложно, ибо они не обладали господством. (*Прим. автора.*)

** Такого мнения придерживались также древние. Так, *Пифагор* (Cicero, De Natura. Deorum, lib. I), *Фалес, Анаксагор* (Virgilius, Georg, I, IV, 220, et Aeneid., lib. VI, 721); *Philo*, движущиеся тела не испытывают сопротивления от вездесущия божия. Признано, что необходимо существование высшего божества, поэтому необходимо, чтобы он был *везде* и *всегда*. Поэтому он весь себе подобен, весь — глаз, весь — ухо, весь — мозг, весь — рука, весь — сила чувствования, разумения и действования, но по способу совершенно не человеческому, совершенно не телесному, по способу, для нас совершенно неведомому. Подобно тому как слепец не имеет представления о цветах, так и мы не имеем представления о тех способах, коими всемудрейший бог все чувствует и все постигает. Он совершенно не обладает телом и телесным видом, поэтому его нельзя ни видеть, ни слышать, ни ощущать, вообще его не должно почитать под видом какой-либо телесной вещи. Мы имеем представление об его свойствах, но какого рода его сущность — совершенно не знаем. Мы видим лишь образы и цвета тел, слышим лишь звуки, ощущаем лишь наружные поверхности, чуем лишь запах и чувствуем вкусы: внутреннюю же сущность никаким чувством, никаким действием мысли не постигаем, тем меньшее можем мы иметь представление о сущности бога. Мы познаем его лишь по его качествам и свойствам и по премудрейшему и превосходнейшему строению вещей и по конечным причинам, и восхищаемся по совершенству всего, почитаем же и поклоняемся по господству Ибо мы поклоняемся ему как рабы, и бог без господства, провидения и конечных причин был бы ничем иным, как судьбою и природою. От слепой необходимости природы, которая повсюду и всегда одна и та же, не может происходить изменения вещей. Всякое разнообразие вещей, сотворенных по месту и времени, может происходить лишь от мысли и воли существа необходимо существующего. Иносказательно лишь говорится, что бог видит, слышит, говорит, смеется, любит, ненавидит, желает, дает, принимает, радует, гневается, борется, изготовляет, созидает, строит, ибо всякая речь о боге складывается по подобию дел человеческих, конечно не совершенному, а лишь частному.

Вот что можно сказать о боге, рассуждение о котором, на основании совершающихся явлений, конечно, относится к предмету натуральной философии.

До сих пор я изъяснил небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения.

---

Alleg., lib. I вначале; *Aratus*, Phoen. вначале. Также и Свящ. Писание: Деян., XVII, 27, 28; Іоан., XIV, 2; Втор., IV, 39; X, IV; Псал., CXXXIX, 7, 8, 9; Цар., 1-ая, VIII, 27; Іова, XII, 12, 13, 14; Иеремия, XXIII, 23, 24. Идолопоклонники измышляли, что Солнце, Луна, звезды, души людей и другие части мира суть части высшего божества, почему им следовало поклоняться, но сие ложно. (*Прим. автора.*)

Эта сила происходит от некоторой причины, которая проникает до центра Солнца и планет без уменьшения своей способности и которая действует не пропорционально величине *поверхности* частиц, на которые она действует (как это обыкновенно имеет место для механических причин), но пропорционально количеству *твердого* вещества, причем ее действие распространяется повсюду на огромные расстояния, убывая пропорционально квадратам расстояний. Тяготение к Солнцу составляется из тяготения к отдельным частицам его и при удалении от Солнца убывает в точности пропорционально квадратам расстояний даже до орбиты Сатурна, что следует из покоя афелиев планет, и даже до крайних афелиев комет, если только эти афелии находятся в покое. Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Все же, что не выводится из явлений, должно называться *гипотезою*, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам, не место в экспериментальной философии.

В такой философии предложения выводятся из явлений и обобщаются помощию наведения. Так были изучены непроницаемость, подвижность и напор тел, законы движения и тяготение. Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря.

Теперь следовало бы кое-что добавить о некотором тончайшем эфире, проникающем все сплошные тела и в них содержащемся, коего силою и действиями частицы тел при весьма малых расстояниях взаимно притягиваются, а при соприкосновении сцепляются, наэлектризованные тела действуют на бо́льшие расстояния, как отталкивая, так и притягивая близкие малые тела, свет испускается, отражается, преломляется, уклоняется и нагревает тела, возбуждается всякое чувствование, заставляющее члены животных двигаться по желанию, передаваясь именно колебаниями этого эфира от внешних органов чувств мозгу и от мозга мускулам. Но это не может быть изложено вкратце, к тому же нет и достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны.

# АЛФАВИТНЫЙ ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Настоящий указатель является неотъемлемой частью третьего латинского издания "Начал", по которому выполнен перевод А.Н. Крылова. По неясным причинам этот указатель не включался в предшествующие издания "Начал" на русском языке. Возможно, он был исключен во избежание трудностей перекомпоновки смысловых единиц указателя, требуемой для сохранения алфавитного порядка их расположения на языке перевода. При подготовке настоящего издания было сочтено необходимым включить в него оригинальный предметный указатель, который дает представление о том, как сам Ньютон классифицировал материал "Начал". В то же время следует иметь в виду, что построение этого указателя отличается от принятого в наши дни.

При переводе сохранены все смысловые единицы указателя. Изменен лишь порядок их представления – он приведен в соответствие с русским алфавитом. Непривычные для современного читателя форма и стиль единиц указателя обусловлены до некоторой степени стремлением оставить при переводе на первом месте те же слова, которыми начинаются единицы латинского указателя. Для сохранения целостности исходного материала при переводе алфавитный порядок расположения единиц соблюдался лишь в общем, в деталях он нарушался. Например, единицы, относящиеся к описанию комет, помещены в соответствии с алфавитом между единицами "Квадратура..." и "Конических сечений..."; однако в относительном расположении единиц, посвященных кометам, сохранен порядок, принятый в "Началах". Сохранена также система ссылок. Так, ссылка "кн. III, пр. XII, XIII, 653" означает, что читатель отсылается к предложениям XII и XIII книги третьей и на страницу 653.

При переводе устранены некоторые очевидные опечатки, имеющиеся в издании "Начал" 1726 г. По возможности сохранена лексика перевода А.Н. Крылова, несмотря на то что в отдельных случаях она несколько устарела.

Перевод указателя выполнен С.Р. Филоновичем.


Апсид перемещение обсуждается кн. I, отд. IX, 184

Бога природа 659, 660

Брошенное тело в среде, лишенной сопротивления, как выводится, должно двигаться по параболе 50, 90, 279, 353

Брошенных тел движение в сопротивляющихся средах кн. II, пр. IV, X

Венеры

- время оборота 509
- расстояние от Солнца 509
- афелия движение 529

Вес тел

- на Земле, либо на Солнце, либо на любой планете при одинаковых расстояниях от их центров пропорционален количеству материи [массе] в телах кн. III, пр. VI
- не зависит от их формы и строения 517
- в разных областях Земли определяется и сравнивается между собой кн. III, пр. XX

Вихревая природа и состояние отклоняются на основе исследования кн. II, отд. IX, 658

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

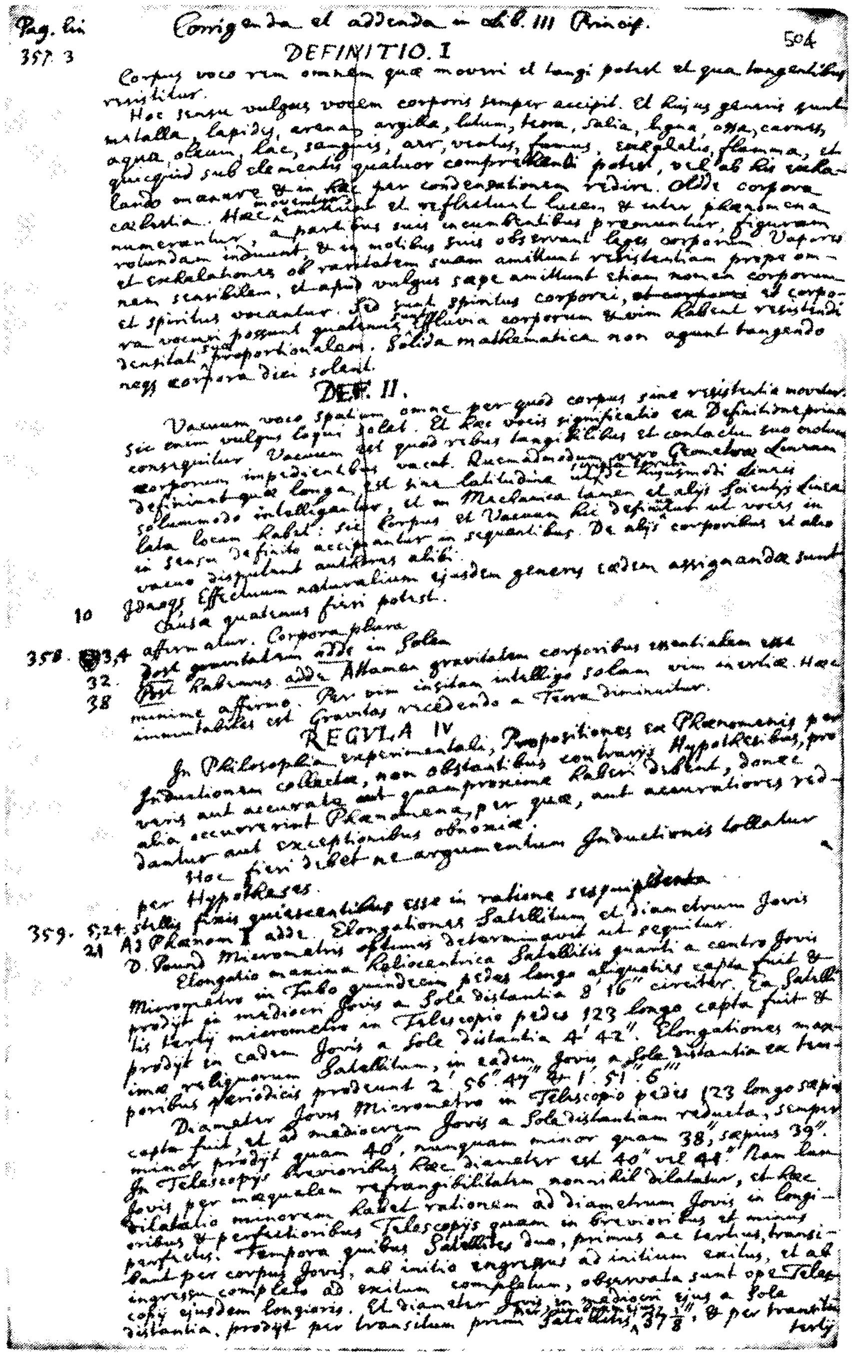
AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

*LONDINI:*
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

Титульный лист третьего издания "Начал"

Воздуха
плотность определяется для какой угодно высоты кн. II, пр. XXII; показывается, какова она на высоте, равной полудиаметру Земли, 642
упругая сила, каковой он обладает на принятом основании, кн. II, пр. XXIII
сила тяжести, с силой тяжести воды сопоставленная, 642
сопротивление; каково оно определяется экспериментами с маятником 412, находится по экспериментам с падающими телами и наиточнейшей теории 466
Волн скорость распространения на поверхности стоячей воды находится кн. II, пр. XLVI
Время абсолютное и относительное 30, 31



Pag. lin. Corrigenda et addenda in Lib. III Princip. 504

357. 3 DEFINITIO. I

Corpus voco rem omnem quæ moveri et tangi potest et qua tangentibus resistitur. Hoc sensu vulgus vocem corporis semper accipit. Et hujus generis sunt metalla, lapides, arenæ, argilla, lutum, terra, salia, ligna, ossa, carnes, aqua, oleum, lac, sanguis, aer, vapores, fumus, exhalatio, flamma, et quicquid sub elementis quatuor comprehendi potest, vel ab his exhalando manare [illegible] per condensationem redire. Adde corpora cœlestia. [illegible] a partibus suis incumbentibus premuntur, figuram rotundam induunt, [illegible] et exhalationes ob raritatem suam [illegible] [illegible] corporum [illegible] [illegible] Solida mathematica non agunt tangendo neque corpora dici solent.

DEF. II.

Vacuum voco spatium omne per quod corpus sine resistentia movetur. [illegible]

10 Idque effectum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ quatenus fieri potest.

358. 3, 4 [illegible] Corpora plura [illegible]

32. Post [illegible] adde [illegible]

38 [illegible]

REGULA IV.

In Philosophia experimentali, Propositiones ex Phænomenis per Inductionem collectæ, non obstantibus contrariis Hypothesibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint Phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet ne argumentum Inductionis tollatur per Hypotheses.

359. 5, 24 [illegible]

21 Ad Phænom I adde. Elongationes Satellitum et diametrum Jovis D. Pound micrometris optimis determinavit ut sequitur. [illegible] Elongatio maxima heliocentrica Satellitis quarti a centro Jovis micrometro in Tubo quindecim pedes longo [illegible] capta fuit et prodijt in mediocri Jovis a Sole distantia 8′ 16″ circiter. [illegible] Telescopio pedes 123 longo capta fuit et prodijt in eadem Jovis a Sole distantia 4′ 42″. [illegible] 2′ 56″ 47‴, 1′ 51″ 6‴. [illegible] Telescopio pedes 123 longo [illegible]

Diameter Jovis micrometro in [illegible] Jovis a Sole distantiam reducta, semper minor prodijt quam 40″, nunquam minor quam 38″, sæpius 39″. [illegible] Telescopijs [illegible] hæc diameter est 40″ vel 41″. [illegible] Jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, et hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus et perfectioribus Telescopijs quam in brevioribus et minus perfectis. Tempora quibus Satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus Jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, et ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope Telescopij ejusdem longioris. Et diameter Jovis in mediocri ejus a Sole distantia prodijt per transitum primi Satellitis [illegible], et per transitum tertij [illegible]

Страница рукописи И. Ньютона с поправками, сделанными им при подготовке третьего издания "Начал"

Времени астрономическое уравнение доказывается опытами с маятниковыми часами и посредством затмений спутников Юпитера 32
Время оборотов тел, обращающихся по эллипсам, когда центростремительная сила направлена к фокусу, кн. I, пр. XV

Гидростатики начала излагаются кн. II, отд. V
Гипербола
каким законом центробежной силы, направленной от обращающегося тела и от центра кривой, она описывается 90
каким законом центробежной силы, направленной от обращающегося тела и от фокуса кривой, она описывается кн. I, пр. XI
каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к фокусу кривой, она описывается кн. I, пр. XII
Гипотезы какого рода изгоняются из натуральной философии 662
Градусов земного меридиана длина описывается, а также объясняется, как могут быть выведены из теории незначительные неравенства, кн. III, пр. XX

Движения количество определяется 24
Движения абсолютное и относительное 30–35; их можно отличить друг от друга, что демонстрируется примером, 35, 36
Движения законы 39 и следующая
Движений сложение и разложение 41–43
Движения столкнувшихся тел после отражения; показывается, как они могут определяться прямым опытом, 51
Движение тел
по коническим эксцентричным сечениям кн. I, отд. III
по подвижным орбитам кн. I, отд. IX
по заданным поверхностям и колебательное движение подвешенных тел кн. I, отд. X
Движение тел, взаимно притягивающихся центростремительными силами, кн. I, отд. XI
Движение весьма малых тел под действием центростремительных сил, направленных к отдельным частицам весьма большого тела, кн. I, отд. XVI
Движение тел при сопротивлении
пропорциональном скорости кн. II, отд. I
пропорциональном второй степени скорости кн. II, отд. II
частью пропорциональном первой степени скорости, частью – второй кн. II, отд. III
Движение
тел, перемещающихся по инерции в сопротивляющихся средах, кн. II, пр. I, II, V–VII, XI, XII, 434
тел прямолинейное вверх и вниз в сопротивляющихся средах под действием постоянной силы тяжести кн. III, пр. III, VIII, IX, XIII, XIV, XL
тел, брошенных в сопротивляющихся средах, испытывающих действие постоянной силы тяжести, кн. II, пр. IV, X
тел округлых в сопротивляющихся средах кн. II, отд. IV
маятников в сопротивляющихся средах кн. II, отд. VI
Движение и сопротивление жидкостей кн. II, отд. VII
Движение, распространяющееся через жидкость, кн. II, отд. VIII
Движение жидкостей круговое или вихревое кн. II, отд. IX

Движение тела под действием тяжести в пустоте; определяется, каково оно, 531
Движение прямолинейное к центру или от центра; устанавливается связь пройденных путей, затраченных времен и приобретенных скоростей при каком-либо заданном роде центростремительной силы кн. I, отд. VII
Движение тел вверх и вниз в сопротивляющихся средах кн. II, пр. III, VIII, IX, XIII, XIV, XL
Дыма поднятие в очаге попутно объясняется 644

Жидкости определение 377
Жидкостей плотности и давления; устанавливается, каким законам они подчиняются, кн. II, отд. V
Жидкости, вытекающей из отверстия, проделанного в дне сосуда, определяется движение кн. II, пр. XXXVI

Задачи
кеплеровой решение с помощью трохоиды и посредством приближения кн. I, пр. XXXI
древних о четырех линиях, упоминаемой у Паппа, решенной Декартом путем алгебраического расчета, геометрическое сопоставление 121
Звезд неподвижных
покой доказывается 529
лучистость и мерцание; каким причинам их следует приписывать 639
Звезды новые, откуда могут зарождаться 657
Звука
природа объясняется кн. II, пр. XLIII, XLVII–L
распространение происходит по прямой, путем расширения 470; оно происходит приведением в движение воздуха 484
скорость определяется расчетом 484; согласно теории она должна быть в летнее время немного больше, чем в зимнее 486
прекращение происходит немедленно, как только прекращается движение звучащего тела, 486
усиление с помощью переговорных труб 486
Земли
размеры согласно Норвуду 531, согласно Пикару 531, согласно Кассини 531
форма, отношение диаметров и длина градуса меридиана находятся кн. III, пр. XIX, XX
высота при экваторе превосходит высоту при полюсах 535, 541
полудиаметр наибольший и наименьший 535, средний 535 и др.
шар имеет большую плотность, чем если бы он весь состоял из воды, 525
оси нутация кн. III, пр. XXI
движение годичное по орбите доказывается кн. III, пр. XII, XIII, 653
эксцентриситета величина 580
афелия движение, величина 529

Инерции сила определяется 25

Как [пропорционально] математическое значение этого словца определяется 64 [см. примеч. 28 переводчика на с. 63, 64]

Квадратура овальной кривой в общем случае не может быть выражена конечным числом членов кн. I, лемма XXVIII, 153
Кометы
составляют род планет, а не метеоров 607, 638
находятся далее Луны и бывают в области планет 601
их расстояния, каким образом можно их найти возможно точнее путем наблюдений 602
чаще наблюдаются в полушарии, где находится Солнце, чем в противоположном; и почему это происходит 606
сияют отраженным от них светом Солнца 606; каково обыкновенно бывает количество света 603
окружены огромными атмосферами 604
которые к Солнцу подходят ближе, считаются самыми малыми 647
не заключаются в Зодиаке (подобно планетам), но носятся разнообразными движениями во всех областях неба 657
могут иногда падать на Солнце и доставлять новый запас горючего 657
их использование предлагается 645, 658
движутся по коническим сечениям, имеющим фокус в центре Солнца, и радиусами, проведенными к Солнцу, описывают площади, пропорциональные временам. Если же они двигаются по замкнутым орбитам (вытянутым эллипсам), то возвращаются по кривым, которые очень близки к параболам, кн. III, пр. XL
траектория параболическая находится по трем данным наблюдениям кн. III, пр. XLI; найденная орбита исправляется кн. III, пр. XLII
место на параболической траектории находится в заданный момент времени 608; кн. I, пр. XXX
скорость соотносится со скоростями планет 608
Кометные хвосты
поворачиваются от Солнца 640
становятся длинными и сияющими после прохождения в непосредственной близости от Солнца 638
их заметная разреженность 642
их происхождение и природа 604, 639
время, в течение которого пары восходят от головы кометы, 642, 643
Комета 1664 и 1665 годов
ее наблюдавшееся движение обсуждается и сопоставляется с теорией 649
Комета 1680 и 1681 годов
ее наблюдавшееся движение 622; то же, рассчитанное для параболической орбиты, 628; и для эллиптической орбиты 628
ее траектория и хвост показаны для каждого места в отдельности 638
Комета 1682 года
ее движение, сопоставленное с теорией, 654
сравнение с кометой 1607 года еще раз с очевидностью показывает, что ее период возвращения 75 лет, 656
Комета 1683 года
ее движение, сопоставленное с теорией, 652
Комета 1723 года
ее движение, сопоставленное с теорией, 654, 655

Конических сечений геометрическое описание
когда даны фокусы кн. I, отд. IV
когда не даны фокусы кн. I, отд. V; когда даны центр или асимптоты 141
Кривизна кривых, каким образом ее следует определять отношением, 346, 347, 553
Кривые разделяются на геометрически рациональные [алгебраические] и геометрически иррациональные [трансцендентные] 155

Луны
фигура находится путем расчета кн. III, пр. XXXVIII
либрации объясняются кн. III, пр. XVII
диаметр средний видимый 588
диаметр истинный 589
вес тел на ее поверхности 589
плотность 588
количество материи [масса] 589
среднее расстояние от Земли, сколько оно содержит наибольших полудиаметров Земли 590, сколько средних 590
параллакс максимальный экваториальный немного больше, чем максимальный полярный 591
сила, движущая море, величина кн. III, пр. XXXVII; она не может быть ощутима в опытах с маятниками либо в статических или гидростатических опытах 588
время оборота 590
время синодического оборота 552
движение и неравенства движения выводятся из их причин кн. III, пр. XXII, 579 и следующая
Луна обращается медленнее по растянутой орбите, когда Земля находится в перигелии; обращается быстрее по сжатой орбите, когда Земля находится в афелии, кн. III, пр. XXII, 580
медленнее обращается по растянутой орбите, находясь в сизигиях в апогее; быстрее обращается по сжатой орбите, находясь в апогее в квадратурах, 581
медленнее обращается по растянутой орбите, находясь в узлах в сизигиях; быстрее обращается по сжатой орбите, находясь в узлах в квадратурах, 581
медленнее движется в своих квадратурах, быстрее – в сизигиях; и радиусом, проведенным к Земле, описывает за то же время площадь, меньшую в первом случае и бóльшую – в последнем кн. III, пр. XXII. Рассчитывается неравенство этих площадей кн. III, пр. XXVI. Сверх того, Луна имеет орбиту большей кривизны и дальше уходит от Земли в первом случае, имеет орбиту меньшей кривизны и подходит ближе к Земле – в последнем кн. III, пр. XXII. Форма этой орбиты и отношение ее диаметров определяются расчетом кн. III, пр. XXVIII. И, кроме того, предлагается метод нахождения расстояния Луны до Земли по ее часовому движению кн. III, пр. XXVII
апогей медленнее движется в афелии Земли и быстрее в перигелии кн. III, пр. XXII, 580
апогей, когда находится в сизигиях, обладает прямым движением с наибольшей скоростью; обладает попятным движением, когда находится в квадратурах, 582
эксцентриситет оказывается наибольшим в апогее в сизигиях и наименьшим в квадратурах кн. III, пр. XXII, 582

узлы движутся медленнее в афелии Земли и быстрее в перигелии кн. III, пр. XXII, 580
узлы покоятся в их сизигиях и перемещаются быстрее всего назад в квадратурах кн. III, пр. XXII. Движение узлов и неравенства движения рассчитываются из теории тяготения кн. III, пр. XXX–XXXIII
наклонность орбиты к эклиптике максимальна в сизигиях узлов, минимальна – в квадратурах кн. I, пр. LXVI, следств. 10; изменение наклонности рассчитывается из теории тяготения кн. III, пр. XXXIV, XXXV
Луны уравнений движения астрономические применения 579 и следующие
движение среднее Луны
уравнение годичное 579
уравнение полугодичное первое 581
уравнение полугодичное второе 581
уравнение центра первое 582, 156 и следующие
уравнение центра второе 583
Луны вариация первая кн. III, пр. XXIX
движение апогея среднее
уравнение годичное 580
уравнение полугодичное 582
эксцентриситета
уравнение полугодичное 582
движение узлов среднее
уравнение годичное 580
уравнение полугодичное кн. III, пр. XXXIII
наклонность орбиты к эклиптике
уравнение полугодичное 579
Луны движения теория; каким методом следует ее устанавливать с помощью наблюдений 584

Магнитная сила 54, 391, 518, 591
Марса
время оборота 509
расстояние от Солнца 509
движение афелия 529
Материи
количество [масса] определяется 23
сила врожденная, или сила инерции определяется 25
сила приложенная определяется 26
протяженность, твердость, непроницаемость, подвижность, сила инерции, тяготение; каким образом они становятся известны 502, 662
Материя тонкая картезианцев некоторыми отклоняется до опыта 419
Маятников действия объясняются кн. I, пр. L–LIII; кн. II, отд. VI
Маятников изохронных различные длины на разных широтах сравниваются между собой как посредством наблюдений, так и с помощью теории тяготения кн. III, пр. XX
Меркурия
время оборота 509

расстояние до Солнца 509
афелия движение 529
Место определяется и разделяется на абсолютное и относительное 31
Места тел, движущихся по коническим сечениям, находятся в заданный момент времени кн. I, отд. VI
Метод
отношений первых и последних кн. I, отд. I
преобразования фигур в другие, которые являются кривыми того же порядка, кн. I, лемма XXII, 131
флюксий кн. II, лемма II, 331
разностей кн. III, леммы V и VI, 608–611
нахождения приближенных истинных квадратур любых кривых 610
рядов сходящихся применяется для решения трудных задач 193, 195, 279, 343, 570
Механики, так называемой, возможности объясняются и доказываются 42, 43, 55, 56
Мира начало не имеет механических причин 659
Моря приливы из их причины выводятся кн. III, пр. XXIV, XXXVI, XXXVII

Небесные пространства
сопротивления ощутимого лишены кн. III, пр. X; 607; и поэтому почти совершенно лишены телесной жидкости 467
прохождение света допускают без какого-либо преломления 639

Окружность круга; каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к какой-либо данной точке, она может быть описана кн. I, пр. IV, VII, VIII
Оптических овалов определение, которое утаил Декарт, кн. I, пр. XCVII. Более общее решение задачи Декарта кн. I, пр. XCVIII
Орбит нахождение
которые описывают тела, вышедшие из данного места с данной скоростью; когда центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния и абсолютная величина этой силы известна кн. I, пр. XVII
которые описывают тела, когда центростремительные силы обратно пропорциональны кубу расстояния, 87, 181, 190
которые описывают тела под действием каких угодно центростремительных сил кн. I, отд. VIII

Парабола; каким законом центростремительной силы, направленной от тела к фокусу кривой, она описывается кн. I, пр. XIII
Планеты
не перемещаются телесными вихрями 496, 498, 658
главные
Солнце окружают 508
двигаются по эллипсам, имеющим фокус в центре Солнца, кн. III, пр. XIII
радиусами, проведенными к Солнцу, описывают площади, пропорциональные времени, 509, кн. III, пр. XIII
временами оборотов обладают, которые находятся в полукубическом отношении расстояний от Солнца, 508; кн. III, пр. XIII и кн. I, пр. XV

удерживаются на своих орбитах силой тяготения, которая принадлежит Солнцу и обратно пропорциональна квадрату расстояния от его центра, кн. III, пр. II, V
Планет спутники
двигаются по эллипсам, имеющим фокусы в центре главных планет, кн. III, пр. XXII
радиусами, проведенными к главным планетам, описывают площади, пропорциональные времени, 504, 507, 509, кн. III, пр. XXII
временами обращений обладают, которые находятся в полукубическом отношении расстояний от их главных планет, 504, 507, кн. III, пр. XXII и кн. I, пр. XV
удерживаются на своих орбитах силой тяготения, которая принадлежит главным планетам и обратно пропорциональна квадрату расстояния от их центров, кн. III, пр. I, III, IV, V
Планет
времена оборотов 509
расстояния от Солнца 509
афелии орбит и узлы почти покоятся кн. III, пр. XIV
орбиты определяются кн. III, пр. XV, XVI
места на орбитах находятся кн. I, пр. XXI
плотность теплоты устанавливается, которую они получают от Солнца, 521
суточные движения равномерны кн. III, пр. XVII
оси меньше диаметров, которые проведены перпендикулярно этим осям, кн. III, пр. XVIII
Площади, которые описываются радиусом, проведенным из центра силы притяжения к телу, обращающемуся по кругу, сравниваются с временами обращений кн. I, пр. I, II, III, LVIII, LXV
Покой истинный и относительный 31–34
Полуторное [полукубическое] отношение определяется 66 [см. примеч. 30 переводчика на с. 66]
Притяжение всех тел вообще доказывается кн. III, пр. VII; демонстрируется, какова достоверность этих доказательств, 504
Притяжения причину или род творец никак не определил 29, 30, 216, 244, 662
Пространство
абсолютное и относительное 30–33
не заполнено равномерно 517
Пустота существует либо все пространство (если, как говорят, оно заполнено) заполнено неравномерно 467, 518

Равноденствий предварение
причины этого движения показываются кн. III, пр. XXI
величина движения из этих причин рассчитывается кн. III, пр. XXXIX

Сатурна
время оборота 509
расстояние от Солнца 509
диаметр видимый 507
диаметр истинный 521
сила притяжения, величина 520
вес тел на его поверхности 519

плотность 521
количество материи [масса] 521
возмущение от Юпитера, величина 528
диаметр видимый кольца, которым охвачен Сатурн, 507
Света
распространение не является мгновенным 284; не происходит путем возмущения какой-либо эфирной среды 484
скорость различна в разных средах кн. I, пр. XCV
отражение рассматривается кн. I, пр. XCVI
преломление рассматривается кн. I, пр. XCIV; оно происходит не только в точке падения 284
искривление при прохождении близ краев тел, наблюдаемое на опыте, 284
Свойства тел, каким образом они постигаются и принимаются 503
Сечения конические, каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к какой-либо данной точке, они описываются 105
Сил сложение и разложение 41, 42
Силы притяжения тел
сферических, состоящих из частиц, притягивающих по какому-либо закону, обсуждаются кн. I, отд. XII
несферических, состоящих из частиц, притягивающих по какому-либо закону, обсуждаются кн. I, отд. XIII
Сила центробежная тел на экваторе Земли, величина 532
Силы центростремительной дается определение 26
величина абсолютная определяется 27
величина ускорительная определяется 28
величина движущая определяется 28
отношение к какой-либо известной силе; демонстрируется, каким образом следует его находить, 80
Сил центростремительных нахождение, когда тело обращается по какой-либо орбите вокруг неподвижного центра в среде без сопротивления, кн. I, пр. VI, кн. I, отд. II и III
Силами центростремительными, направленными к какой-то точке, тело можно заставить обращаться по некой кривой; существуют центростремительные силы, направленные к другой точке, которые могут заставить тело описывать ту же кривую за то же время 86
Силами центростремительными тело принуждается обращаться по некой кривой; существуют силы, которые могут заставить его описывать новую кривую, если ординаты увеличатся или уменьшатся в каком угодно отношении, либо изменится угол их наклонения, но время оборота останется неизменным 90
Силами центростремительными, убывающими в двойном отношении расстояний, какие кривые могут быть описаны, показывается 98, 219
Силой центростремительной
которая обратно пропорциональна кубу ординаты, направленной к бесконечно удаленному центру сил, тело будет двигаться по какому-либо данному коническому сечению 87
которая обратно пропорциональна кубу ординаты, направленной к бесконечно удаленному центру сил, тело будет двигаться по гиперболе 279

Скорость наибольшая, которую шар, падающий в сопротивляющейся среде, может приобрести, кн. II, пр. XXXVIII, следствие 2

Скорости тел, движущихся по коническим сечениям, когда центростремительные силы направлены к фокусам, кн. I, пр. XVI

Солнце

вокруг общего с планетами центра тяжести движется кн. III, пр. XII

время его вращения вокруг своей оси 530

диаметр его средний видимый 588

диаметр истинный 521

параллакс его горизонтальный 521

параллакс месячный имеет 528

сила его притяжения, величина 520

вес тел на его поверхности 520

плотность его 521

количество материи [масса] 521

сила его, возмущающая движение Луны, 511; кн. III, пр. XXV

сила, движущая море, кн. III, пр. XXXVI

Сопротивления величина

в средах, не являющихся непрерывными, кн. II, пр. XXXV

в средах непрерывных кн. II, пр. XXXVIII

в средах любого рода 435

Сопротивления теория подтверждается

опытами с маятниками кн. II, пр. XXX, XXXI, общ. поуч., 408

опытами с падающими телами кн. II, пр. XL, поуч., 456

Сопротивление сред

пропорционально их плотности при прочих равных условиях 418, 419, кн. II, пр. XXXIII, XXXV, XXXVIII, 466

находится в двойном отношении со скоростью тел, которые испытывают сопротивление, при прочих равных условиях 325, 410, кн. II, пр. XXXIII, XXXV, XXXVIII, 461

находится в двойном отношении диаметров сферических тел, которые испытывают сопротивление, при прочих равных условиях 414, 415, кн. II, пр. XXXIII, XXXV, XXXVIII, поуч., 456

Сопротивление жидкостей трояко; оно происходит либо от инерции материи жидкости, либо от сцепления ее частей, либо от трения 368. Сопротивление, которое ощущается в жидкости, почти все первого рода 465; и оно не может уменьшиться от разделения частиц жидкости, когда плотность остается неизменной, 466

Сопротивления шара отношение к сопротивлению цилиндра в средах, не являющихся непрерывными, кн. II, пр. XXXIV; в средах, находящихся под давлением, 451

Сопротивление шара в средах, не являющихся непрерывными, кн. II, пр. XXXV; в средах, находящихся под давлением, кн. II, пр. XXXVIII. Каким образом его следует определять на опыте пр. XL

Сопротивление, которое испытывает в жидкости усеченный конус; каким образом оно делается меньшим 428

Сопротивление наименьшее, оказываемое твердому телу, 430

Сотрясений воздуха, коими звук распространяется, промежутки или ширины находят-

ся кн. II, пр. L, 486. Эти промежутки для открытых звучащих труб, вероятно, равны удвоенной длине труб 486
Спираль, которая пересекает все свои радиусы под данным углом; показывается, каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к центру спирали, она может быть описана, кн. I, пр. IX, кн. II, пр. XV, XVI
Спутника
Юпитера крайнего максимальная гелиоцентрическая элонгация от центра Юпитера 519
Гюйгенсова максимальная гелиоцентрическая элонгация от центра Сатурна 520
Спутников
Юпитера времена обращений и расстояния от центра Юпитера 506
Сатурна времена обращений и расстояния от центра Сатурна 507
Юпитера и Сатурна неравенства движения могут быть выведены из движений Луны 543
Судна конструкция; небесполезное предложение 429
Сущность всех вещей скрыта 662
Сфероида притяжение, сила частиц которого обратно пропорциональна квадрату расстояния, 273

Тень Земли при затмениях Луны должна уширяться вследствие преломления атмосферы 584
Теплота, как известно, увеличивает длину железной линейки 540
Теплота Солнца находится в обратном отношении расстояний от Солнца 638
какова она около Меркурия 521
какова она была около кометы 1680 года при прохождении последней через перигелий 638
Тяготение
это сила иного рода, нежели магнитная сила, 518
взаимное существует между Землей и ее частями 54
его причина не определяется 662
существует на всех планетах 514; и от поверхности планет вверх убывает в двойном отношении расстояний от центра кн. III, пр. VIII, а вниз – в простом отношении этих расстояний кн. III, пр. IX
существует ко всем телам и пропорционально количеству материи [массе] каждого из них кн. III, пр. VII
Тяготение есть та сила, которой Луна удерживается на орбите, кн. III, пр. IV; это доказывается более точным расчетом 589, 590
Тяготение есть та сила, которой главные планеты и спутники Юпитера и Сатурна удерживаются на орбитах, кн. III, пр. V

Углы касания [или "соприкосновения"] не суть все одинаково порожденные, но последующий бесконечно мал по отношению к предыдущим 68
Умозаключений правила 502

Центр тяжести общий нескольких тел от действия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни состояния движения 47

Центр тяжести общий Земли, Солнца и всех планет находится в покое кн. III, пр. XI, 526; это подтверждается следствием 2 пр. XIV кн. III
Центр тяжести общий Земли и Луны при годовом движении описывает эллипс 528
на каких расстояниях находится он от Земли и Луны 589
Центр сил, которыми удерживаются тела, обращающиеся по орбите, находится указанием площадей 78
каким образом он находится по данным скоростям обращения кн. I, пр. V
Циклоиды или эпициклоиды
спрямление кн. I, пр. XLVIII, XLIX, 209, 210
эволюта кн. I, пр. L, 210
Цилиндра притяжение, слагающееся из притяжения частиц, силы которых обратно пропорциональны квадрату расстояний 272

Эллипс
каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к центру кривой, он описывается кн. I, пр. X
каким законом центростремительной силы, направленной от обращающегося тела к фокусу кривой, он описывается кн. I, пр. XI
Эфир, проникающий все тела и в телах содержащийся, с которым множество явлений природы следует связывать, нуждается в более тщательном исследовании 662

Юпитер
время оборота 509
расстояние от Солнца 509
диаметр видимый 506
диаметр истинный 521
притягивающей силы величина 520
вес тел на его поверхности 520
плотность 521
количество материи [масса] 521
возмущения со стороны Сатурна, величина 528
диаметров рассчитанное соотношение приводится 536; и с наблюдением сравнивается, там же
вращение вокруг оси; излагается, за какое время оно совершается, 536
поясов причины неявно указываются 538, 539

# ПРИЛОЖЕНИЕ

# О РУССКОМ ПЕРЕВОДЕ "МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАЧАЛ НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ" ИСААКА НЬЮТОНА

Перевод на живые языки классических естественнонаучных произведений, написанных на латыни – международном языке науки, использовавшемся вплоть до XIX в., – важная и ответственная, но и весьма трудная задача. Сложность здесь связана с тем, что переводчик должен не только хорошо знать латынь, но и разбираться в той области науки, к которой относится переводимое сочинение, а также знать историю этой области. Серьезные проблемы возникают в том случае, когда авторская латынь характеризуется отчетливо выраженным своеобразием. В связи с этим особую ценность представляют переводы, выполненные выдающимися представителями современного естествознания, снабженные глубокими текстологическими, историческими и пояснительными комментариями.

Перевод на русский язык сочинения И. Ньютона "Математические начала натуральной философии" появился позднее переводов на основные европейские языки – английский, французский и немецкий. Однако это единственный случай, когда переводчиком стал выдающийся ученый – механик, математик и кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов[1]. За два года он, будучи в то время профессором Николаевской Морской академии, перевел, прокомментировал и издал "Начала". Об обстоятельствах своей работы А.Н. Крылов вспоминал так:

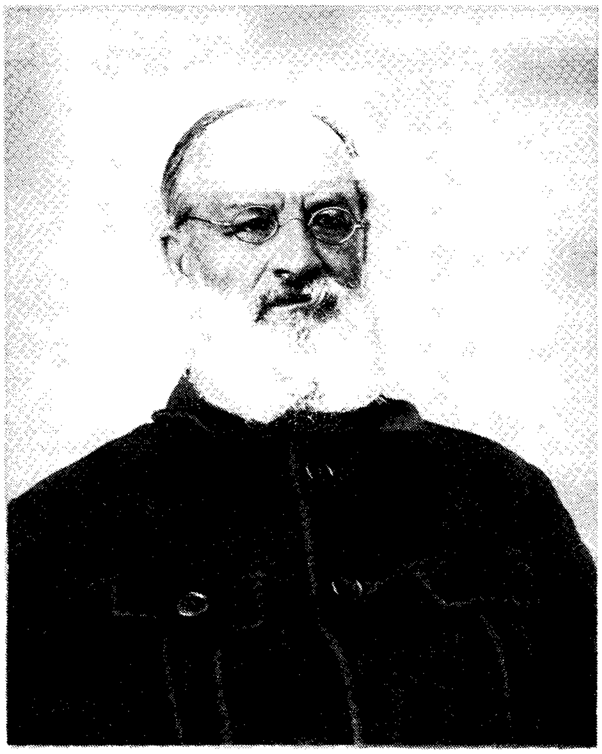
"В 1914 г. приема в Морскую академию не было и лекций не читалось, я был свободен и решил употребить свободное время на перевод и издание "Начал" Ньютона на русский язык, снабдив этот перевод комментарием, изложенным так, чтобы он был понятен слушателям Морской академии. Я работал аккуратно по три часа утром и по три часа вечером. Сперва я переводил текст почти буквально и к каждому выводу тотчас писал комментарий; затем, после того как заканчивался отдел, я выправлял перевод так, чтобы смысл сохранял полное соответствие латинскому подлиннику, и вместе с тем мною соблюдалась чистота и правильность русского языка; после этого я переписывал все начисто, вставлял в свое место комментарий и подготовлял к набору. К концу 1915 г. был отпечатан 1-й том, содержащий книги I и II "Начал". К концу 1916 г. весь перевод был окончен и отпечатан, составив выпуски 3-й и 4-й „Известий Морской академии"[2].

Вторично перевод "Начал" на русский язык был опубликован в 1936 г. как том VII "Собрания трудов" А.Н. Крылова, который послужил основой настоящего издания. Уже само включение этого перевода наряду с оригинальными работами в состав научных трудов А.Н. Крылова показывает объем и принципиальную значимость этой работы.

---

[1] Любопытно, что А.Н. Крылов в детстве, обращаясь к отцу с просьбой отдать его учиться в Морское училище, мотивировал ее нежеланием "зубрить никому не нужные латынь и греческий". Жизнь опровергла мнение юного Крылова о бесполезности классических языков. На склоне лет он вспоминал: "...много раз в течение моей жизни и научной деятельности мне с пользою служила латынь. Конечно, я не мог читать ни Цицерона, ни Ювенала...; зато я свободно разбирался в элементарно простой латыни Эйлера, несколько труднее в превосходной латыни Ньютона и еще труднее в чисто классической латыни Гаусса и Якоби" (Собр. тр. акад. А.Н. Крылова. Т. 1, ч. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 71).

[2] Цит. по кн.: *Ханович И.Г.* Академик Алексей Николаевич Крылов. Л.: Наука, 1967. С. 162.



Алексей Николаевич Крылов
(1863–1945)

Трудность перевода "Начал" обусловлена уже самим стилем изложения материала, использованным Ньютоном. В статье о "Началах", написанной к двухсотлетию со дня смерти великого английского ученого, А.Н. Крылов писал:

"Геометрическое изложение, соответствовавшее обычаю и состоянию науки того времени, для большинства теперешних читателей, при старинном начертании формул с показателями степеней, обозначенных словами, а не числами, представляет при чтении излишнюю трудность. Эта трудность увеличивается еще тем, что Ньютон, в целях сжатости изложения, идет, так сказать, крупными шагами, пропуская многие промежуточные рассуждения; поэтому в моем переводе "Начал" на русский язык я придал формулам общепринятый теперь вид и большую часть доказательств пояснил в примечаниях, с соответствующими аналитическими выводами и алгебраическими выкладками в теперешней форме"[3].

О тщательности работы А.Н. Крылова над переводом и комментарием свидетельствуют рукописные материалы, хранящиеся в Архиве АН СССР: три тетради с исправлениями, содержащие первоначальный перевод "Книги первой" с предисловием и комментариями (в них, в частности, имеется 166 рисунков, включенных в текст), а также рукопись "Книги второй" и "Книги третьей", с которой производился набор, варианты и черновые материалы для комментариев[4].

При переводе А.Н. Крылов столкнулся и с трудностями адекватной передачи многих латинских терминов и выражений. Он старался избежать "употребления латинских слов вроде: импульс,

[3] *Крылов А.Н.* "Начала" Ньютона // Ньютон. 1727–1927. Л.: Изд-во АН СССР, 1927. С. 21.
[4] Подробнее см.: Рукописное наследие академика Алексея Николаевича Крылова: Научное описание. Труды Архива АН СССР. Вып. 23. Л.: Наука, 1969. С. 79.

эффект, факт и т.д., которые от написания их русскими буквами не становятся русскими"[5]. Во многих случаях ему удалось добиться поставленной цели, хотя у современного читателя, для которого "возраст" перевода составляет уже почти семьдесят пять лет, использование слов и терминов, указанных А.Н. Крыловым, вряд ли вызвало бы протест. Однако представляется, что в архаичности некоторых оборотов речи переводчика есть свое достоинство: эта архаичность способствует созданию некоторой исторической перспективы и ощущения времени, отделяющего нас от эпохи Ньютона.

Необходимо отметить, что А.Н. Крылов относился к сделанному им переводу достаточно критически, понимая, что никто не застрахован от ошибок и неточностей при выполнении работы такого объема и сложности. В середине тридцатых годов он обратился к специалистам в области математики, механики и истории науки М.Я. Выготскому, Н.С. Кошлякову, С.Я. Лурье и Л.С. Полаку с просьбой независимо друг от друга перевести некоторые отрывки из "Начал", чтобы сравнить эти переводы со своим собственным. При сравнении переводов каких-либо серьезных расхождений обнаружено не было.

Переводческий труд А.Н. Крылова по достоинству оценили не только представители точных наук, но и филологи и литературоведы. Известный советский литературовед академик А.С. Орлов писал о переводах Крылова:

"Этот самоотверженный труд состоял не в простой замене языковых идиом одной национальности идиомами другой, а в установлении адекватности таких идиом и даже прямо в создании точно подходящих терминологических соответствий, для чего еще требовалось комментировать все ответственные выражения и самую семантику каждого термина"[6].

Оценивая перевод "Начал" на русский язык в целом, нельзя не согласиться с мнением известного историка астрономии Н.И. Идельсона, который писал:

"Не подлежит сомнениям, что своим переводом книги Ньютона и обширным комментарием к нему Алексей Николаевич создал ценность непреходящего значения для всей русской физико-математической культуры; он дал нам издание Ньютона, равного которому никакая страна не знает. У англичан есть только подстрочный перевод, сделанный Моттом в год смерти Ньютона[7]; у французов есть замечательный перевод, исполненный знаменитой маркизой дю Шатле, подругой жизни Вольтера, он издан (1759 г.) через 10 лет после ее смерти с длинным комментарием, ею самой написанным и просмотренным Клеро. Но это – библиографическая редкость; к тому же стиль перевода – гладкий французский стиль эпохи Людовика XV – совершенно далекий от того особенного жесткого языка Ньютона, который сумел схватить только Крылов.

Крыловский перевод – наша национальная ценность и богатство, это высокий памятник трудолюбию и искусству Крылова, который один за 250 лет после издания ньютоновских "Начал" сумел поставить их перевод и комментарий на надлежащую, да едва ли могущую быть превзойденной в будущем высоту"[8].

Работа такого масштаба, как перевод ньютоновских "Начал", конечно, не могла не вызвать и некоторые критические замечания. Так, С.А. Богомолов[9] и Д.Д. Мордухай-Болтовский[10] считали, что имеются неточности в переводе математического введения "Начал"[11]. Однако действительно

---

[5] С. *II* наст. изд.

[6] *Орлов А.С.* А.Н. Крылов – знаток и любитель русской речи // Памяти Алексея Николаевича Крылова. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 145.

[7] Позднее перевод Мотта был отредактирован и снабжен дополнительными комментариями Ф. Кэджори; это издание вышло в 1934 г.

[8] *Идельсон Н.И.* Работы А.Н. Крылова по астрономии // Памяти Алексея Николаевича Крылова, М., Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 50,51.

[9] *Богомолов С.* Общие основания ньютонова метода первых и последних отношений // Изв. Физ.-мат. о-ва Казан. ун-та, 1916. С. 24,25.

[10] *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики. V. Генезис и история теории пределов. § 3. Ньютон и Лейбниц // Изв. СКГУ. 1928. С. 108,109.

[11] О спорном характере некоторых замечаний С.А. Богомолова и Д.Д. Мордухай-Болтовского см. работу Н.Н. Лузина "Ньютонова теория пределов" (Исаак Ньютон. 1643–1727. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1943. С. 53–74).

имеющиеся в переводе погрешности не столь существенны, поэтому и было принято решение о его факсимильном издании[12].

Следует отметить, что вклад А.Н. Крылова в изучение научного наследия Ньютона отнюдь не ограничивается переводом "Начал". Широкую известность получили работы А.Н. Крылова, в которых исследовался метод определения кометных орбит по малому числу наблюдений, предложенный Ньютоном, а также ньютоновская теория астрономической рефракции. Точную оценку этим работам дал Т.И. Райнов, включивший в свой обзор "Ньютон и русское естествознание" специальный раздел "Ньютон и А.Н. Крылов": "Их своеобразие состоит в том, что они соединяют задачу исследования и передачи подлинных мыслей Ньютона с задачей дальнейшей исследовательской разработки предметов, которых касаются эти мысли. Связанные прямо с Ньютоном работы Крылова являются поэтому не только историческими. Они представляют в действительности оригинальные попытки творческой разработки ряда очередных вопросов в классических областях математического естествознания, проводящиеся в духе идей Ньютона и часто также с помощью созданных еще им же методов"[13].

А.Н. Крылов совместно с С.И. Вавиловым был также инициатором предполагавшегося издания на русском языке семитомного собрания сочинений Ньютона. Издание было задумано в 1934 г., когда ни на одном языке, в том числе и на английском, собрание сочинений Ньютона издано не было. В фондах Ленинградского отделения Архива АН СССР среди документов Института истории науки и техники хранится дело (30 листов), относящееся к подготовке этого издания[14].

В машинописном варианте план издания таков: том 1 – жизнь Ньютона и его эпоха в первоисточниках; тома 2, 3 – математические сочинения; тома 4, 5 – "Начала"; том 6 – сочинения по оптике; том 7 – переписка. Объем томов – от 25 до 32 листов. План сопровождается инструкцией по составлению собрания сочинений Ньютона[15].

Должны были переводиться все имеющие сколько-нибудь самостоятельное значение произведения Ньютона. Планировалось подготовить текстологические, исторические и объяснительные комментарии, а также дать три указателя: терминов, нуждающихся в объяснении, именной и предметный. Главным редактором должен был стать С.И. Вавилов. К сожалению по не зависяшим от составителей проекта причинам издание собрания сочинений Ньютона не было осуществлено.

*С.Р. Филонович*

[12] Здесь необходимо привести свидетельство Т.П. Кравца о том, что в начале века был выполнен другой перевод "Начал" Ньютона на русский язык: "Накануне войны 1914–1918 гг. известное одесское издательство "Матезис" намеревалось выпустить перевод "Начал", сделанный Чакаловым. По обстоятельствам войны и последовавшей разрухи издание не могло состояться. Но верстка перевода сохранилась; по отзывам видевших его, он обладает большими достоинствами" (*Кравец Т.П.* Ньютон и изучение его трудов в России // Исаак Ньютон. 1643–1727. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1943. С. 328). Найти перевод Чакалова не удалось.

[13] *Райнов Т.И.* Ньютон и русское естествознание // Исаак Ньютон. 1643–1727. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1943. С. 343.

[14] ЛО Архива АН СССР. Ф. 154. Оп. 1. № 109. Пользуемся случаем выразить признательность Ю. Х. Копелевич за сообщение приводимых ниже сведений относительно проекта издания собрания сочинений И. Ньютона.

[15] Там же. Л. 11–12.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

В настоящий указатель включены имена, встречающиеся как в оригинальном тексте Ньютона, так и в предисловии переводчика и его комментариях. Исключение составляют имена исторических и легендарных лиц, которые Ньютон приводит для датировки событий, а также имена, упоминаемые Ньютоном в примечаниях на с. 600 и 601 и касающиеся смысла слова "бог" и божественной сущности.

В указателе использована следующая система представления имен. Имя дается в русской транскрипции, использованной в переводе А.Н. Крылова (с разночтениями), а затем, в случае необходимости, приводится современная транскрипция этого имени. Нетранскрибированные имена, встречающиеся в комментариях, приведены в общепринятой русской транскрипции. В скобках дается форма имени, использованная Ньютоном (с разночтениями), а также современная форма его написания; если имя встречается только в комментариях, оно приводится в скобках лишь в современной форме.

Номера страниц соответствуют факсимильному изданию. Прямым шрифтом указаны страницы, где данное имя встречается в тексте Ньютона, курсивом – страницы с комментариями, в которых это имя упоминается.

Указатель составлен С.Р. Филоновичем.


Адамс Джон Кауч (Adams John Couch, 1818–1892) – английский астроном и математик, один из авторов открытия Нептуна *158*

Адриан Римлянин [Ван Роумен Адриан] (Van Roomen Adriaan, 1561–1615) – нидерландский математик, автор работ по геометрии и тригонометрии *113*

Альфонс (Alphonsus, Alfonso X, 1221–1284) – король Кастилии и Леона, по распоряжению которого были составлены астрономические таблицы (так называемые "альфонсинские"), использовавшиеся на протяжении трех веков, 20

Анго Пьер (Angus, Ango Pierre, 1640–1694) – французский ученый-иезуит, в 1682 г. опубликовал сочинение по оптике, в значительной степени основанное на записках Парди, который дискутировал с Ньютоном по вопросам оптики, 631, 633, 634

Аполлоний [Пергский] (Apollonius, 2-я пол. III в. – 1-я пол. II в. до н.э.) – древнегреческий математик и астроном, ученик Евклида, автор труда "Conica ("Конические сечения"), для объяснения видимого движения планет предложил первый вариант теории эпициклов, *63, 106,* 113, 117, 122

Аристотель (Aristoteles, 384–322 до н.э.) – древнегреческий философ, автор учения о движении, общепринятого вплоть до XVII в., 5, 517, 646, 647

Архимед (Archimedes, ок. 287–212 до н.э.) – великий древнегреческий ученый, автор сочинений по механике и математике, занимался также оптикой и астрономией, оказал огромное влияние на развитие науки 255, 264

Байер Иоганн (Bayerus, Bayer Johann, 1572–1625) – немецкий астроном, автор сочинения "Uranometria" (1603), в котором были приведены первые карты звездного неба, предложил обозначать звезды в созвездиях буквами 623, 629, 631, 635

Барроу Исаак (Barrow Isaac, 1630–1677) – английский математик, теолог и философ, учитель Ньютона в Кембриджском университете, пропагандировал математические результаты, полученные Ньютоном, *193*

Бентлей [Бентли] Ричард (Bentleius Richardus, Bentley Richard, 1662–1742) – английский ученый, мастер Тринити-колледжа Кембриджского университета (1700–1742), вел переписку с Ньютоном 21

Бернулли Даниил (Bernoulli Daniel, 1700–1782) – швейцарский математик, механик и физик, автор фундаментального труда "Hydrodynamica", член Петербургской академии наук *18, 486*

Бертран Жозер Луи Франсуа (Bertrand Joseph Louis Francois, 1822–1903) – французский математик, механик и историк науки *70, 289*

Бессель Франц Фридрих Вильгельм (Bessel Franz Friedrich Wilhelm, 1784–1846) – выдающийся немецкий астроном и математик *515*

Бине Жак Филипп Мари (Binet Jacques Philippe Marie, 1786–1856) – французский математик и астроном *83, 84*

Блакбурн Г. [Хью] (Blackburn Hugh, 2-я пол. XIX в.) – английский математик, профессор университета Глазго *I, II*

Бойль Роберт [Бойлева пустота, Boylianum vacuum] (Boyle Robert, 1627–1691) – английский физик и химик, один из основателей Лондонского королевского общества (ЛКО), автор работ по упругости газов 7, 659

Бонд Джордж Филлипс (Bond George Phillips, 1825–1865) – американский астроном, сын У. К. Бонда *505*

Бонд Уильям Крэнч (Bond William Cranch, 1789–1859) – американский астроном, совместно с сыном Дж. Ф. Бондом открыл в 1848 г. восьмой спутник Сатурна – Гиперон *505*

Боненбергер Иоганн Готтлиб Фридрих (Bohnenberger Johann Gottlieb Friedrich, 1765–1831) – немецкий астроном и математик *548*

Борелли Джиованни Альфонсо (Borellus, Borelli Giovanni Alfonso, 1608–1679) – итальянский астроном, математик и механик, автор сочинения о движении спутников Юпитера (1666), которое явилось важным шагом на пути установления закона всемирного тяготения, 506

Браге Тихо, см. Тихо Браге

Брадлей [Бредли] Джеймс (Bradleius, Bradleus, Bradley James, 1693–1762) – английский астроном, один из лучших наблюдателей своего времени, открыл явления аберрации света и нутации земной оси 22, 654, 655

Брио [Био] Жан Баптист (Biot Jean Baptiste, 1774 – 1862) – французский физик и математик, совместно с Ф. Лефертом в 1856 г. издал переписку Дж. Коллинса и других ученых о математическом анализе "Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysipromota etc." *15*

Буллио Исмаель (Bullialdus, Bouillaud, Boullialdi, Boulliau Ismael, 1605–1694) – французский астроном и математик, автор сочинений, в которых развивались идеи Коперника и Кеплера, иностранный член ЛКО 508, *508,* 509

Варен (?) (Varin, 2-я пол. XVII в.) – французский естествоиспытатель, участвовал в экспедиции в Африку, где проводил измерения широты места и длины секундного маятника (1682), 539

Венделин Годфруа (Vendelinus, Vendelin или Wendelin Godefroi, 1580–1660) – французский математик и астроном, проводил наблюдения Луны и спутников Юпитера 511

Виет [Виета] Франсуа (Vièta Franciscus, François, 1540–1603) – выдающийся французский математик, один из основоположников алгеб ры 113, *113*

Вольтер [Аруэ Франсуа Мари] (Voltaire [Arouet François Marie], 1694–1778) – французский писатель и философ, пропагандировал теорию Ньютона во Франции *21*

Вольферс Якоб Филипп (Wolfers Jacob Philipp, 1803–1878) – немецкий математик и астроном, издатель первого перевода "Начал" на немецкий язык *I, 2*

Врен [Рен] Христофор [Кристофер] (Wrennus Christophorus, Wren Christopher, 1632–1723) – английский математик, механик, астроном и архитектор, один из основателей ЛКО 51, 53, 80, 149, *149,* 209, 210

Вяхирев Сергей Владимирович (1875 – после 1934) – русский советский инженер, сотрудник Опытового судостроительного бассейна в Петрограде *409* (в настоящее издание статья С.В. Вяхирева, на которую ссылается А.Н. Крылов, не включена).

Галилей Галилео (Galilaeus, Galilei Galileo, 1564–1642) – великий итальянский ученый, один из основоположников современного естествознания 16, 50, 90, 279, 281, 283, 342, 348, 436, 439, 463

Галлей Эдмунд (Halleius, Hallaeus Edmundus, Halley Edmund, 1656–1742) – английский астроном, математик и геофизик, инициатор подготовки "Начал", фактически осуществлял редактирование первого издания книги 3, 22, 80, *387,* 389, 539, 547, 582, 622, 628 – 630, 632, 649, 650, 653 – 656

Галлетиус [Галле] Жан Шарль (Galletius, Gallet Jean Charles, 1637–1713) – французский астроном, вел наблюдения кометы 1680 г. 630, 631, 633

Гаррис Джон (Harris John, 1667 (?)–1719) – английский популяризатор науки, член ЛКО, автор энциклопедического словаря "Lexicon Technicum, or an Universal English Dictionary of Arts and Sciences ..."(1704), *485*

Гаус [Гаусс] Карл Фридрих (Gauss Karl Friedrich, 1777–1855) – великий немецкий математик, астроном и физик, внес выдающийся вклад во многие области точного естествознания *619*

Гевелий, Гевелиус Ян (Hevelius Johann, 1611–1687) – польский астроном, один из ведущих наблюдателей своего времени, составитель первого систематического обзора наблюдавшихся комет и большого звездного каталога 604, 605, 645, 646, 649, 653

Гемма Корнелий (Gemma Cornelius, Corneille, 1535–1579) – голландский врач и астроном, опубликовавший свои наблюдения Новой 1572 г. и кометы 1577 г., 657

Гершель Вильям (Herschel William, 1738–1822) – английский астроном и оптик, один из основоположников звездной астрономии, с помощью усовершенствованных им самим инструментов открыл множество небесных объектов *505*

Гиппарх (Hipparchus, ок. 180 (190)–125 до н. э.) – древнегреческий астроном, один из основоположников астрономии, составитель каталога из 850 звезд 658

Гир Филипп де ла (Hirus, Hire Philippe de la, 1640–1718) – французский математик, автор работ по коническим сечениям 540

Горрокс Иеремия (Horroxius, Horrox Jeremiah, 1619–1641) – английский астроном, впервые предсказал и наблюдал прохождение Венеры по диску Солнца, Ньютон высоко ценил его вклад в развитие теории движения Луны 582

Готтигнис Жиль Франсуа (Gottignies Gilles François, 1630–1689) – иезуит (родился в Брюсселе), математик и астроном 650

Гримальди Франческо Мария (Grimaldus, Grimaldi Francesco Maria, 1618–1663) – итальянский астроном и оптик, открыл и описал дифракцию света 284

Гудден [Гудде] Иоганн (Huddenius, Hudde Johann, 1633(1640)–1704) – голландский математик 334

Гук Роберт (Hookius, Hooke Robert, 1635–1703) – английский естествоиспытатель, первый куратор экспериментов ЛКО, вел астрономические наблюдения, один из авторов гипотезы о всемирном тяготении и основополагающих работ по теории упругости 80, 633, 634, 650, 652

Гюйгенс Христиан (Hugenius Christianus, Huygens Christian, 1629–1695) – выдающийся голландский математик, астроном и физик, автор работ по механике, результатами которых пользовался Ньютон при подготовке "Начал", 9, 51, 53, 80, 209, 210, *505*, 507, 511, 512, 519, 520

Даламберт [Даламбер, Д'Аламбер] Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond, 1717–1783) – французский математик, механик и философ-просветитель, предложил общие правила составления дифференциальных уравнений движения систем материальных точек, сформулировал так называемый принцип Даламбера в классической механике 56

Де-Гайс (?) (Des Hayes, 2-я пол. XVII в.) – французский естествоиспытатель, участвовал в экспедиции в Африку, где проводил измерения широты места и длины секундного маятника (1682) 539–541

Дезагюлье Джон Теофилус (Desaguliers John Theophilus, 1683–1744) – английский физик, куратор экспериментов ЛКО, проводил эксперименты, предложенные Ньютоном 463

Дезарг Жерар (Desargues Gérard, 1593–1662) – французский математик, инженер и архитектор, основатель проективной геометрии, автор сочинения о конических сечениях *116*

Декарт Рене (Cartesius, Descartes René, 1596–1650) – выдающийся французский философ, математик и физик, автор вихревой теории тяготения 13, *14, 116, 122*, 284, 286, 517

Дюамель Жан Мари Констан (Duhamel Jean Marie Constant, 1797–1872) – французский математик, автор многотомного сочинения "Méthodes dans les science du raisonnement" *83*

Дюшатле [Ле Тоннелье де Бретель Габриэль Эмилия] (Du Châstelet, Le Tonnelier de Breteuil Gabrielle Emilie, 1706–1749) – французская аристократка, автор первого перевода "Начал" на французский язык *I, 2*

Евклид, см. Эвклид

Жакье Франсуа (Jacquier François, 1711–1788) – французский математик, издал (совместно с Т. Лесёром) в 1739–1742 гг. в Женеве латинский текст "Начал" с комментариями *II, 159, 502*

Кавалери [Кавaллери] Антуан (Cavaleri [Cavalleri] Antoine, 1698–1763) – французский математик и теолог, автор сочинения "Sur la cause physique du flux et du reflux de la mer" *18*

Кальпресс Самуил (Colepressius, Colepresse Samuel, ? – 1669) – английский любитель науки и путешественник, его письма, в том числе с описанием приливов, публиковались в "Philosophical Transactions" 546, 586

Кассини Джиованни Доменико [Жан Доминик] (Cassinus, Cassini Giovanni Domenico [Jacques Dominique], 1625–1712) – французский астроном, первый директор Парижской обсерватории, прославился как талантливый наблюдатель Солнца и планет *505*, 506, 530, 531, 536, 630

Кассини Жак (Cassinus, Cassini Jacques, 1677–1756) – французский астроном, сын Д.Д.Кассини, участник большого градусного измерения Парижского меридиана 531

Кеплер Иоганн (Keplerus, Kepler Johann, 1571–1630) – выдающийся немецкий астроном, установил законы движения планет *158, 299*, 508, 509, 513, 606, 643, 658

Кирк, Кирш Готфрид (Kirk, Kirch Gottfried, 1639–1710) – немецкий астроном, опубликовал ряд работ с описанием комет 22, 629

Кирхгоф Густав Роберт (Kirchhoff Gustav Robert, 1824–1887) – немецкий физик и математик, автор фундаментального труда "Vorlesungen über mathematische physik. Mechanik" (1874) *490*

Клеро Алексис Клод (Clairaut Alexis Claude, 1713–1765) – французский математик, механик и астроном, внес фундаментальный вклад в развитие теории движения Луны *I, 282*

Коллинс Джон (Collinus, Collins John, 1624/25–1683) – английский математик, член ЛКО, вел обширную переписку с ведущими английскими учеными своего времени, в том числе с Ньютоном 334

Коперник Николай (Copernicus Nicolaus, Kopernik Mikolaj, 1473–1543) – великий польский астроном, создатель гелиоцентрической системы мира 498, 511

Котес [Котс] Роджер (Cotes Roger, 1682–1716) – английский математик и астроном, подготовил второе издание "Начал" *14, 15, 19, 21, 182*

Купле-сын Клод Антуан (Couplet, filius, Claude Antoine, 1642–1722) – французский естествоиспытатель и инженер, член Парижской академии наук 539

Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) – выдающийся французский математик и механик, автор фундаментального труда "Mechanique analitique" (1788), внес значительный вклад в развитие небесной механики *I, 56, 225, 288–291, 344, 477, 613, 614*

Ламб [Лемб] Гораций (Lamb Horace, 1849–1934) – английский математик, механик и физик, специалист в области гидродинамики *490*

Ламберт Иоганн Генрих (Lambert Johann Heinrich, 1728–1777) – немецкий математик, астроном и физик, один из создателей фотометрии, предложил формулу для оценки расстояния от Земли до комет *613*

Лаплас Пьер Симон (Laplace Pierre Simon, 1749–1827) – французский математик, механик и физик, автор фундаментального многотомного труда "Traité de mécanique céleste" (1798–1825) *159, 485, 528, 548, 589, 597, 599*

Леверрье Урбен Жан Жозеф (Le Verrier Urbain Jean Joseph, 1811–1877) – французский астроном, по неправильностям движения Урана предвычислил массу и орбиту неизвестной ранее планеты – Нептуна *505, 656*

Лейбниц Готфрид Вильгельм (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646–1716) – выдающийся немецкий философ и математик, один из создателей исчисления бесконечно малых, автор закона "живых сил" *14, 15, 334*

Лесёр Томас (Le Seur [Leseur] Thomas, 1703–1770) – французский математик, издал (совместно с Ф. Жакье) в 1739–1742 гг. в Женеве "Начала" с комментариями *II, 159, 502*

Леспио Фредерик Гастон (Lespiaut Frédéric Gaston, 1823–1904) – французский астроном и механик *289*

Маклорен Колин (Maclaurin Colin, 1698–1746) – шотландский математик, последователь Ньютона, автор двухтомного сочинения "A Treatise of Fluxions" (1742), составитель "Комментария" к "Началам" *2, 18, 502*

Мариотт Эдм (Mariottus, Mariotte Edme, 1620–1684) – французский механик и физик, один из создателей теории удара, исследовал упругие свойства газов, ставил эксперименты по гидродинамике 51, *483*

Матвей Парижанин (Matthaeus Parisiensis, нач. XIII в. – 1259) – английский хронист, автор сочинения "Historia major Angliae..." 646

Меркатор (Кауфманн) Николас (Mercator (Kaufmann) Nicolas, ок. 1620–1687) – немецкий математик и астроном, член ЛКО, некоторое время работал в Лондоне, состоял в переписке с Ньютоном 530

Монтенари [Монтанари] Джениниано (Montenarus, Montanari Geniniano, 1633–1687) – итальянский астроном, известен наблюдениями комет 632–634, 646

Мотт Эндрю (Motte Andrew, ? – 1730) – английский математик, автор первого перевода "Начал" на английский язык *1, 2, 430*

Мэхин И. [Джон] (Machin John, ? – 1751) – английский математик и астроном, профессор Грешем-колледжа, секретарь ЛКО (1718–1747) 571

Норвуд Ричард (Norwoodus, Norwood Richard, 1590–1675) – английский математик, в 1635 г. измерил расстояние между Лондоном и Йорком 531

Ньюкомб [Ньюком] Саймон (Newcomb Simon, 1835–1909) – американский астроном, специалист по небесной механике *656*

Озу Адриен (Auzoutius, Auzout Adrian, 1622 (?) – 1691) – французский астроном, усовершенствовал микрометр для астрономических наблюдений 650, 652, 653

Паппус [Папп Александрийский] (Pappus, 2-я пол. III в.) – математик и механик эпохи позднего эллинизма, автор сочинения "Synagoge" ("[Математическое] собрание") 2

Паскаль Блез (Pascal Blaise, 1623–1662) – французский математик, физик и философ *116*

Пембертон Генри (Pemberton Henricus, Henry, 1694–1771) – английский врач и естествоиспытатель, был близок к Ньютону, участвовал в подготовке третьего издания "Начал" 21, 571

Пикар Жан (Picartus, Picard Jean, 1620–1682) – французский астроном, провел измерения длины дуги меридиана 531, 535, 540

Пойнтинг Джон Генри (Poynting John Henry, 1852–1914) – английский физик и механик *525*

Понтеус (Ponthaeus, Ponthius, 2-я пол. XVII в.) – астроном, вел наблюдения кометы 1680 г. и посвятил ей специальное сочинение 630, 632–636

Портсмут [второй герцог Портсмутский] (Portsmouth, Second Earl of [Wallop John], 1742–1797) – английский аристократ, наследовал архив Ньютона 290

Поунд, Понд Г. [Джеймс] (Poundius, Poundus, Pound James, 1669–1724) – английский астроном, особую известность получили его наблюдения спутников Юпитера и Сатурна 21, 506, 536, 624, 626, 629, 655

Пти Пьер (Petitus, Petit Pierre, 1594 (1598?) – 1667) – французский астроном, математик и физик, автор сочинения "Dissertation sur la nature des comètes..." (1665), посвященного природе комет 650, 653

Птоломей [Птолемей] (Ptolemaeus, ок. 90 – ок. 160) – древнегреческий астроном и математик, создатель геоцентрической системы мира, автор сочинения "Алмагест", включающего каталог звезд 511

Пуансо Луи (Poinsot Louis, 1777–1859) – французский математик и механик *600*

Пуассон Симеон Дени (Poisson Siméon Denis, 1781–1840) – французский математик, механик и физик *485*

Ранкин [Рэнкин] Уильям Джон Макуорн (Rankine William John Macquorn, 1820–1872) – английский инженер и физик *474*

Рише Жан (Richerus, Richer Jean, ? – 1696) – французский астроном, проводил измерения наклона эклиптики во время экспедиции в Кайенну, а также наблюдения над секундным маятником 539, 541

Савиль Генри (Savilianus, Savile Henry, 1549–1622) – английский аристократ и любитель науки, основатель кафедр геометрии и астрономии в Оксфордском университете 654

Симеон Дургамский (Simeon Dunelmensis, XII в.) – английский хронист и математик 646

Симпсон Томас (Simpson Thomas, 1710–1761) – английский математик, автор работ, в которых методы анализа применялись для решения задач механики и астрономии, предложил формулу приближенного интегрирования (формула Симпсона) *159, 597, 600*

Слузий Слюз Рене Франсуа (Slusius, Sluse René François, 1622–1685) – математик и историк церкви (родился в Льеже), развивал методы, близкие к методам математического анализа 334

Снеллиус [Снелл] Виллеброрд (Snellius, Snell Willebrord, 1580–1626) – нидерландский математик, астроном и оптик, сформулировал закон преломления света 284

Совёр Жозеф (Sauveur Joseph, 1653–1716) – французский математик и физик, автор трудов по акустике (его термин) 486

Стокс Джордж Габриель (Stokes George Gabriel, 1819–1903) – английский физик и математик, автор теории движения вязкой жидкости *487*

Сторер Артур (Storer Arturus, Arthur, 2-я пол. XVII в.) – английский путешественник и любитель естествознания, вел переписку с Ньютоном по вопросам астрономии 632, 646

Стрит Томас (Streetus, Streete Thomas, 1621–1689) – английский математик и астроном, автор сочинения "Astronomia Carolina" (1661) 511

Таунлей [Таунли] Ричард (Townleius, Towneley Richard, 1629–1707) – английский любитель науки и изобретатель, усовершенствовал микрометр и использовал его для астрономических наблюдений 506

Тиссеран Франсуа Феликс (Tisserand François Félix, 1845–1896) – французский астроном, автор четырехтомного труда "Mécanique Céleste", составитель комментариев к "Началам" *225, 288, 289, 301, 303, 306, 548, 655*

Тихо [Браге] (Tycho Brahaeus, Brahe Tycho, 1546–1601) – датский астроном, выдающийся наблюдатель, на основе данных которого Кеплер установил законы движения планет 511, 640, 657

Томсон Вильям [барон Кельвин] (Thomson William, baron Kelvin, 1824–1907) – английский физик и математик, *I, II, 1, 262*

Тэт Питер [Петер] Гутри (Tait Peter Guthrie, 1831–1901) – шотландский физик и математик *1*

Фелльe [П.] Луи (Feuelleus P[ère], Feuillee Louis, 1660–1732) – французский астроном и ботаник, провел многочисленные астрономические наблюдения во время экспедиций в Вест-Индию и Южную Америку 540

Флемстид Джон (Flamstedius, Flamsteedus, Flamsteed John, 1646–1719) – английский астроном, первый королевский астроном и директор Гринвичской обсерватории 603, 606, 622, 626, 629, 635, 653, 654

Целлиус [Целлио] Марко Антонио (Cellius, Cellio Marco Antonio, 2-я пол. XVII в.) – итальянский астроном, профессор физико-математической академии в Риме, 630, 632–634

Цизат Иоганн (Жан) Баптист (Cysatus, Cysat Johann (Jean) Baptiste, 1588–1657) – швейцарский математик и астроном, автор сочинения "Mathematica astronomica de loco, motus magnitudide et causus cometae annorum 1618 et 1619" 605

Циммерман Иоганн Якоб (Zimmermann Johann Jacob, 1644–1693) – немецкий астроном, автор сочинения "Ueber Kometen" (1681) 633

Штурми Самуил [Сэмьюэль] (Sturmius, Sturmy Samuel, 1633–1669) – английский моряк и любитель науки, его описание приливов было опубликовано в "Philosophical Transactions" (1668) 546, 585, 586

Шульгин Григорий Иванович (1855–1923) – русский гидрограф, специалист в области навигационной астрономии, генерал-майор, начальник Морской академии в Петербурге *II*

Эйлер Леонард (Euler Leonhard, 1707–1783) – великий математик, механик, физик и астроном, член Петербургской АН, оказал огромное влияние на развитие математики и всего точного естествознания *18, 528, 613–615*

Эвклид [Евклид] (Euclides, ок. 340 – ок. 287 до н.э.) – великий древнегреческий математик, автор сочинения "Начала", в котором приведены основные теоремы элементарной геометрии, занимался также астрономией и оптикой *63, 67,* 70, 122

# СОДЕРЖАНИЕ


Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *9*

Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии . . . . . . . . . . . I–VI
1–662

Алфавитный предметный указатель. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *663*

Приложение
О русском переводе "Математических начал натуральной философии" Исаака Ньютона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *677*
Именной указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *682*

Научное издание

**Исаак Ньютон**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА
НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ

*Репринтное воспроизведение
издания 1936 г.*

*Утверждено к печати
Редакционной коллегией
серии "Классики науки"*

Редактор издательства *Э.Н. Терентьева*
Художественный редактор *М.Л. Храмцов*
Технический редактор *Г.П. Каренина*
Корректор *О.А. Разуменко*

ИБ № 40200

Подписано к печати 17.08.89. Формат 70 X 90 1/16
Бумага книжно-журнальная. Печать офсетная
Усл.печ.л. 52,1. Усл.кр.-отт. 53,3. Уч.-изд.л. 55,3
Тираж 5000 экз. Тип. зак. 3350
Цена 6 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул., д. 90

2-я типография издательства "Наука"
121099, Москва, Г-99,
Шубинский пер., 6